

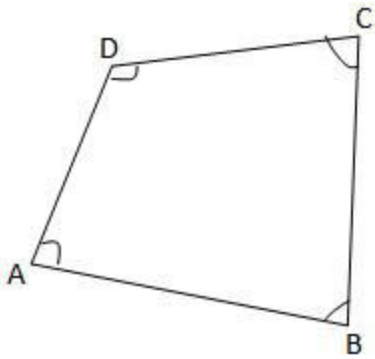
8. चतुर्भुज

प्रश्नावली 8.1

Q1. एक चतुर्भुज के कोण $3 : 5 : 9 : 13$ के अनुपात में हैं | इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए |

Solution:

माना $\angle A = 3x$,



$$\angle B = 5x,$$

$$\angle C = 9x \text{ और}$$

$$\angle D = 13x,$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

(किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है)

$$\Rightarrow 3x + 5x + 9x + 13x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 30x = 360^\circ$$

$$x = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$$

अतः सभी कोण

$$\angle A = 3x = 3 \times 12^\circ = 36^\circ$$

$$\angle B = 5x = 5 \times 12^\circ = 60^\circ$$

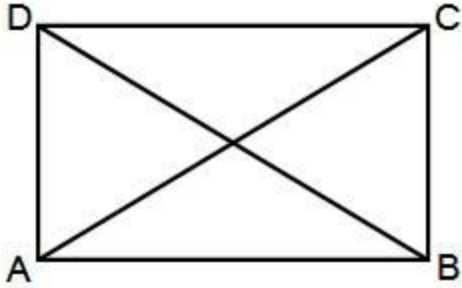
$$\angle C = 9x = 9 \times 12^\circ = 108^\circ$$

$$\angle D = 13x = 13 \times 12^\circ = 156^\circ$$

Q2. यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।

Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।



जिसके विकर्ण $AC = BD$ है।

सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है।

प्रमाण : $\triangle ABD$ तथा $\triangle ABC$ में

$$AD = BC \text{ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)}$$

$$AB = AB \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$BD = AC \text{ (दिया है)}$$

SSS सर्वांगसमता नियम से

नोट: CPCT का पूरा नाम

सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग
बराबर होते हैं।

Corresponding Part of
Congruent Triangles

$$\triangle ABD \cong \triangle ABC$$

$$\therefore \angle A = \angle B \text{ (By CPCT) } \dots\dots (1)$$

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore AD \parallel BC$ और AB एक तिर्यक रेखा है |

अतः $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (अंतः आसन्न कोणों का योग)

$$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180^\circ \text{ ..समीo (1) से}$$

$$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$$

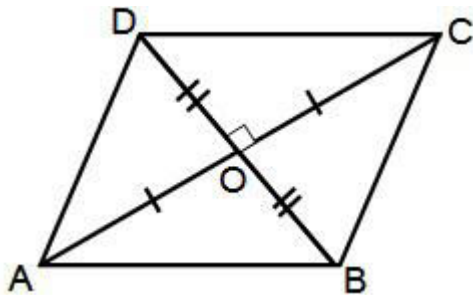
$$\Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

(वह समांतर चतुर्भुज जिसकी एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है)

अतः ABCD एक आयत है | proved

Q3. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।

Solution:



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है |

जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O

पर समद्विभाजित करते हैं | जहाँ $\angle COD = 90^\circ$ है

और $AO = CO$ तथा $BO = DO$ है |

सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है |

नोट: कार्यकारी नियम:

(i) सबसे पहले इसको एक समांतर चतुर्भुज सिद्ध करेंगे फिर इसकी प्रत्येक भुजा को बराबर दिखायेंगे | जब यह समचतुर्भुज सिद्ध हो जायेगा |

ATP Help

प्रमाण : $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$$AO = CO \text{ (दिया है)}$$

$$BO = DO \text{ (दिया है)}$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ (शिर्षाभिमुख कोण)}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AB = CD \text{ (By CPCT) } \dots\dots (1)$$

तथा $\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण) (By CPCT)

$$\therefore AB \parallel CD \dots\dots (2) \text{ (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)}$$

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।)

$$\therefore AD = BC \dots\dots (3) \text{ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)}$$

अब $\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में

$$AO = CO \text{ (दिया है)}$$

$$DO = DO \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\angle AOD = \angle COD \text{ (90}^\circ \text{ प्रत्येक)}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOD \cong \triangle COD$$

$$\therefore AD = CD \text{ (By CPCT) (4)}$$

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं |

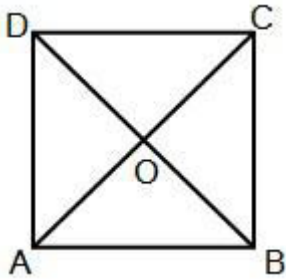
$$AB = BC = CD = AD$$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है | **(Proved)**

(वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर हो समचतुर्भुज होता है |)

Q4. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं |

Solution:



दिया है : ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक

दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है :

(i) $AO = CO$ तथा $BO = DO$

(ii) $\angle AOB = 90^\circ$

प्रमाण : $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$$AB = CD \text{ (वर्ग की भुजा)}$$

$$\angle BAO = \angle DCO \text{ (एकांतर कोण)}$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ (शिर्षाभिमुख कोण)}$$

अतः ASA सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AO = CO \text{ तथा } BO = DO \text{ (By CPCT) (1)}$$

पुनः $\triangle AOB$ तथा $\triangle BOC$ में

$$AB = BC \text{ (वर्ग की भुजा)}$$

$$BO = BO \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$AO = CO \text{ समी० (1) से}$$

अतः SSS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOB \cong \triangle BOC$$

$$\text{अतः } \angle AOB = \angle COB \text{ (By CPCT) (2)}$$

$$\text{अब } \angle AOB + \angle COB = 180^\circ \text{ (रैखिक युग्म)}$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle AOB = 180^\circ \text{ समी० (2) से}$$

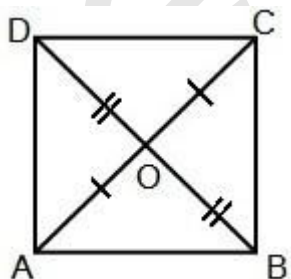
$$\Rightarrow 2\angle AOB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

Proved

Q5. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो और परस्पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है।

Solution:



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण $AC = BD$ है और एक

दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। जहाँ $AO = CO$ तथा $BO = DO$ है।

सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है |

प्रमाण : $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$$AO = CO \text{ (दिया है)}$$

$$BO = DO \text{ (दिया है)}$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ (शिर्षाभिमुख कोण)}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AB = CD \text{ (By CPCT) } \dots\dots (1)$$

तथा $\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण) (By CPCT)

$$\therefore AB \parallel CD \dots\dots (2) \text{ (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)}$$

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।)

$$\therefore AD = BC \dots\dots (3) \text{ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)}$$

अब $\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में

$$AO = CO \text{ (दिया है)}$$

$$DO = DO \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\angle AOD = \angle COD \text{ (90° प्रत्येक)}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOD \cong \triangle COD$$

$$\therefore AD = CD \text{ (By CPCT) } \dots\dots (4)$$

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं |

$$AB = BC = CD = AD \dots\dots (5)$$

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle ABC$ में

$$AD = BC \text{ (वर्ग की सम्मुख भुजा)}$$

$$AB = AB \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$BD = AC \text{ (दिया है)}$$

SSS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABD \cong \triangle ABC$$

$$\therefore \angle A = \angle B \text{ (By CPCT) (6)}$$

चूँकि ABCD एक वर्ग है |

$\therefore AD \parallel BC$ और AB एक तिर्यक रेखा है |

अतः $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (अंतः आसन्न कोणों का योग)

$$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180^\circ \text{ ..समी० (6) से}$$

$$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 90^\circ \text{ (7)}$$

समी० (5) तथा (7) से स्पष्ट है कि

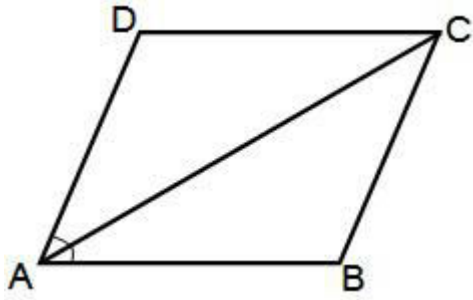
ABCD एक वर्ग है | Proved

Q6. समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है | दर्शाइए कि

(i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है |

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है |

Solution:



दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है :

- (i) AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।
- (ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रमाण:

(i)

ΔABC तथा ΔDAC में,

$\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है)

$\angle B = \angle D$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

अतः ASA सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DAC$

$\therefore \angle BCA = \angle DCA$ (By CPCT)

अतः विकर्ण AC, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

(ii)

पुनः $AB = AD$ (By CPCT) (1)

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)(2)

और

$$BC = AD \text{ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)(3)}$$

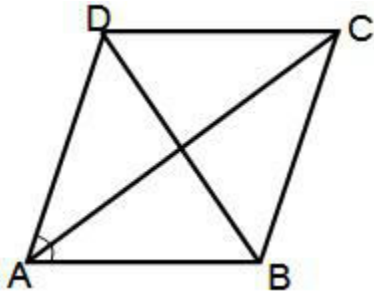
समीकरण (1), (2) तथा (3) से

$$AB = BC = CD = AD$$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है | (Proved)

Q7. ABCD एक समचतुर्भुज है | दर्शाइए कि AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD कोणों B तथा D दोनों को समद्विभाजित करता है |

Solution:



दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज चतुर्भुज है |

सिद्ध करना है :

(i) AC, $\angle A$ तथा $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है |

(ii) BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ को भी समद्विभाजित करता है |

प्रमाण:

(i)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle ADC$ में,

$$AB = AD \text{ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)}$$

$$\angle B = \angle D \text{ (समचतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)}$$

$$AC = AC \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC \quad (\text{By CPCT}) \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \angle BCA = \angle DCA \quad (\text{By CPCT}) \dots\dots\dots (2)$$

समी० (1) तथा (2) से

विकर्ण AC, $\angle A$ तथा $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

इसी प्रकार हम

(ii) BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ को भी समद्विभाजित करता है।

को भी सिद्ध कर सकते हैं।

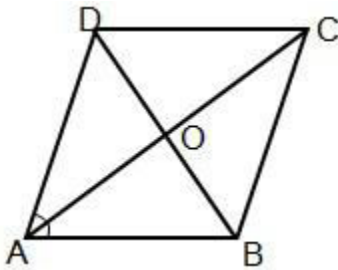
Q8. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि:

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है।

Solution:

दिया है: ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है।



सिद्ध करना है :

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:

(i) चूँकि ABCD एक आयत है।

$$\therefore AB = CD \dots\dots\dots (1) \text{ आयत की सम्मुख भुजा}$$

$$\text{और } AD = BC \dots\dots\dots (2) \text{ आयत की सम्मुख भुजा}$$

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle ACD$ में,

$\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है) चूँकि AC कोण A और C को समद्विभाजित करता है।

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90°) आयत के कोण

A.A.S सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$

$\therefore AB = AD$ (3) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

समीकरण (1), (2) और (3) से

$AB = BC = CD = AD$

चूँकि ABCD एक आयत है और इसकी प्रत्येक भुजा बराबर भी है।

अतः ABCD एक वर्ग है | **Proved**

(ii) $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBD$ में,

$AB = BC$ (वर्ग की भुजा)

$BD = BD$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°) वर्ग के कोण

S.A.S सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$

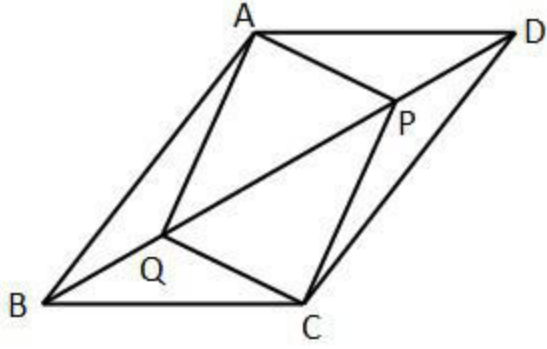
$\therefore \angle ABD = \angle CBD$

और $\angle ADB = \angle CDB$

(By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

$\triangle \angle$

Q9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है। दर्शाए कि



(i) $\triangle APD \cong \triangle CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\triangle AQB \cong \triangle CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है ।

Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और $DP = BQ$ है ।

सिद्ध करना है :

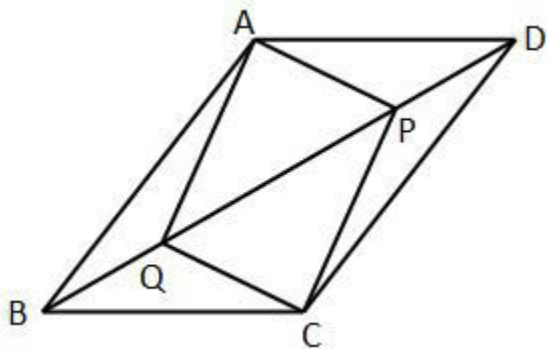
(i) $\triangle APD \cong \triangle CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\triangle AQB \cong \triangle CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है ।



प्रणाम :

(i) $\triangle APD$ तथा $\triangle CQB$ में

$AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

$DP = BQ$ (दिया है)

$\angle ADP = \angle CBQ$ (एकांतर अतः कोण)

अतः S.A.S सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle APD \cong \triangle CQB$

(i) अतः $AP = CQ$ (1) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

(iii) $\triangle AQB$ तथा $\triangle CPD$ में

$AB = DC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

$BQ = DP$ (दिया है)

$\angle ABQ = \angle CDP$ (एकांतर अतः कोण)

अतः S.A.S सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle AQB \cong \triangle CPD$

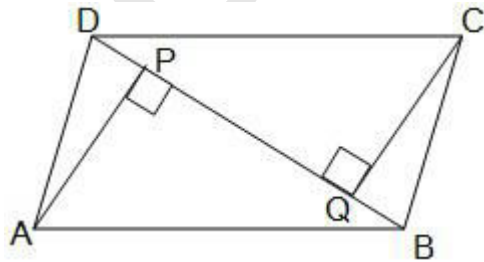
(iv) अतः $AQ = CP$ (2) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

(v) समी० (1) तथा (2) से

$APCQ$ एक समांतर चतुर्भुज है।

Q10. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AP और CQ

शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं।



दर्शाए कि

(i) $\triangle APB \cong \triangle CQD$

(ii) $AP = CQ$

Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AP और CQ

शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle APB \cong \triangle CQD$

(ii) $AP = CQ$

प्रमाण:

(i) $\triangle APB$ तथा $\triangle CQD$ में,

$AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

$\angle ABP = \angle CDQ$ (एकांतर अतः कोण)

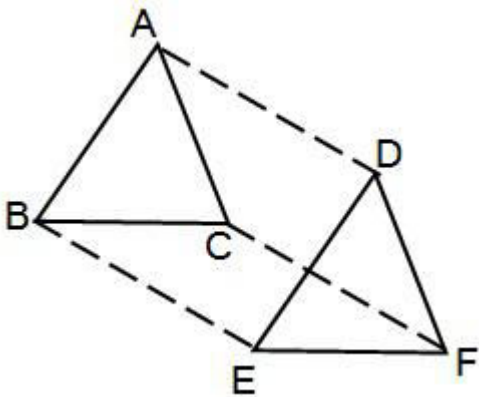
$\angle APB = \angle CQD$ (प्रत्येक 90°)

अतः, ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle APB \cong \triangle CQD$

(ii) इसलिए, $AP = CQ$ (By CPCT / सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

Q11. $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में, $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ और $BC \parallel EF$ है | शीर्षों A, B और C को क्रमशः शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है | दर्शाइए कि



(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है।

(iv) चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) $AC = DF$ है।

(vi) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ है।

Solution:

दिया है : $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में, $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ और $BC \parallel EF$ है।

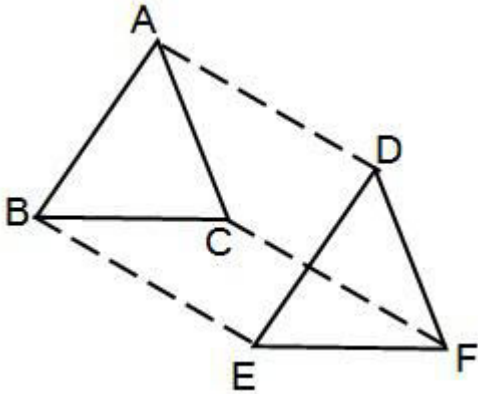
सिद्ध करना है :

(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है।

(iv) चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।



(v) $AC = DF$ है।

(vi) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ है।

प्रमाण:

(i) चतुर्भुज ABED में

$AB = DE$ और $AB \parallel DE$ दिया है।

\therefore चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है)

अब, चूँकि ABED एक समांतर चतुर्भुज है |

∴ AD = BE और AD || BE(1)

(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर और समांतर होती है)

(ii) इसीप्रकार से, चतुर्भुज BEFC में

BC = EF और BC || EF दिया है |

∴ चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है |

अतः CF = BE और CF || BE (2) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख)

(iii) समीo (1) तथा (2) से

AD || CF और AD = CF है |

(चूँकि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

∴ चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है |

इसलिए, AC = DF और AC || DF (3)

(vi) ΔABC और ΔDEF में,

AB = DE (दिया है)

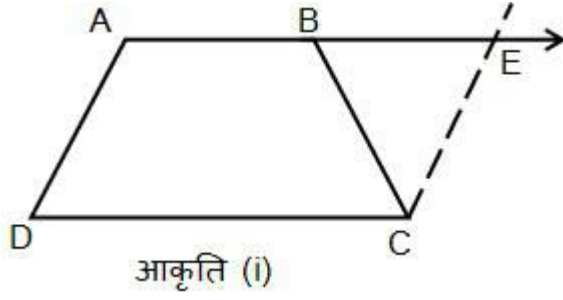
BC = EF (दिया है)

AC = DF (समीo 3 से)

S.S.S सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ **Proved**

Q12. ABCD एक समलम्ब है, जिसमें AB || DC और AD = BC है | दर्शाइए कि

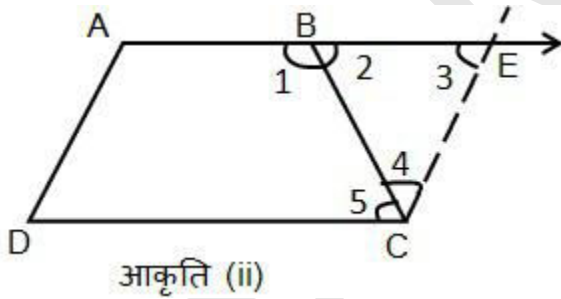


- (i) $\angle A = \angle B$
- (ii) $\angle C = \angle D$
- (iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$
- (iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD है |

Solution:

दिया है : ABCD एक समलम्ब है,
जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है |

सिद्ध करना है :



- (i) $\angle A = \angle B$
- (ii) $\angle C = \angle D$
- (iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$
- (iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD है |

रचना : AD के समांतर CE खिंचा |

प्रमाण: $AB \parallel DC$ (1) दिया है |

$AD \parallel CE$ (2) रचना से

[चूँकि सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समांतर हो तो वो समांतर चतुर्भुज होता है]]

समीकरण (1) तथा (2) से

AECD एक समांतर चतुर्भुज है |

∴ AD = CE (3) [समांतर चतुर्भुज AECD की सम्मुख भुजा]

जबकि, AD = BC (4) दिया है |

समी० (3) तथा (4) से

$$BC = CE$$

∴ $\angle 2 = \angle 3$ (5) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ...)

AB || CD दिया है और BC एक तिर्यक रेखा है |

∴ $\angle 2 = \angle 5$ (6) [अंतः एकांतर कोण]

समी० (5) तथा (6) से हमें प्राप्त होता है |

$$\angle 3 = \angle 5$$
 (7)

अब DBEC में,

बहिष्कोण $\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$

या $\angle 1 = \angle 5 + \angle 4$ समी० (7) से

या $\angle B = \angle ECD$ (8)

चूँकि, AECD एक समांतर चतुर्भुज है |

∴ $\angle A = \angle ECD$ (9) [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

समी० (8) और (9) से

$$\angle A = \angle B$$
(10) Proved (i)

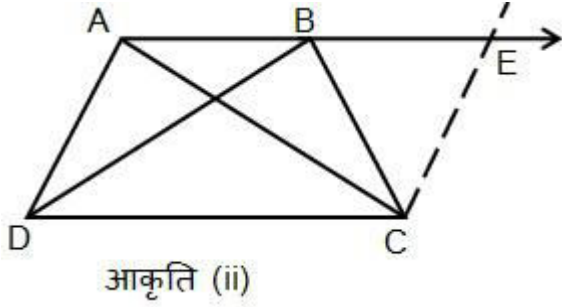
(ii) पुनः, $\angle D = \angle E$ [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

या $\angle D = \angle 3$ (11)

समी० (7) और (11) से

$$\angle D = \angle 5$$

या $\angle D = \angle C$ proved(ii)



(iii) $\triangle ABC$ और $\triangle BAD$ में

$$AD = BC \text{ (दिया है)}$$

$$AB = AB \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\angle A = \angle B \text{ समी० (10) से}$$

अतः SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD$$

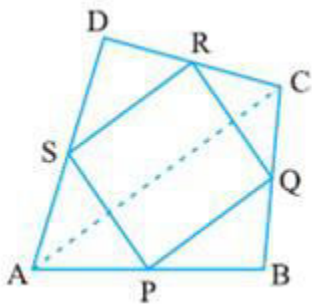
(iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

☆ - The End -☆

Exercise 8.2

Q1. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के

मध्य-बिंदु हैं | AC उसका एक विकर्ण है | दर्शाइए कि



(i) $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ है ।

(ii) $PQ = SR$ है ।

(iii) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है ।

हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं।

सिद्ध करना है :

(i) $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ है ।

(ii) $PQ = SR$ है ।

(iii) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है ।

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है | (दिया है)

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$\text{इसलिए, } SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (i)$$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | (दिया है)

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

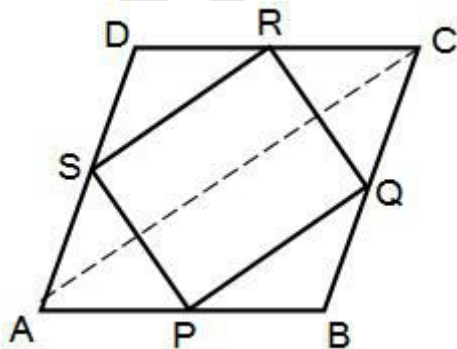
$$SR \parallel PQ \text{ और } SR = PQ$$

अर्थात् $PQ = SR$

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |

Q2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।



हल :

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S

क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है।

सिद्ध करना है :

PQRS एक आयत है।

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है। (दिया है)

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$\text{इसलिए, } SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (i)$$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है। (दिया है)

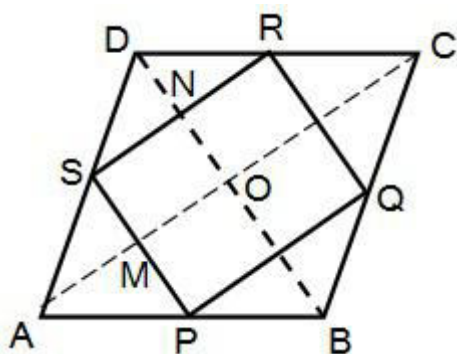
इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$SR \parallel PQ \text{ और } SR = PQ$$

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .



इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

चूँकि ABCD एक समचतुर्भुज है।

इसलिए, $\angle AOD = 90^\circ$

या $\angle MON = 90^\circ$

(समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं !)

अब $SR \parallel AC$ और $SP \parallel BD$ है

तो SMON भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए $\angle MSN = \angle MON = 90^\circ$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

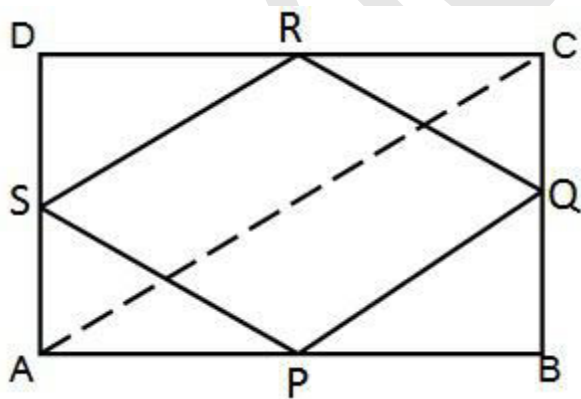
या $\angle PSR = 90^\circ$

अतः PQRS एक आयत है | **Proved**

Q3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं | दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

हल :

दिया है : ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं।



सिद्ध करना है :

PQRS एक समचतुर्भुज है।

रचना : A को C से मिलाया।

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है | (दिया है)

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$\text{इसलिए, } SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (i)$$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | (दिया है)

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

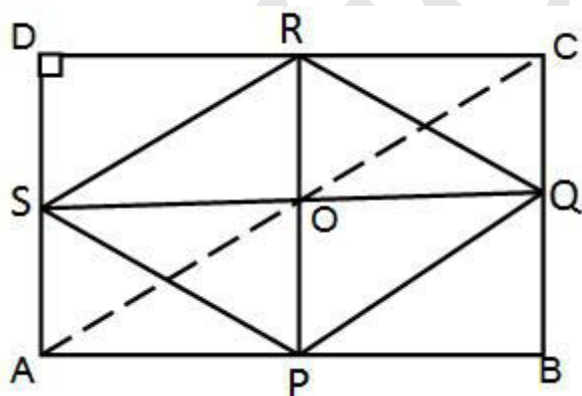
$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2} AC \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$SR \parallel PQ \text{ और } SR = PQ$$

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |



अब, चूँकि ABCD एक आयत है |

इसलिए , $AB \parallel CD$ या $SQ \parallel CD$... (i)

(क्योंकि S तथा Q AD तथा BC के मध्य-बिंदु है |)

इसीप्रकार $AD \parallel PR$ (ii)

अतः समीकरण (i) तथा (ii) से

DSOR एक समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए, $\angle SOR = \angle D$ (समान्तर चतुर्भुज कि सम्मुख भुजा)

जबकि, $\angle D = 90^\circ$ (आयत का प्रत्येक कोण)

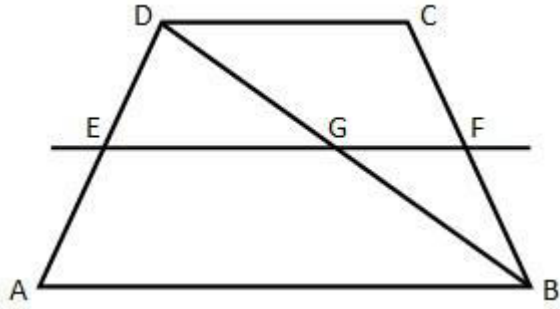
इसलिए $\angle SOR = 90^\circ$

चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः PQRS एक समचतुर्भुज है।

(वह समांतर चतुर्भुज जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं समचतुर्भुज कहलाता है।)

Q4. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



हल :

दिया है : ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है।

साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है : $CF = BF$

रचना : D को B से मिलाया जो EF को G पर प्रतिच्छेद करता है।

प्रमाण :

DABD में,

$AB \parallel EF$ (i) (दिया है)

और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है।

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

इसलिए बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है। (i)

अब $AB \parallel CD$ (ii) (दिया है)

समीकरण (i) तथा (ii) से

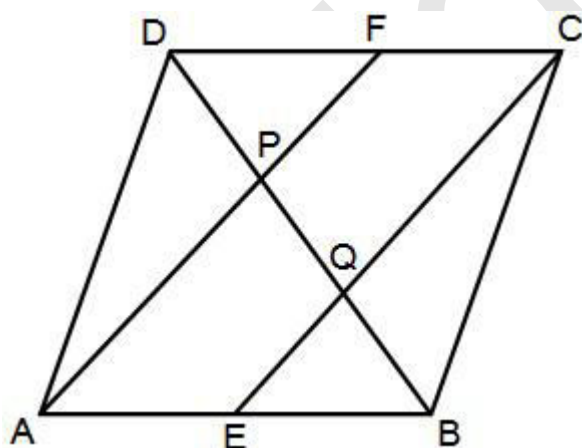
$CD \parallel EF$ और बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है [समीकरण (i) से]

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से DBCD में

F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।

इसलिए $CF = BF$ proved

Q5. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समद्विभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F

क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं।

सिद्ध करना है : $DP = PQ = QB$

प्रमाण :

DABP में,

E भुजा AB का मध्य-बिंदु है और $AF \parallel EC$ दिया है।

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

Q भुजा PB का मध्य-बिंदु है।

अतः $PQ = QB$ (i)

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अब, DCDQ में,

F भुजा CD का मध्य-बिंदु है और $AF \parallel EC$ दिया है।

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

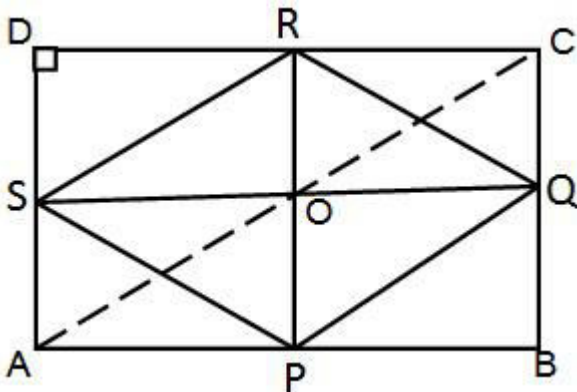
P भुजा DQ का मध्य-बिंदु है।

इसलिए, $DP = PQ$ (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$DP = PQ = QB$ **Proved**

Q6. दर्शाइए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसके भुजाएँ

AB, BC, CD और DA का मध्य-बिंदु क्रमशः

P, Q, R और S है।

सिद्ध करना है : विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।

रचना : P, Q, R और S को मिलाया और A को C से मिलाया।

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है। (दिया है)

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए, $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ (i)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है। (दिया है)

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

$PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2} AC$ (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$SR \parallel PQ$ और $SR = PQ$

अर्थात् $PQ = SR$

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तो इसके विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।

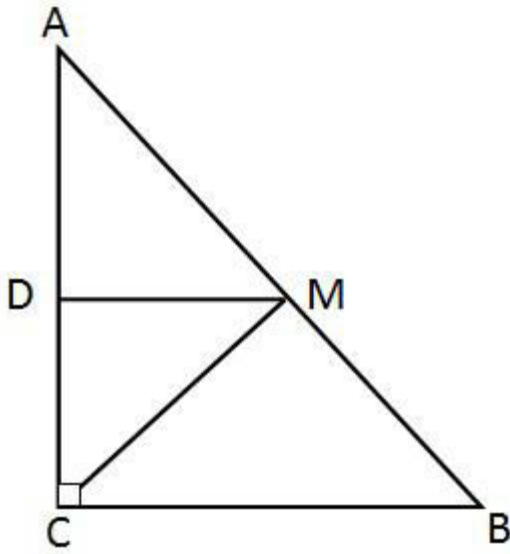
(समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

Q7. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

(ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है।



हल :

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है :

(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

(ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है।

प्रमाण : (i) DABC में

M भुजा AB का मध्य-बिंदु है और $MD \parallel BC$ है |

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

इसलिए, D भुजा AC का मध्य-बिंदु है |

अतः $AD = CD$ (i)

(ii) $MD \parallel BC$ दिया है और AC एक तिर्यक रेखा है |

eVidyaVartni

इसलिए $\angle ADM = \angle ACB$ (संगत कोण)

या $\angle ADM =$ [चूँकि $\angle ACB = 90^\circ$]

अतः $MD \perp AC$ है ।

(iii) $\triangle ADM$ तथा $\triangle CDM$ में

$AD = CD$ समी० (i) से

$MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADM = \angle CDM$ (प्रत्येक 90°)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ADM \cong \triangle CDM$$

इसलिए, $MA = CM$ (ii) By CPCT नियम से

अब $MA + MB = AB$

या $MA + MA = AB$ [चूँकि $MA = MB$]

या $2 MA = AB$

या $MA = \frac{1}{2} AB$

या $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ समी० (ii) से