अध्याय 7

क्रमचय एवं संचय

Permutations and Combinations

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि
(i) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो?
(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो?

हल (i) जब अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो

I II III

चूँकि अंकों की संख्या 5 है इसलिए प्रत्येक खाली स्थान भरने के तरीकों की संख्या 5 होगी।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 5 \times 5 \times 5 = 125$

(ii) जब अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो

सैकड़ा दहाई इकाई

दिए गए अंकों की संख्या 5 है अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5

$\therefore$ इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 5

दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 4

तथा सैकड़ा स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 3

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

प्रश्न 2. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है?

हम जानते हैं कि कोई संख्या सम होगी यदि इसके इकाई स्थान पर सम संख्या हो। सर्वप्रथम हम इकाई स्थान के लिए सम संख्या चुनते हैं और इसके बाद शेष दो स्थानों के लिए संख्याओं का चुनाव किया जाता है।

हल दी गई संख्याओं में से सम संख्याएँ = 2, 4, 6

$\therefore$ इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 3

दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 6

तथा सैकड़ा स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 6

सैकड़ा दहाई इकाई

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 3 \times 6 \times 6 = 108$

प्रश्न 3. अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

हल प्रथम स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 10

I II III IV

दूसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 9

तीसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 8

तथा चौथे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 7

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या

$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 630 \times 8 = 5040$

प्रश्न 4. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारम्भ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

यहाँ प्रथम दो अंक निश्चित है। अतः केवल अंतिम तीन अंकों का चयन यह ध्यान में रखते हुए करना है कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल तीसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 8

चौथे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 7

तथा पाँचवें स्थान को भरने के तरीकों की संख्या = 6

6	7			
I	II	III	IV	V

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या = $8 \times 7 \times 6 = 56 \times 6 = 336$

प्रश्न 5. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है और परिणाम अंकित कर लिए जाते हैं। परिणामों की संभव संख्या क्या है?

हल सिक्के को उछालने में, दो संभावित परिणाम चित्त और पट्ट प्राप्त होते हैं। दूसरी बार सिक्के को उछालने में भी दो संभावित परिणाम प्राप्त होते हैं और तीसरी बार सिक्के को उछालने में भी दो संभावित परिणाम प्राप्त होते हैं।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, परिणामों की संभव संख्या = $2 \times 2 \times 2 = 8$

प्रश्न 6. भिन्न–भिन्न रंगों के 5 झंडे दिए हुए हैं। इनसे कितने विभिन्न संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संकेत में 2 झंडों, एक के नीचे दूसरे के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है?

हल एक झंडा चुनने के तरीकों की संख्या = 5

बचे हुए चार झंडों में से दूसरे झंडे को चुनने के तरीकों की संख्या = 4

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या = $5 \times 4 = 20$

प्रश्नावली 7.2

प्रश्न 1. मान निकालिए

(i) $8!$ (ii) $4! - 3!$

हल (i) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

(ii) $4! - 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1) = 24 - 6 = 18$

नोट *दो क्रमगुणित संख्याओं को प्रत्यक्ष रूप से जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग नहीं किया जा सकता है।*

उदाहरण के लिए, $3! + 3! \neq 6!$, $3! - 2! \neq 1!$

$3! \times 3! \neq 9!$ *तथा* $\frac{4!}{2!} \neq 2!$

प्रश्न 2. क्या $3! + 4! = 7!$ बराबर है?

हल नहीं, क्योंकि

बायाँ पक्ष $= 3! + 4! = (3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 + 24 = 30$ ...(i)

दायाँ पक्ष $= 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 3. $\dfrac{8!}{6! \times 2!}$ का परिकलन कीजिए।

गणना को आसान बनाने के लिए, अंश की क्रमगुणित संख्या को खोलते हैं जब तक कि हर की क्रमगुणित संख्या के समान संख्या न प्राप्त हो जाए।

हल $$\frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$$

प्रश्न 4. यदि $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{7!} = \dfrac{x}{8!}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{7!} = \dfrac{x}{8!}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6!} + \frac{1}{7 \times 6!} = \frac{x}{8 \times 7 \times 6!}$$

बाएँ पक्ष से $\dfrac{1}{6!}$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\frac{1}{6!}\left[1 + \frac{1}{7}\right] = \frac{x}{8 \times 7 \times 6!} \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{7} = \frac{x}{8 \times 7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7+1}{7} = \frac{x}{8 \times 7}$$

$$\Rightarrow \quad x = 8 \times 8 = 64$$

प्रश्न 5. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ का मान निकालिए, जब

(i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$

हल (i) दिए हुए व्यंजक $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ में $n = 6$ तथा $r = 2$ रखने पर,

$$\frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

(ii) दिए हुए व्यंजक $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ में $n = 9$ तथा $r = 5$ रखने पर,

$$\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$$

$$= 72 \times 42 \times 5 = 72 \times 210 = 15120$$

प्रश्नावली 7.3

प्रश्न 1. 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि किसी भी अंक को दोहराया नहीं गया है?

यहाँ हम गणना का आधारभूत सिद्धांत या सूत्र ^nP_r का प्रयोग कर सकते हैं।

हल 1 से 9 तक के अंकों में से तीन विभिन्न अंक लेने पर बनी तीन अंकों की कुल संख्याएँ

$$= {}^9P_3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 504$$

प्रश्न 2. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

हमारे पास 0 से 9 तक अंकों की संख्या 10 हैं किंतु पहला स्थान कभी भी शून्य से नहीं भरा जा सकता क्योंकि ऐसा करने से प्राप्त संख्या 3 अंकों की होगी।

हल यहाँ पहला स्थान 9 तरीकों से भरा जा सकता है।

I	II	III	IV

दूसरा स्थान भी 9 तरीकों से भरा जा सकता है।
तीसरा स्थान 8 तरीकों से भरा जा सकता है।
चौथा स्थान 7 तरीकों से भरा जा सकता है।
अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

> **नोट** *चार अंकों वाली संख्या में इकाई, दहाई और सैकड़ा स्थान 0 से 9 तक किसी भी अंक से भरा जा सकता है किंतु हजार वाला स्थान कभी भी शून्य से नहीं भरा जा सकता, क्योंकि ऐसा करने पर प्राप्त संख्या 3 अंकों की होगी।*

प्रश्न 3. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 को प्रयुक्त करने से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है?

यदि इकाई स्थान पर सम संख्या हो, तो संख्या सम होगी। इसलिए पहले हम इकाई स्थान को सम संख्या से भरते हैं फिर दहाई और सैकड़ा वाले स्थान को किसी भी संख्या से भर सकते हैं।

हल दी गई संख्याओं में से सम संख्याएँ = 2, 4, 6

सैकड़ा	दहाई	इकाई

∴ इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 3
दिए गए शेष पाँच अंकों में से दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 5
तथा सैकड़ा स्थान भरने से तरीकों की संख्या = 4
अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 3 \times 5 \times 4 = 60$

प्रश्न 4. अंक 1, 2, 3, 4, 5 के प्रयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

हल दिए गए अंकों की कुल संख्या = 5
इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 5

दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 4

सैकड़ा स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 3

तथा हज़ारवाँ स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 2

☐	☐	☐	☐
हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या = $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

पुनः

☐	☐	☐	☐
हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

संख्या 2 तथा 4 से इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 2

दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 4

सैकड़ा स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 3

तथा हज़ारवाँ स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 2

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या = $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

अतः 120 संख्याओं में से 48 संख्याएँ सम संख्याएँ होंगी।

प्रश्न 5. 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

हल 8 व्यक्तियों की समिति में, एक व्यक्ति अध्यक्ष पद के लिए 8 तरीकों से चुना जा सकता है। चूँकि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता अर्थात् बचे हुए 7 व्यक्तियों में से एक व्यक्ति उपाध्यक्ष पद के लिए 7 तरीकों से चुना जा सकता है।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या = $8 \times 7 = 56$

प्रश्न 6. यदि ${}^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हम इसे सरल करने के लिए सूत्र ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ का प्रयोग करेंगे।

हल दिया है, ${}^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$

$$\therefore \quad \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{n!}{(n-4)!} = 1 : 9 \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} : \frac{n(n-1)!}{(n-4)!} = 1 : 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-4)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad n = 9$$

प्रश्न 7. r का मान ज्ञात कीजिए यदि (i) ${}^5P_r = 2\,{}^6P_{r-1}$ (ii) ${}^5P_r = {}^6P_{r-1}$

हम जानते हैं कि ${}^nP_r$ में r का मान सदैव 0 से बड़ा तथा n से छोटा या n के बराबर होता है।

हल (i) दिया है, ${}^5P_r = 2\,{}^6P_{r-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6!}{(6-r+1)!} \qquad \left[\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right]$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \dfrac{6 \times 5!}{(7-r)!}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{(5-r)!} = \dfrac{12}{(7-r)(6-r)(5-r)!}$

$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 12$

$\Rightarrow \quad 42 - 7r - 6r + r^2 = 12$

$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 30 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2 - 10r - 3r + 30 = 0$

$\Rightarrow \quad r(r-10) - 3(r-10) = 0$

$\Rightarrow \quad (r-10)(r-3) = 0$

$\Rightarrow$ $r = 10, 3$ यहाँ $r = 10$ अमान्य है, चूँकि $0 \le r \le 5$

अतः $r = 3$

(ii) दिया है, ${}^5P_r = {}^6P_{r-1}$

$\therefore \quad \dfrac{5!}{(5-r)!} = \dfrac{6!}{\{6-(r-1)\}!} \qquad \left[\because {}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}\right]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{5!}{(5-r)!} = \dfrac{6 \times 5!}{(7-r)!} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{(5-r)!} = \dfrac{6}{(7-r)(6-r)(5-r)!}$

$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 6$

$\Rightarrow \quad 42 - 7r - 6r + r^2 = 6$

$\Rightarrow \quad 42 - 13r + r^2 = 6$

$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 42 - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2 - 9r - 4r + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad r(r-9) - 4(r-9) = 0$

$\Rightarrow \quad (r-4)(r-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4, 9$

चूँकि $0 \le r \le 5$ इसलिए $r = 9$ अमान्य है।

अतः $r = 4$

प्रश्न 8. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को केवल एक बार प्रयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्द बन सकते हैं?

हल शब्द EQUATION, 8 विभिन्न अक्षरों से मिलकर बना है।

अतः 8 अक्षरों को एकसाथ लेकर अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्द बनाने के

कुल तरीकों की संख्या $= {}^8P_8 = \dfrac{8!}{(8-8)!} = \dfrac{8!}{0!}$

$= \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 40320 \qquad (\because 0! = 1)$

प्रश्न 9. MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है, यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं?

(ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?

(iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किंतु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

विभिन्न शब्दों की संख्या का अर्थ दिए हुए शब्द के अक्षरों के क्रमचयों की संख्या से है। उपरोक्त प्रश्न के प्रत्येक भाग के लिए हम सूत्र ${}^nP_r$ का प्रयोग करेंगे।

हल MONDAY शब्द के सारे अक्षर विभिन्न हैं।

(i) 6 विभिन्न अक्षरों में से 4 अक्षर ${}^6P_4$ तरीके से चुने जा सकते हैं।

∴ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^6P_4$

$$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

(ii) 6 विभिन्न अक्षरों में से एकसाथ सभी अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या

$$= {}^6P_6$$

∴ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^6P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!}$

$$= 720 \qquad [\because 0! = 1]$$

(iii) सर्वप्रथन, हम स्वर को निश्चित करेंगे।

शब्द MONDAY में स्वरों की संख्या दो है अर्थात् O तथा A स्वर हैं।

अतः पहले अक्षर को दो तरीकों से चुना जा सकता है।

बचे हुए पाँच अक्षरों में से 5 विभिन्न अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या

$$= {}^5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!}$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, अभीष्ट शब्दों की कुल संख्या

$$= 2 \times 120 = 240$$

प्रश्न 10. MISSISSIPPI शब्द के अक्षरों से बने भिन्न-भिन्न क्रमचयों में से कितनों में चारों I एकसाथ नहीं आते हैं?

हल शब्द MISSISSIPPI में 11 अक्षर हैं जिनमें

M → 1 बार

I → 4 बार

S → 4 बार

P → 2 बार

MISSISSIPPI शब्द के क्रमचयों की संख्या जिसमें 4, I, 4, S तथा 2, P एकसमान हैं।

$$= \frac{11!}{4!\,4!\,2!} \qquad \ldots(i)$$

यदि चारों I एकसाथ लेते हैं, तब इसे हम एक अक्षर कहेंगे और बचे हुए 7 अक्षर और एक I अक्षर (I साथ लेकर) मिलकर 8 अक्षर बनेंगे।

तब, क्रमचयों की संख्या $= \frac{8!}{4!2!}$

अतः व्यवस्थित करने के कुल तरीकों की संख्या $= \frac{11!}{4!\,4!\,2!} - \frac{8!}{4!\,2!}$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} - \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1}$$

$$= 34650 - 840 = 33810$$

प्रश्न 11. शब्द PERMUTATIONS के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि

(i) **चयनित शब्द का प्रारंभ P से तथा अंत S से होता है?**

(ii) **चयनित शब्द में सभी स्वर एकसाथ हैं?**

(iii) **चयनित शब्द में P और S के मध्य सदैव 4 अक्षर हों?**

हल शब्द PERMUTATIONS में अक्षर निम्न प्रकार आए हुए हैं

P	—	1 बार
E	—	1 बार
R	—	1 बार
M	—	1 बार
U	—	1 बार
T	—	2 बार
A	—	1 बार
I	—	1 बार
O	—	1 बार
N	—	1 बार
S	—	1 बार

(i) शब्द जिनका प्रारंभ P से तथा अंत S से हो अर्थात्

$\boxed{P}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{S}$

प्रथम तथा अंतिम स्थान क्रमशः P तथा S से भरे जाएँगे, तब बचे हुए 10 स्थान भरे जाने के तरीकों की संख्या $= \frac{10!}{2!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 720 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$= 720 \times 2520$$

$$= 1814400$$

(ii) यदि सभी स्वर एकसाथ लिए गए हों, तब इसे हम एक अक्षर कहेंगे अर्थात् (A, E, I, O, U) और बचे हुए 7 अक्षर और एक स्वर (5 स्वर साथ लेकर) मिलकर 8 अक्षर बनेंगे। 5 स्वरों को 5! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है।

$\therefore$ क्रमचयों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{5! \times 8!}{2!}$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 2419200$$

(iii) व्यवस्थित अक्षरों की कुल संख्या = 12

P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हैं अर्थात्

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
पहला तरीका	P					S						
दूसरा तरीका		P					S					
तीसरा तरीका			P					S				
चौथा तरीका				P					S			
पाँचवाँ तरीका					P					S		
छठा तरीका						P					S	
सातवाँ तरीका							P					S

अतः P और S जिनके मध्य 4 अक्षर हैं उन्हें 7 तरीकों से भरा जा सकता है।

अतः P और S या S और P को 7 + 7 = 14 तरीकों से भरा जा सकता है।

बचे हुए 10 अक्षर (जिनमें T दो बार आया है) भरे जाने के तरीकों की संख्या $= \dfrac{10!}{2!}$

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= 14 \times \dfrac{10!}{2!} = \dfrac{14 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2}$

$$= \frac{14 \times 3628800}{2} = 25401600$$

प्रश्नावली 7.4

प्रश्न 1. यदि $^nC_8 = {}^nC_2$, तो $^nC_2$ ज्ञात कीजिए।

हम परिणाम $^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x + y = n$ का प्रयोग करके दिए हुए व्यंजक को सरल करेंगे।

हल दिया है, $^nC_8 = {}^nC_2 \quad \Rightarrow \quad n = 8 + 2 = 10$

अब, $^nC_2 = {}^{10}C_2 = \dfrac{10 \times 9}{2} = 5 \times 9 = 45$ $\quad \left[\because {}^nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}\right]$

प्रश्न 2. n का मान निकालिए, यदि

(i) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 12 : 1$ (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11 : 1$

भाग (i) तथा (ii) के लिए, हम ${}^{n}C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ तथा ${}^{n}C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ का प्रयोग करेंगे।

हल (i) दिया है, ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 12 : 1$

$$\therefore \quad \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} : \frac{n(n-1)}{2} = 12 : 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n(2n-1)2(n-1)}{6} \times \frac{2}{n(n-1)} = \frac{12}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(2n-1)}{3} = \frac{12}{1} \Rightarrow \frac{2n-1}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2n - 1 = 9 \Rightarrow 2n = 9 + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

(ii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11 : 1$

$$\therefore \quad \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} : \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 11 : 1$$

$$\Rightarrow \quad 2n(2n-1)2(n-1) : n(n-1)(n-2) = 11 : 1$$

$$\Rightarrow \quad 2n(2n-1)2(n-1) \times \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{11}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(2n-1)}{n-2} = \frac{11}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 8n - 4 = 11n - 22$$

$$\Rightarrow \quad 11n - 8n = -4 + 22$$

$$\Rightarrow \quad 3n = 18$$

$$\Rightarrow \quad n = 6$$

प्रश्न 3. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिंदुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने से हमें जीवा प्राप्त होती है। अतः यदि वृत्त पर n बिंदुएँ हैं,तब कुल जीवाओं अथवा रेखाओं की संख्या ${}^{n}C_2$ होगी।

हल यहाँ, $n = 21$

अतः जीवाओं की कुल संख्या $= {}^{21}C_2 = \frac{21 \times 20}{2} = 210$ $\left[\because {}^{n}C_2 = \frac{n(n-1)}{2}\right]$

प्रश्न 4. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीकों से बनायी जा सकती हैं?

हल 5 लडकों में से 3 लडके ${}^{5}C_3$ तरीकों से चुने जा सकते हैं और 4 लड़कियों में से 3 लड़कियाँ ${}^{4}C_3$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं।

अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= {}^5C_3 \times {}^4C_3 = {}^5C_2 \times {}^4C_1$ $\quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times 4 \qquad \left[\because {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}, {}^nC_1 = n\right]$$

$$= 40$$

> **नोट** *कृपया ${}^nC_r$ या ${}^nP_r$ के प्रयोग में सावधानी रखें। यदि वस्तुएँ केवल चयनित की जाती हैं, तब हम सूत्र ${}^nC_r$ का प्रयोग करेंगे और यदि वस्तुओं का चुनाव के साथ वस्तुएँ व्यवस्थित भी की जाती हैं, तब हम सूत्र ${}^nP_r$ का प्रयोग करेंगे।*

प्रश्न 5. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंद चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

हल 6 लाल गेंदों में से 3 लाल गेंदें ${}^6C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं, 5 सफेद गेंदों में से 3 सफेद गेंदें ${}^5C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं तथा 5 नीली गेंदों में से 3 नीली गेंदें ${}^5C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं। अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या जब प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं,

$$= {}^6C_3 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3$$

$$= {}^6C_3 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} \qquad \left[\because {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ तथा } {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$= 20 \times 10 \times 10 = 2000$$

प्रश्न 6. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बने संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यत: एक इक्का है।

52 पत्तों की एक गड्डी में चार इक्के होते हैं अर्थात् एक इक्का चार पत्तों में से चुना जा सकता है और शेष चार पत्ते बचे हुए 48 पत्तों (अर्थात् 52 − 4 = 48) में से चुने जाते हैं।

हल चार इक्कों में से एक इक्का चुनने के तरीकों की संख्या $= {}^4C_1$

48 पत्तों में से 4 पत्ते चुनने के तरीकों की संख्या $= {}^{48}C_4$

अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

52 पत्तों में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या यदि प्रत्येक संचय में तथ्यत: एक इक्का हो

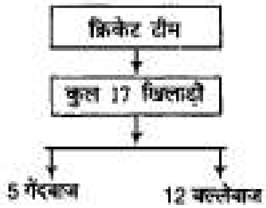
$$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4$$

$$= 4 \times \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{24} \qquad \left[\because {}^nC_1 = n \text{ तथा } {}^nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right]$$

$$= \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{6} = 8 \times 47 \times 46 \times 45 = 778320$$

प्रश्न 7. 17 खिलाड़ियों में से जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाजी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि 11 सदस्यों की प्रत्येक टीम में तथ्यतः 4 गेंदबाज हैं?

हल



हमें 11 खिलाड़ियों का चयन करना है जिनमें तथ्यतः 4 गेंदबाज हों। अतः चार गेंदबाज पाँच गेंदबाज में से चुने जाएँगे तथा बचे हुए 7 खिलाड़ी 12 बल्लेबाज में से चुने जाएँगे।

5 गेंदबाजों में से 4 गेंदबाज $^5C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

12 बल्लेबाजों में से 7 बल्लेबाज $^{12}C_7$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

11 खिलाड़ियों के चयन करने के तरीकों की कुल संख्या

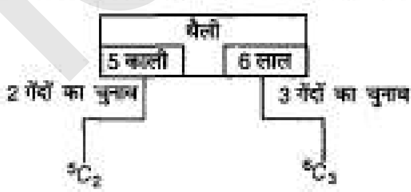
$$= {}^5C_4 \times {}^{12}C_7 = {}^5C_1 \times {}^{12}C_5 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{5 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{120} \qquad \left[\because {}^nC_5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}\right]$$

$$= 5 \times 11 \times 9 \times 8 = 55 \times 72 = 3960$$

प्रश्न 8. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल 5 काली गेंदों में से 2 काली गेंदें $^5C_2$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं।



तथा 6 लाल गेंदों में से 3 लाल गेंदें $^6C_3$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं।

$\therefore$ अभीष्ट तरीकों की कुल संख्या $= {}^5C_2 \times {}^6C_3$ $\qquad \left[\because {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ तथा } {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 10 \times 20 = 200$$

प्रश्न 9. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

हल कुल उपलब्ध पाठ्यक्रमों की संख्या = 9

यहाँ 5 पाठ्यक्रमों का चयन किया जाना है परंतु यह दिया हुआ है कि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं। अतः आपको 5 पाठ्यक्रम के बजाए 3 पाठ्यक्रम का, 9 पाठ्यक्रम के बजाए 7 पाठ्यक्रम में से चुनाव करना है।

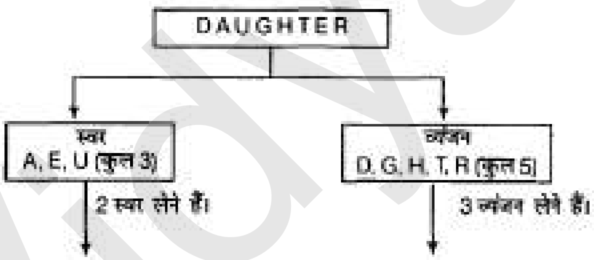
अतः अभीष्ट चयन के तरीकों की कुल संख्या, $^7C_3 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 35$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से, कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि प्रत्येक शब्द में 2 स्वर तथा 3 व्यंजन हों?

दिए हुए शब्द में, सर्वप्रथम स्वर और व्यंजनों की संख्या ज्ञात करते हैं और फिर इनमें से 2 स्वर तथा 3 व्यंजनों का चयन कर इसे व्यवस्थित करते हैं।

हल



3 स्वरों में से 2 स्वर $^3C_2$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

5 व्यंजनों में से 3 व्यंजन $^5C_3$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

अब इन 5 अक्षरों (2 स्वर तथा 3 व्यंजन) को 5! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= {}^3C_2 \times {}^5C_3 \times 5!$

$$= {}^3C_1 \times {}^5C_2 \times 5! = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 3600$$

> **नोट** *विद्यार्थियों को व्यवस्थित करने में सभी संभव तरीकों को नहीं भूलना चाहिए।*

प्रश्न 2. EQUATION शब्द के अक्षरों से कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि स्वर तथा व्यंजन एकसाथ रहते हैं?

पहले हम स्वर और व्यंजन को अलग करते हैं और फिर प्रत्येक बार स्वर तथा व्यंजनों के समुच्चय को एकसाथ रखते हैं।

हल दिए हुए शब्द EQUATION में

स्वर → EUAIO

तथा व्यंजन → TQN

स्वरों को 5! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है तथा व्यंजनों को 3! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। इन स्वरों तथा व्यंजनों (दोनों एक एक अक्षर जैसे हैं) को 2! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है अर्थात् सभी स्वर तथा सभी व्यंजन या सभी व्यंजन तथा सभी स्वर। अतः गणना के प्रथम सिद्धांत से,

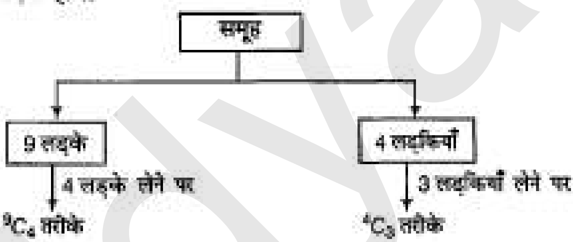
$$\text{कुल तरीकों की संख्या} = 5! \times 3! \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1$$
$$= 120 \times 6 \times 2 = 120 \times 12 = 1440$$

प्रश्न 3. 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी है यह कितने प्रकार से किया जा सकता है, जबकि समिति में,

(i) ठीक 3 लड़कियाँ हैं? **(ii) न्यूनतम 3 लड़कियाँ हैं?**

(iii) अधिकतम 3 लड़कियाँ हैं?

हल (i) 7 सदस्यों की समिति में, हम ठीक 3 लड़कियाँ चुनना चाहते हैं अर्थात् बचे हुए 4 लड़के होंगे।



9 लड़कों में से 4 लड़के $^9C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं तथा 4 लड़कियों में से 3 लड़कियाँ $^4C_3$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं।

$\therefore$ समिति बनाने के लिए कुल तरीकों की संख्या $= {}^9C_4 \times {}^4C_3$

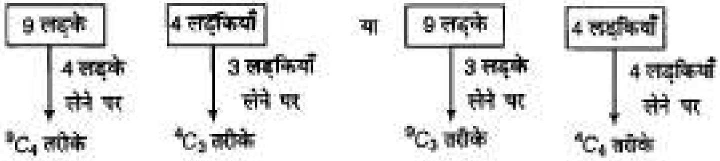
$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} \times {}^4C_1 \qquad \left(\because\ {}^nC_r = {}^nC_{n-r}\right.$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4}{24} \qquad \left.\text{तथा } {}^nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right)$$

$$= 9 \times 8 \times 7 = 72 \times 7 = 504$$

(ii) यहाँ हमें कम-से-कम तीन लड़कियों को चुनना है।

अर्थात् इनका चुनाव करने में निम्न दो संभावनाएँ हैं



प्रथम स्थिति में, 9 लड़कों में से 4 लड़के $^9C_4$ तरीके से चुने जा सकते हैं तथा 4 लड़कियों में से 3 लड़कियाँ $^4C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं।

अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= {}^9C_4 \times {}^4C_3$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 4 = 504$$

द्वितीय स्थिति में, 9 लड़कों में से 3 लड़के $^9C_3$ तरीके से चुने जा सकते हैं और 4 लड़कियों में से 4 लड़कियाँ $^4C_4$ तरीके से चुनी जा सकती हैं।

अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= {}^9C_3 \times {}^4C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 1 = 84$

अत: योग के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= 504 + 84 = 588$

(iii) यहाँ, हमें अधिकतम तीन लड़कियाँ चुननी हैं अर्थात् इनके चुनाव करने की निम्न चार संभावनाएँ हैं

9 लड़के	4 लड़कियाँ	या	9 लड़के	4 लड़कियाँ
↓ 4 लड़के लेने पर	↓ 3 लड़कियाँ लेने पर		↓ 5 लड़के लेने पर	↓ 2 लड़कियाँ लेने पर
$^9C_4$ तरीके	$^4C_3$ तरीके		$^9C_5$ तरीके	$^4C_2$ तरीके

या	9 लड़के	4 लड़कियाँ	या	9 लड़के	4 लड़कियाँ
	↓ 6 लड़के लेने पर	↓ 1 लड़की लेने पर		↓ 7 लड़के लेने पर	↓ शून्य लड़कियाँ लेने पर
	$^9C_6$ तरीके	$^4C_1$ तरीके		$^9C_7$ तरीके	$^4C_0$ तरीके

अत: कुल तरीकों की संख्या (ये घटनायें एक-दूसरे पर निर्भर करती हैं)

$= ({}^9C_4 \times {}^4C_3) + ({}^9C_5 \times {}^4C_2) + ({}^9C_6 \times {}^4C_1) + ({}^9C_7 \times {}^4C_0)$

$= ({}^9C_4 \times {}^4C_1) + ({}^9C_4 \times {}^4C_2) + ({}^9C_3 \times {}^4C_1) + ({}^9C_2 \times {}^4C_0)$ $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$$= \left(\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} \times 4\right) + \left(\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} \times \frac{4 \times 3}{2}\right)$$

$$+ \left(\frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 4\right) + \left(\frac{9 \times 8}{2} \times 1\right)$$

$= 504 + 756 + 336 + 36 = 1632$

प्रश्न 4. यदि शब्द EXAMINATION के सभी अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों को शब्दकोष की तरह सूचीबद्ध किया जाता है, तो E से प्रारंभ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व कितने शब्द हैं?

हल दिए हुए शब्द के अक्षर निम्न हैं

A, A, E, I, I, M, N, N, O, T, X अर्थात् A से शुरू होने वाले शब्द दो I, दो N, A, E, X, M, T, O (कुल 10 अक्षर) से बने होंगे।

अतः इन अक्षरों से बनने वाले शब्दों की संख्या

$$= \frac{10!}{2!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 907200$$

प्रश्न 5. 0, 1, 3, 5, 7 तथा 9 अंकों से, 10 से विभाजित होने वाली और बिना पुनरावृत्ति कि कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

एक संख्या 10 से विभाजित होगी, यदि इकाई स्थान पर शून्य हो और शेष बचे हुए अंक शेष स्थान पर ही आते हों।

हल इकाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 1(अर्थात् शून्य इकाई स्थान में है।) और बची हुई 5 संख्याएँ (1, 3, 5, 7, 9) 5! तरीके से व्यवस्थित की जा सकती है।

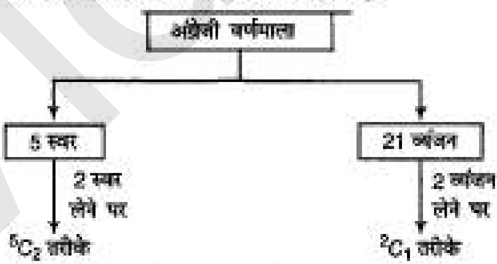
अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= 5! \times 1$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 120$

प्रश्न 6. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला से 2 भिन्न स्वरों और 2 भिन्न व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

हल



5 स्वर में से 2 स्वर $^5C_2$ तरीके से चुने जा सकते हैं।

21 व्यंजन में से 2 व्यंजन $^{21}C_2$ तरीके से चुने जा सकते हैं तथा ये 4 वर्ण (2 स्वर तथा 2 व्यंजन) 4! तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

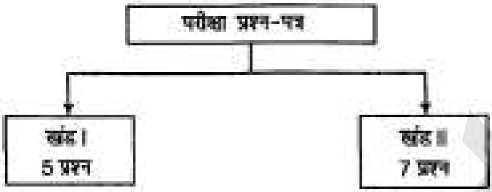
कुल तरीकों की संख्या $= {}^5C_2 \times {}^{21}C_2 \times 4!$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{21 \times 20}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

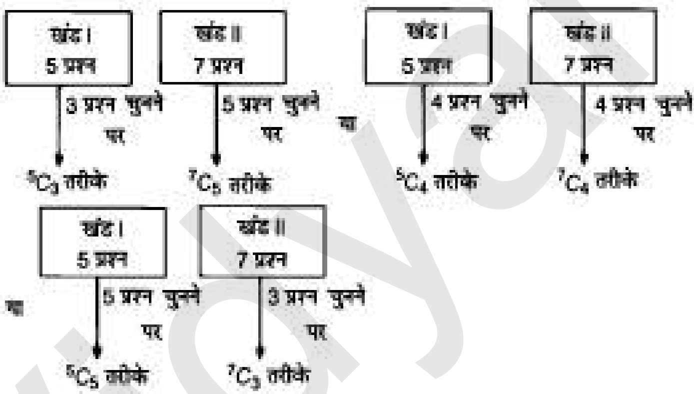
$$= 10 \times 210 \times 24 = 240 \times 210 = 50400$$

प्रश्न 7. किसी परीक्षा में एक प्रश्न-पत्र में 12 प्रश्न हैं जो क्रमश: 5 तथा 7 प्रश्नों वाले दो खंडों में विभक्त हैं अर्थात् खंड I और II एक विद्यार्थी को प्रत्येक खंड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन करते हुए कुल 8 प्रश्नों को हल करना है। एक विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

हल



यहाँ, हमें कुल 8 प्रश्नों को हल करना है यह ध्यान में रखते हुए कि प्रत्येक खंड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन हो, तब निम्नलिखित संभावनाएँ होंगी



अत: चयन के तरीकों की कुल संख्या

$$= ({}^5C_3 \times {}^7C_5) + ({}^5C_4 \times {}^7C_4) + ({}^5C_5 \times {}^7C_3)$$

$$= ({}^5C_2 \times {}^7C_2) + ({}^5C_1 \times {}^7C_3) + ({}^5C_5 \times {}^7C_3) \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \left(\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{7 \times 6}{2}\right) + \left(5 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{6}\right)$$

$$= (10 \times 21) + 175 + 35$$

$$= 210 + 210$$

$$= 420$$

प्रश्न 8. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों के संचय की संख्या निर्धारित कीजिए। यदि 5 पत्तों के प्रत्येक चयन (संचय) में तथ्यत: एक बादशाह है।

हल 4 बादशाह में से 1 बादशाह $^4C_1$ तरीकों से चुना जा सकता है। बचे हुए 48 पत्तों में से शेष 4 पत्तों को $^{48}C_4$ तरीकों से चुना जा सकता है।

अत: गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4$

प्रश्न 9. 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाता है कि महिलाएँ सम स्थानों पर बैठती हैं। इस प्रकार के कितने विन्यास संभव हैं?

हल व्यक्तियों की कुल संख्या = 9

$$\boxed{1} \overset{2}{\times} \boxed{3} \overset{4}{\times} \boxed{5} \overset{6}{\times} \boxed{7} \overset{8}{\times} \boxed{9}$$

चूँकि चार महिलाएँ सम स्थानों पर बैठना चाहती हैं और सम संख्याएँ 4 हैं।

$\therefore$ इन्हें 4! तरीके से बैठाया जा सकता है।

बचे हुए 5 स्थान 5 पुरुषों द्वारा 5! तरीके से भरे जा सकते हैं।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या $= 5! \times 4!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120 \times 24 = 2880$

प्रश्न 10. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा से, 10 का चयन भ्रमण-दल के लिए किया जाता है। 3 विद्यार्थी ऐसे हैं, जिन्होंने यह निर्णय लिया है कि या तो वे तीनों दल में शामिल होंगे या उनमें से कोई भी दल में शामिल नहीं होगा। भ्रमण-दल का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है?

हल यहाँ दो संभावनाएँ हैं

(i) यदि तीनों विद्यार्थी भ्रमण-दल में शामिल होंगे, तब हमें 22 विद्यार्थियों में से 7 विद्यार्थियों का चयन करना होगा।

(ii) यदि सभी तीनों विद्यार्थी भ्रमण-दल में शामिल नहीं होंगे, तब हमें 22 विद्यार्थियों में से 10 विद्यार्थियों का चयन करना होगा।

अतः 22 विद्यार्थियों में से 7 विद्यार्थी ${}^{22}C_7$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

या 22 विद्यार्थियों में से 10 विद्यार्थी ${}^{22}C_{10}$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल तरीकों की संख्या $= {}^{22}C_7 + {}^{22}C_{10}$

प्रश्न 11. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एकसाथ रहें?

हम सभी S को एक अक्षर मान लेंगे तथा बचे हुए अक्षरों को S के साथ व्यवस्थित करेंगे।

हल दिए हुए शब्द A S S A S S I N A T I O N में निम्न अक्षर हैं

A → 3 बार
S → 4 बार
I → 2 बार
T → 1 बार
O → 1 बार
N → 2 बार

यदि सभी S को एकसाथ लें, तब इसे हम एक अक्षर मानेंगे और बचे हुए 9 अक्षर तथा 1S (4S को सम्मिलित करते हुए) मिलकर 10 अक्षर बनेंगे।

अत: कुल तरीकों की संख्या $= \dfrac{10!}{3!\,2!\,2!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$$