अध्याय 8
द्विपद प्रमेय
Binomial Theorem

प्रश्नावली 8.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिए।

(प्र.सं. 1 - 5) दिए गए व्यंजक का प्रसार करने के लिए

$$(x+y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}^nC_n y^n$$

तथा $$(x-y)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - \dots + (-1)^n \, {}^nC_n y^n$$

तथा परिणामों

$${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = n, {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}, {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ आदि}$$

का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 1. $(1-2x)^5$

हल $$(1-2x)^5 = {}^5C_0 (1)^5 - {}^5C_1 (1)^4 \, 2x + {}^5C_2 (1)^3 (2x)^2 - {}^5C_3 (1)^2 (2x)^3 + {}^5C_4 (1)(2x)^4 - {}^5C_5 (2x)^5$$

$$= {}^5C_0 - {}^5C_1 \, 2x + {}^5C_2 \, 4x^2 - {}^5C_2 \, 8x^3 + {}^5C_1 \, 16x^4 - {}^5C_0 \, 32x^5 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 1 - 5 \times 2x + \frac{5 \times 4}{2} \times 4x^2 - \frac{5 \times 4}{2} \times 8x^3 + 5 \times 16 \times x^4 - 32x^5$$

$$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$$

प्रश्न 2. $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$

हल $$\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5 = {}^5C_0 \left(\frac{2}{x}\right)^5 - {}^5C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 \frac{x}{2} + {}^5C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \left(\frac{x}{2}\right)^2 - {}^5C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^4 - {}^5C_5 \left(\frac{x}{2}\right)^5$$

$$= {}^5C_0 \frac{32}{x^5} - {}^5C_1 \frac{16}{x^4} \times \frac{x}{2} + {}^5C_2 \frac{8}{x^3} \times \frac{x^2}{4} - {}^5C_2 \frac{4}{x^2} \times \frac{x^3}{8} + {}^5C_1 \frac{2}{x} \times \frac{x^4}{16} - {}^5C_0 \frac{x^5}{32} \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{32}{x^5} - \frac{5 \times 16 \times x}{2x^4} + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{8}{x^3} \times \frac{x^2}{4} - \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4}{x^2} \times \frac{x^3}{8}$$

$$+ 5 \times \frac{2}{x} \times \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32}$$

$$= \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5x^3}{8} - \frac{x^5}{32}$$

प्रश्न 3. $(2x-3)^6$

हल $(2x-3)^6 = {}^6C_0\,(2x)^6 - {}^6C_1 (2x)^5 \times 3 + {}^6C_2\,(2x)^4\,(3)^2 - {}^6C_3\,(2x)^3\,(3)^3$

$$+ {}^6C_4 (2x)^2\,(3)^4 - {}^6C_5 (2x)\,3^5 + {}^6C_6\,3^6$$

$$= {}^6C_0\,64x^6 - {}^6C_1\,32x^5 \times 3 + {}^6C_2\,16x^4 \times 9 - {}^6C_3\,8x^3 \times 27$$

$$+ {}^6C_2\,4x^2 \times 81 - {}^6C_1\,2x \times 243 + {}^6C_0\,729 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 64x^6 - 6 \times 32 \times 3 \times x^5 + \frac{6 \times 5}{2} \times 16x^4 \times 9 - \frac{6 \times 5 \times 4 \times 8x^3 \times 27}{6}$$

$$+ \frac{6 \times 5}{2} \times 4x^2 \times 81 - 6 \times 2x \times 243 + 729$$

$$= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$$

प्रश्न 4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

हल $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5 = {}^5C_0 \left(\frac{x}{3}\right)^5 + {}^5C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^5C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$$+ {}^5C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^5C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= {}^5C_0\,\frac{x^5}{243} + {}^5C_1\,\frac{x^4}{81} \times \frac{1}{x} + {}^5C_2 \times \frac{x^3}{27} \times \frac{1}{x^2} + {}^5C_2\,\frac{x^2}{9} \times \frac{1}{x^3}$$

$$+ {}^5C_1\,\frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + {}^5C_0 \times \frac{1}{x^5} \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{x^5}{243} + \frac{5}{81} \times x^3 + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{1}{27} \times x + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{x} + 5 \times \frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$$

$$= \frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10x}{27} + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5}$$

प्रश्न 5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

हल $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = {}^6C_0\,x^6 + {}^6C_1\,x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^6C_2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6C_3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3$

$$+ {}^6C_4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= {}^6C_0\, x^6 + {}^6C_1 x^4 + {}^6C_2\, \frac{x^4}{x^2} + {}^6C_3\, x^3 \times \frac{1}{x^3}$$

$$+ {}^6C_2\, x^2 \times \frac{1}{x^4} + {}^6C_1\, x \times \frac{1}{x^5} + {}^6C_0\, \frac{1}{x^6} \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= x^6 + 6x^4 + \frac{6 \times 5}{2} x^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times 1 + \frac{6 \times 5}{2} \frac{1}{x^2} + 6 \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 6 - 9) किसी संख्या की घात का मान द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके ज्ञात करने के लिए, हम नंबर (संख्या) को दो भागों में इस प्रकार से तोड़ते हैं, जैसे $96 = 100 - 4$, $102 = 100 + 2$, $101 = 100 + 1$ तथा $99 = 100 - 1$, कि हम इसमें द्विपद प्रमेय लागू कर सकें। तत्पश्चात् $(x + y)^n$ तथा $(x - y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 6. $(96)^3$

हल $(96)^3 = (100 - 4)^3 = {}^3C_0\, (100)^3 - {}^3C_1 (100)^2 4 + {}^3C_2 (100)(4)^2 - {}^3C_3\, (4)^3$

$$= {}^3C_0 (10^6) - {}^3C_1 (10)^4 \times 4 + {}^3C_1\, (10^2) \times 16 - {}^3C_0\, 64 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 10^6 - 3 \times 10^4 \times 4 + 3 \times 10^2 \times 16 - 64$$

$$= 10^6 - 12 \times 10^4 + 48 \times 10^2 - 64 = (10^6 + 48 \times 10^2) - (12 \times 10^4 + 64)$$

$$= (10^6 + 4800) - (120000 + 64) = 1004800 - 120064 = 884736$$

> *नोट जब भी किसी दी हुई संख्या को हल करने के लिए द्विपद प्रमेय को लागू करते हैं, तब हम संख्या को दो भागों में इस प्रकार विभक्त करते हैं कि उनमें से एक 10 का गुणक हो, जिससे गणना आसान हो जाती है।*

प्रश्न 7. $(102)^5$

हल $(102)^5 = (100 + 2)^5$

$$= {}^5C_0\, (100)^5 + {}^5C_1\, (100)^4 (2)^1 + {}^5C_2\, (100)^3\, (2)^2$$

$$+ {}^5C_3\, (100)^2\, (2)^3 + {}^5C_4\, (100)\, (2)^4 + {}^5C_5\, (2)^5$$

$$= {}^5C_0 (10)^{10} + {}^5C_1 (10^8) 2 + {}^5C_2 (10^6) \times 4 + {}^5C_2\, (10^4) \times 8$$

$$+ {}^5C_1\, (10)^2 \times 16 + {}^5C_0 \times 32 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 1 \times 10^{10} + 5 \times 10^8 \times 2 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^6 \times 4 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^4 \times 8$$

$$+ 5 \times 100 \times 16 + 32$$

$$= 10000000000 + 1000000000 + 40000000 + 800000 + 8000 + 32$$

$$= 11040808032$$

प्रश्न 8. $(101)^4$

हल $(101)^4 = (100+1)^4 = {}^4C_0\,(100)^4 + {}^4C_1(100)^3\,(1) + {}^4C_2(100)^2\cdot(1)^2$
$+\ {}^4C_3 100\cdot(1)^3 + {}^4C_4\cdot(1)^4$

$= {}^4C_0\,10^8 + {}^4C_1 10^6 + {}^4C_2\,10^4 + {}^4C_1\,(10)^2 + {}^4C_0 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= 10^8 + 4\times 10^6 + \dfrac{4\times 3}{2}\times 10^4 + 4\times 10^2 + 1$

$= 100000000 + 4000000 + 60000 + 400 + 1 = 104060401$

प्रश्न 9. $(99)^5$

हल $(99)^5 = (100-1)^5 = {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4\times 1 + {}^5C_2\,(100)^3\times(1)^2$
$-\ {}^5C_3\,(100)^2\times 1^3 + {}^5C_4 100\times 1^4 - {}^5C_5\times 1^5$

$= {}^5C_0\,(10)^{10} - {}^5C_1(10)^8 + {}^5C_2(10)^6 - {}^5C_2(10)^4 + {}^5C_1\times(10)^2 - {}^5C_0$
$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= 10000000000 - 5\times 100000000$
$+\ \dfrac{5\times 4}{2}\times 1000000 - \dfrac{5\times 4}{2}\times 10000 + 5\times 100 - 1$

$= (10000000000 + 10000000 + 500) - (500000000 + 100000 + 1)$

$= 10010000500 - 500100001 = 9509900499$

प्रश्न 10. **द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है**

$(1.1)^{10000}$ **या 1000 ?**

$(1.1)^{10000}$ में द्विपद प्रमेय का प्रयोग करेंगे अर्थात् संख्या (1.1) को (1 + 0.1) में विभक्त करेंगे।

हल $(1.1)^{10000} = (1+0.1)^{10000}$

$= {}^{10000}C_0\,(1)^{10000} + {}^{10000}C_1\,(1)^{9999}(0.1) + \ldots +$ अन्य पद

$= 1\times 1 + 10000\times 0.1 + \ldots +$ अन्य पद $\qquad (\because {}^nC_0 = 1, {}^nC_1 = n)$

$= 1 + 1000 +$ अन्य पद

$= (1001 +$ अन्य पद$) > 1000 \Rightarrow (1.1)^{10000} > 1000$

प्रश्न 11. $(a+b)^4 - (a-b)^4$ **का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

(प्र. सं. 11 - 12)

प्रसार $(x+y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1}y^n + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_n y^n$.

तथा $(x-y)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1}y^n + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 - \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n y^n$

का प्रयोग करके सरल करेंगे।

हल अब, $(a+b)^4 = {}^4C_0\, a^4 + {}^4C_1\, a^3b + {}^4C_2\, a^2b^2 + {}^4C_3\, ab^3 + {}^4C_4\, b^4$

$$= {}^4C_0a^4 + {}^4C_1\, a^3b + {}^4C_2a^2b^2 + {}^4C_1ab^3 + {}^4C_0\, b^4 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 1\times a^4 + 4\,a^3b + \frac{4\times 3}{2}a^2b^2 + 4ab^3 + 1\times b^4$$

$\Rightarrow$ $$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad \text{...(i)}$$

इसी प्रकार, $$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad \text{...(ii)}$$

समी (ii) से समी (i) को घटाने पर,

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8\,ab\,(a^2+b^2)$$

अब, $a=\sqrt{3}$ तथा $b=\sqrt{2}$ रखने पर,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}\,\sqrt{2}\,[(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2]$$

$$= 8\sqrt{6}\,(3+2) = 8\sqrt{6}\times 5 = 40\sqrt{6}$$

प्रश्न 12. $(x+1)^6 + (x-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल अब, $(x+1)^6 = {}^6C_0\, x^6 + {}^6C_1x^5\times 1 + {}^6C_2x^4\times (1)^2$

$$+ {}^6C_3\, x^3\times (1)^3 + {}^6C_4x^2\times (1)^4 + {}^6C_5\, x\times (1)^5 + {}^6C_6(1)^6$$

$\Rightarrow$ $$(x+1)^6 = {}^6C_0\, x^6 + {}^6C_1x^5 + {}^6C_2x^4 + {}^6C_3\, x^3 + {}^6C_2x^2 + {}^6C_1x + {}^6C_0$$

$$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$\Rightarrow$ $$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + \frac{6\times 5}{2}x^4 + \frac{6\times 5\times 4}{6}x^3 + \frac{6\times 5}{2}x^2 + 6x + 1$$

$\Rightarrow$ $$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \quad \text{...(i)}$$

इसी प्रकार, $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ ...(ii)

अब, समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$$

अब, $x=\sqrt{2}$ रखने पर

$\Rightarrow$ $$(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6 = 2[(\sqrt{2})^6 + 15(\sqrt{2})^4 + 15(\sqrt{2})^2 + 1]$$

$$= 2\,(2^3 + 15\times 2^2 + 15\times 2 + 1)$$

$$= 2\,(8 + 15\times 4 + 30 + 1) = 2\,(8 + 60 + 30 + 1)$$

$$= 2\,(99) = 198$$

प्रश्न 13. दिखाइए कि $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 से विभाज्य है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

यहाँ, 9^{n+1} को $9^n\times 9$ लिख सकते हैं तथा 9^n को $(1+8)^n$ लिख सकते हैं, तत्पश्चात् $(x+y)^n$ का प्रसार उपयोग करेंगे।

हल $9^{n+1} - 8n - 9 = 9^n\times 9 - 8n - 9$

$$= (1+8)^n\times 9 - 8n - 9$$

$$= ({}^nC_0 + {}^nC_1 8 + {}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \ldots + {}^nC_n 8^n)\,9 - 8n - 9$$

$= (1 + 8n + {}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \dots + {}^nC_n 8^n)\, 9 - 8n - 9$

$= 9 + 72n + ({}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \dots + {}^nC_n 8^n)\, 9 - 8n - 9$

$= (72n - 8n) + 8^2\, ({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \dots + {}^nC_n 8^{n-2})\, 9$

$= 64n + 64\, ({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \dots + {}^nC_n 8^{n-2})\, 9$

$= 64\, [n + ({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \dots + {}^nC_n 8^{n-2})\, 9]$

$= 64 \times$ कुछ अचर संख्याएँ $= 64$ से भाज्य संख्या

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r = 4^n$

यहाँ $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \dots + {}^nC_n x^n \qquad \dots (i)$

का प्रयोग करेंगे।

हल $\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \times 3^r = {}^nC_0 3^0 + {}^nC_1\, 3 + {}^nC_2 3^2 + {}^nC_3 3^3 + \dots + {}^nC_n 3^n$

$= {}^nC_0 + {}^nC_1 3 + {}^nC_2\, 3^2 + {}^nC_3\, 3^3 + \dots + {}^nC_n 3^n$

$= (1 + 3)^n = 4^n$

प्रश्नावली 8.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 2) निम्नलिखित प्रसार में गुणांक ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 2) इस प्रकार के प्रश्नों में सबसे पहले सूत्र $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} y^r$ का प्रयोग करके $(x + y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद प्राप्त करते हैं। तत्पश्चात् x की जिस घात का गुणांक ज्ञात करना होता है उसे प्राप्त करने के लिए x की घात को $n - r$ के बराबर रख देते हैं।

प्रश्न 1. $(x + 3)^8$ में x^5 का गुणांक

हल $(x + 3)^8$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r = {}^8C_r\, x^{8-r}\, 3^r \qquad (\because n = 8,\ y = 3)$$

x^5 के गुणांक के लिए, $8 - r = 5$ रखने पर

$\Rightarrow \quad r = 8 - 5 = 3$

$\therefore \quad T_{3+1} = {}^8C_3 x^{8-3}\, 3^3 = {}^8C_3 \times 3^3\, x^5$

अतः $\quad x^5$ का गुणांक $= {}^8C_3 \times 3^3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{6} \times 27 = 56 \times 27 = 1512$

प्रश्न 2. $(a - 2b)^{12}$ में $a^5 b^7$ का गुणांक

हल $(a - 2b)^{12}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\, (a)^{12-r}\, (-2b)^r = {}^{12}C_r\, a^{12-r}\, (-2)^r\, b^r$$

$\Rightarrow \quad T_{r+1} = {}^{12}C_r\, a^{12-r}\, b^r (-2)^r$

a^5b^7 के गुणांक के लिए, $12 - r = 5 \quad \Rightarrow \quad r = 7$

$\therefore \quad T_{7+1} = {}^{12}C_7\, a^{12-7}\, b^7 (-2)^7$

$\Rightarrow \quad T_8 = {}^{12}C_5\, a^5b^7 (-2)^7 \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

अतः $\quad a^5b^7$ का गुणांक $= {}^{12}C_5(-2)^7$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}(-2)^7$$

$$= -11 \times 9 \times 8 \times 32 \times 4$$

$$= -101376$$

निर्देश (प्र. सं. 3-4) निम्नलिखित प्रश्नों के प्रसार में व्यापक पद लिखिए।

प्रश्न 3. $(x^2 - y)^6$

हल $(X - Y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, X^{n-r} (-Y)^r$$

यहाँ, $X = x^2$, $Y = y$ तथा $n = 6$

$\therefore (x^2 - y)^6$ का व्यापक पद,

$$T_{r+1} = {}^6C_r\, (x^2)^{6-r} (-y)^r = {}^6C_r\, x^{12-2r} (-1)^r y^r$$

$$= {}^6C_r\, x^{12-2r}\, y^r (-1)^r$$

प्रश्न 4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

हल $(X - Y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, X^{n-r} (-Y)^r$$

यहाँ, $X = x^2$, $Y = yx$ तथा $n = 12$

$\therefore (x^2 - yx)^{12}$ का व्यापक पद,

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\, (x^2)^{12-r} (-yx)^r$$

$$= {}^{12}C_r\, x^{24-2r} (-1)^r\, y^r\, x^r$$

$$= {}^{12}C_r\, (-1)^r\, x^{24-2r+r}\, y^r = {}^{12}C_r (-1)^r\, x^{24-r}\, y^r$$

प्रश्न 5. $(x - 2y)^{12}$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम $(x + y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} y^r$$

को ज्ञात करेंगे। तत्पश्चात् हम आवश्यक पद को ज्ञात करेंगे।

हल $(X + Y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, X^{n-r}\, Y^r$$

यहाँ, $X = x$, $Y = -2y$ तथा $n = 12$

तब, व्यापक पद, $\quad T_{r+1} = {}^{12}C_r\, (x)^{12-r} (-2y)^r$

$r = 3$ रखने पर,

$$\text{चौथा पद, } T_{3+1} = {}^{12}C_3\ x^{12-3}\ (-2y)^3$$

$$\Rightarrow \qquad T_4 = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} x^9\ (-2)^3\ y^3$$

$$= 2 \times 11 \times 10\ x^9\ (-8) y^3$$

$$= 220 \times (-8)\ x^9\ y^3 = -1760\ x^9 y^3$$

प्रश्न 6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल $(X + Y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^nC_r\ X^{n-r}\ Y^r$$

यहाँ, $X = 9x$, $Y = -\frac{1}{3\sqrt{x}}$ तथा $n = 18$

$\therefore \left(9x - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{18}$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r\ (9x)^{18-r} \left(\frac{-1}{3\sqrt{x}}\right)^r$$

$r = 12$ रखने पर,

$$\text{13 वाँ पद,} \qquad T_{12+1} = {}^{18}C_{12}\ (9x)^{18-12} \left(\frac{-1}{3\sqrt{x}}\right)^{12}$$

$$= {}^{18}C_6\ 9^6 \times x^6\ \frac{1}{3^{12}\ (\sqrt{x})^{12}} \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{3^{12} \times x^6}{3^{12} \times x^6} = 18564$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 8) निम्नलिखित प्रश्नों के प्रसारों में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 7 - 8) माना कुल पद $(n + 1)$ हैं, जब $(n + 1)$ विषम संख्या है, तब मध्य पद $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$वाँ पद है तथा जब $(n + 1)$ सम संख्या है, तब मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$वाँ पद है।

प्रश्न 7. $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

हल यहाँ, $n = 7$ (विषम)

तथा कुल पद $= n + 1 = 7 + 1 = 8$ (सम)

$\therefore$ मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ पद तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$वाँ पद द्वारा प्राप्त होते हैं।

अर्थात् $\left(\frac{7+1}{2}\right)$वाँ पद तथा $\left(\frac{7+3}{2}\right)$वाँ पद

$\Rightarrow$ 4वाँ पद तथा 5वाँ पद

$$\therefore \quad T_4 = T_{3+1} = {}^7C_3\,(3)^{7-3}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^3 \qquad (\because T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r)$$

$$= \frac{7\times 6\times 5}{6} \times \frac{3^4\,(-1)^3 \times x^9}{6^3} = \frac{35\times 81\times(-1)\times x^9}{6\times 6\times 6}$$

$$= -\frac{35\times 27\times x^9}{2\times 6\times 6} = -\frac{35\times 3}{2\times 2\times 2}\times x^9 = -\frac{105}{8}x^9$$

तथा

$$T_5 = T_{4+1} = {}^7C_4\,3^{7-4}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^4$$

$$= {}^7C_3\,\frac{3^3\,(-1)^4\,(x^3)^4}{6^4} \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= \frac{7\times 6\times 5}{6}\times\frac{3\times 3\times 3\times x^{12}}{6\times 6\times 6\times 6} = \frac{35}{48}x^{12}$$

प्रश्न 8. $\left(\frac{x}{3}+9y\right)^{10}$

हल यहाँ, $n = 10$ (सम)

कुल पद $= n + 1 = 10 + 1 = 11$ (विषम)

यहाँ पर एक मध्य पद होगा अर्थात् $\left(\frac{10+2}{2}\right)$वाँ पद या 6वाँ पद।

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^{10}$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r\left(\frac{x}{3}\right)^{10-r}(9y)^r \qquad (\because T_{r+1} = {}^nC_r\,x^{n-r}y^r)$$

$r = 5$ रखने पर, 6वाँ पद $T_6 = T_{5+1} = {}^{10}C_5\left(\frac{x}{3}\right)^{10-5}(9y)^5$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\left(\frac{x}{3}\right)^{10-5} 9^5\,y^5$$

$$\Rightarrow \quad T_6 = \frac{9\times 8\times 7\times 2}{4}\times\frac{x^5}{3^5}\times 9^5\times y^5 = 61236x^5y^5$$

प्रश्न 9. $(1+a)^{m+n}$ के प्रसार में सिद्ध कीजिए कि a^m तथा a^n के गुणांक बराबर हैं।

इस प्रकार के प्रश्न में सर्वप्रथम हम $(x+y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\,x^{n-r}y^r$ ज्ञात करते हैं। तत्पश्चात् x की जिस घात का गुणांक हमें ज्ञात करना होता है, उसे $n-r$ के बराबर रख देते हैं।

हल $(1+a)^{m+n}$ के प्रसार में, व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^{m+n}C_r\,(a)^r$$

a^m के गुणांक के लिए, $r = m$ रखने पर,

$$T_{m+1} = {}^{m+n}C_m\, a^m$$

$\therefore$ a^m का गुणांक $= {}^{m+n}C_m$ ...(i)

पुनः a^n के गुणांक के लिए $r = n$ रखने पर, तब

$$T_{n+1} = {}^{m+n}C_n\, a^n$$

$\therefore$ a^n का गुणांक $= {}^{m+n}C_n$

$= {}^{m+n}C_{m+n-n}$ $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= {}^{m+n}C_m$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, a^m का गुणांक a^n के गुणांक के बराबर है।

प्रश्न 10. यदि $(x+1)^n$ के प्रसार में $(r-1)$वें, rवें और $(r+1)$वें पदों के गुणांकों में 1 : 3 : 5 का अनुपात हो, तो n तथा r का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(x+1)^n$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{R+1} = {}^nC_R\, x^{n-R}.(1)^R \Rightarrow T_{R+1} = {}^nC_R\, x^{n-R}$$

$(r-1)$वें पद के गुणांक के लिए, $R = r-2$ रखने पर,

$$T_{(r-2)+1} = {}^nC_{r-2}\, x^{n-(r-2)}$$

$$\Rightarrow \quad T_{(r-1)} = {}^nC_{r-2}\, x^{n-r+2}$$

$\therefore$ $(r-1)$वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-2}$

rवें पद के गुणांक के लिए $R = r-1$ रखने पर,

$$T_{r-1+1} = {}^nC_{r-1}\, x^{n-(r-1)}$$

$$\Rightarrow \quad T_r = {}^nC_{r-1} x^{n-r+1}$$

$\therefore$ r वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-1}$

तथा $(r+1)$वें पद के गुणांक के लिए $R = r$ रखने पर,

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}$$

$\therefore$ $(r+1)$वें पद का गुणांक $= {}^nC_r$

अब, प्रश्नानुसार

$${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} : {}^nC_r = 1:3:5$$

प्रथम दो पद लेने पर,

$${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} = 1:3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n!}{(r-2)!\,\{n-(r-2)\}!} : \frac{n!}{(r-1)!\,\{n-(r-1)\}!} = 1:3 \qquad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(r-2)!\,(n-r+2)!} : \frac{1}{(r-1)\,(r-2)!\,(n-r+1)!} = 1:3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(n-r+2)(n-r+1)!} : \frac{1}{(r-1)(n-r+1)!} = 1:3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n-r+2} : \frac{1}{r-1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{r-1}{n-r+2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3r-3 = n-r+2 \quad \Rightarrow \quad n-4r+5=0 \quad \ldots(i)$$

अंतिम दो पद लेने पर,

$$^nC_{r-1} : {}^nC_r = 3:5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n!}{(r-1)!\{n-(r-1)\}!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = 3:5 \quad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)!} : \frac{1}{r(r-1)!(n-r)!} = 3:5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(n-r+1)(n-r)!} : \frac{1}{r(n-r)!} = 3:5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n-r+1} : \frac{1}{r} = 3:5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n-r+1} \times r = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 5r = 3n-3r+3$$

$$\Rightarrow \quad 3n-8r+3=0 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) को 2 से गुणा करके समी (ii) में से घटाने पर,

$$n-7=0$$

$$\Rightarrow \quad n=7$$

n का मान समी (i) में रखने पर,

$$7-4r+5=0$$

$$\Rightarrow \quad 4r=12$$

$$\Rightarrow \quad r=3$$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक, $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का दोगुना है।

यहाँ $(x+y)^n$ के प्रसार के व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ का प्रयोग करेंगे, तब r का एक उचित मान लेकर आवश्यक गुणांक ज्ञात कर लेंगे।

हल $(1+x)^{2n}$ के लिए, व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{2n}C_r x^r$$

x^n के गुणांक के लिए $r=n$ रखने पर,

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n x^n$$

$\therefore$ x^n का गुणांक $= {}^{2n}C_n$ ...(i)

$(1+x)^{2n-1}$ के लिए, व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{2n-1}C_r x^r$$

x^n के गुणांक के लिए $r=n$ रखने पर,

$$T_{n+1} = {}^{2n-1}C_n x^n$$

$\therefore$ x^n का गुणांक $= {}^{2n-1}C_n = \dfrac{(2n-1)!}{n!\,(2n-1-n)!} = \dfrac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$ $\left[\because {}^nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}\right]$

$2n$ से अंश तथा हर में गुणा करने पर,

$$x^n \text{ का गुणांक} = \frac{(2n)\,(2n-1)!}{(2n)\,n!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{2n\,(n-1)!\,n!} \qquad [\because n! = n(n-1)!]$$

$$= \frac{(2n)!}{(2)\,n!\,n!} \qquad \left[\because {}^{2n}C_n = \frac{2n!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{2n!}{n!\,n!}\right]$$

$\Rightarrow$ $$x^n \text{ का गुणांक} = \frac{1}{2} \times {}^{2n}C_n \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$(1+x)^{2n-1} \text{ में } x^n \text{ का गुणांक} = \frac{1}{2} \times (1+x)^{2n} \text{ में } x^n \text{ का गुणांक}$$

$\Rightarrow$ $(1+x)^{2n}$ में x^n का गुणांक $= 2 \times (1+x)^{2n-1}$ में x^n का गुणांक इति सिद्धम्

प्रश्न 12. m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1+x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

$(1+x)^n$ के प्रसार में व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\,(1)^{n-r}\,x^r$ का उपयोग करेंगे।

हल $(1+x)^m$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^mC_r\,x^r$$

x^2 के गुणांक के लिए $r = 2$ रखने पर,

$$T_{2+1} = {}^mC_2\,x^2$$

$\therefore$ $$x^2 \text{ का गुणांक} = {}^mC_2$$

$${}^mC_2 = 6$$

$\Rightarrow$ $$\frac{m(m-1)}{2} = 6$$

$\Rightarrow$ $$m^2 - m = 12$$

$\Rightarrow$ $$m^2 - m - 12 = 0$$

$\Rightarrow$ $$m^2 - (4-3)m - 12 = 0$$

$\Rightarrow$ $$m^2 - 4m + 3m - 12 = 0$$

$\Rightarrow$ $$m(m-4) + 3(m-4) = 0$$

$\Rightarrow$ $$(m-4)(m+3) = 0$$

$\Rightarrow$ $$m - 4 = 0 \quad \text{या} \quad m + 3 = 0$$

$\Rightarrow$ $$m = 4 \quad \text{या} \quad m = -3$$

$\Rightarrow$ $$m = 4$$ ($\because$ हम ऋणात्मक मान नहीं लेते हैं।)

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. यदि $(a + b)^n$ के प्रसार में प्रथम तीन पद क्रमशः 729, 7290 तथा 30375 हों, तो a, b और n ज्ञात कीजिए।

जब तीन क्रमागत पद दिए होते हैं, तब इस प्रकार के प्रश्नों को ट्रिक के प्रयोग द्वारा आसानी से हल किया जा सकता है, इसमें हम प्रथम तथा तृतीय पद को गुणा करके प्राप्त परिणाम को द्वितीय पद के वर्ग से भाग देते हैं। यहाँ हमारा लक्ष्य, अन्य पदों के विलोपन के द्वारा एक अज्ञात का मान ज्ञात करना है।

हल हम जानते हैं कि $(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}^nC_n b^n$

दिया है, ${}^nC_0\, a^n = 729 \Rightarrow a^n = 729$ ...(i)

$${}^nC_1\, a^{n-1}b = 7290$$

$\Rightarrow$ $$na^{n-1}b = 7290 \qquad \text{...(ii)}$$

तथा $${}^nC_2 a^{n-2}b^2 = 30375$$

$\Rightarrow$ $$\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}\, b^2 = 30375 \qquad \text{...(iii)}$$

अब, समी (i) तथा (iii) को गुणा करके समी (ii) के वर्ग से भाग देने पर,

$$\frac{a^n \times \frac{n(n-1)}{2} \times a^{n-2}\, b^2}{(na^{n-1}b)^2} = \frac{729 \times 30375}{7290 \times 7290}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{a^{2n-2}\, \frac{n(n-1)}{2}\, b^2}{n^2\, a^{2n-2}\, b^2} = \frac{30375}{10 \times 7290}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{n-1}{2n} = \frac{6075}{10 \times 1458}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{n-1}{2n} = \frac{1215}{2 \times 1458}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{n-1}{n} = \frac{1215}{1458}$$

$\Rightarrow$ $$1458n - 1215n = 1458$$

$\Rightarrow$ $$243n = 1458$$

$\Rightarrow$ $$n = \frac{1458}{243} \Rightarrow n = 6$$

$n = 6$ समी (i) में रखने पर,

$$a^6 = 729 \Rightarrow a^6 = 3^6 \Rightarrow a = 3$$

तब समी (ii) से, $$6 \times (3)^{6-1} \times b = 7290$$

$\Rightarrow$ $$6 \times 3^5 \times b = 7290$$

$\Rightarrow$ $$6 \times 243 \times b = 7290$$

$\Rightarrow$ $$b = \frac{7290}{6 \times 243} = \frac{30}{6} = 5$$

अतः $a = 3, b = 5$ तथा $n = 6$

प्रश्न 2. यदि $(3 + ax)^9$ के प्रसार में x^2 तथा x^3 के गुणांक समान हों, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(3 + ax)^9$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^9C_r\, 3^{9-r}\, a^r\, x^r$$

x^2 के गुणांक के लिए $r = 2$ रखने पर,

$$T_{2+1} = {}^9C_2\, 3^{9-2}\, a^2\, x^2$$

$\therefore$ x^2 का गुणांक $= {}^9C_2\, 3^7\, a^2$ ...(i)

x^3 के गुणांक के लिए $r = 3$ रखने पर,

$$T_{3+1} = {}^9C_3\, 3^{9-3}\, a^3 x^3$$
$$= {}^9C_3\, 3^6\, a^3 x^3$$

$\therefore$ x^3 का गुणांक $= {}^9C_3\, a^3\, 3^6$ ...(ii)

दिया है, x^2 का गुणांक $= x^3$ का गुणांक

$\Rightarrow$ ${}^9C_2 3^7 a^2 = {}^9C_3 3^6 a^3$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\Rightarrow$ $\frac{9 \times 8}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 1 \times a$

$\Rightarrow$ $\frac{3}{2} = \frac{7}{6} \times a \Rightarrow a = \frac{9}{7}$

प्रश्न 3. द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हुए गुणनफल $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7 = \{{}^6C_0 + {}^6C_1 (2x) + {}^6C_2 (2x)^2 + {}^6C_3 (2x)^3 + {}^6C_4 (2x)^4 + {}^6C_5 (2x)^5 + {}^6C_6 (2x)^6\}$
$\times ({}^7C_0 - {}^7C_1 x + {}^7C_2 x^2 - {}^7C_3 x^3 + {}^7C_4 x^4 - {}^7C_5 x^5 + {}^7C_6 x^6 - {}^7C_7 x^7)$

$= ({}^6C_0 + {}^6C_1 \times 2 \times x + {}^6C_2 \times 4 \times x^2 + {}^6C_3 \times 8 \times x^3 + {}^6C_4 \times 2^4 \times x^4 + {}^6C_5 \times 2^5 \times x^5 + {}^6C_6\, 2^6 \times x^6)$
$\times ({}^7C_0 - {}^7C_1 x + {}^7C_2\, x^2 - {}^7C_3 x^3 + {}^7C_4 x^4 - {}^7C_5 x^5 + {}^7C_6\, x^6 - {}^7C_7\, x^7)$

x^5 के गुणांक के लिए

$= {}^6C_0 (-{}^7C_5) + {}^6C_1 \times 2 \times {}^7C_4 + {}^6C_2 \times 4 \times (-{}^7C_3) + {}^6C_3 \times 8 \times {}^7C_2 + {}^6C_4 \times 2^4 \times (-{}^7C_1) + {}^6C_5 \times 2^5 \times ({}^7C_0)$

$= -{}^6C_0 \times {}^7C_2 + {}^6C_1 \times 2 \times {}^7C_3 - {}^6C_2 \times 4 \times {}^7C_3$
$+ {}^6C_3 \times 8 \times {}^7C_2 - {}^6C_2 \times 16 \times {}^7C_1 + {}^6C_1 \times 2^5$
$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$$= -\frac{1 \times 7 \times 6}{2} + \frac{6 \times 2 \times 7 \times 6 \times 5}{6} - \frac{6 \times 5}{2} \times 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{6}$$
$$+ \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{2} - \frac{6 \times 5}{2} \times 16 \times 7 + 6 \times 32$$

$= -21 + 12 \times 35 - 15 \times 28 \times 5 + 20 \times 24 \times 7 - 15 \times 16 \times 7 + 192$
$= -21 + 420 - 420 \times 5 + 3360 - 1680 + 192$
$= 3972 - 2100 - 21 - 1680$
$= 3972 - 3801 = 171$

प्रश्न 4. यदि a और b भिन्न-भिन्न पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n - b^n)$ का एक गुणनखंड $(a - b)$ है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

[संकेत $a^n = (a - b + b)^n$ लिखकर प्रसार कीजिए।]

$(x + y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करेंगे

$$(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + \ldots + {}^nC_n y^n$$

हल a^n को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $a^n = (a - b + b)^n$
$$= {}^nC_0 (a - b)^n + {}^nC_1 (a - b)^{n-1} b + {}^nC_2 (a - b)^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_n b^n$$

$\Rightarrow a^n = (a - b)[{}^nC_0 (a - b)^{n-1} + {}^nC_1 (a - b)^{n-2} b + {}^nC_2 (a - b)^{n-3} b^2 + \ldots] + b^n$

$\Rightarrow \quad a^n - b^n = (a - b)[{}^nC_0 (a - b)^{n-1} + {}^nC_1 (a - b)^{n-2} b + \ldots]$

$\Rightarrow (a - b), (a^n - b^n)$ का गुणनखंड है।

प्रश्न 5. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 5 - 6) निम्न प्रसारों का प्रयोग करेंगे

$$(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + {}^nC_n y^n$$

तथा $$(x - y)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - \ldots + (-1)^n \, {}^nC_n y^n$$

हल हम जानते हैं कि $(x + y)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 y + {}^6C_2 x^4 y^2 + {}^6C_3 x^3 y^3 + {}^6C_4 x^2 y^4 + {}^6C_5 x y^5 + {}^6C_6 y^6$

$= {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 y + {}^6C_2 x^4 y^2 + {}^6C_3 x^3 y^3 + {}^6C_2 x^2 y^4 + {}^6C_1 x y^5 + {}^6C_0 y^6 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$$= x^6 + 6x^5 y + \frac{6 \times 5}{2} x^4 y^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} x^3 y^3 + \frac{6 \times 5}{2} x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$\Rightarrow \quad (x + y)^6 = x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6 \quad \ldots(i)$

इसी प्रकार, $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5 y + 15x^4 y^2 - 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 - 6xy^5 + y^6 \quad \ldots(ii)$

समी (i) से समी (ii) को घटाने पर,

$$(x+y)^6-(x-y)^6=12x^5y+40x^3y^3+12xy^5=4xy\,[3x^4+10x^2y^2+3y^4]$$

$x=\sqrt{3}$ तथा $y=\sqrt{2}$ रखने पर,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$$
$$=4\sqrt{3}\sqrt{2}\,[3(\sqrt{3})^4+10(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})^4]$$
$$=4\sqrt{6}\,[3\times 3^2+10\times 3\times 2+3\times 2^2]=4\sqrt{6}\,[3\times 9+60+3\times 4]$$
$$=4\sqrt{6}\,[27+60+12]=4\sqrt{6}\times(39+60)=4\sqrt{6}\times 99=396\sqrt{6}$$

प्रश्न 6. $(a^2+\sqrt{a^2-1})^4+(a^2-\sqrt{a^2-1})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना $a^2=x$ तथा $\sqrt{a^2-1}=y$

अब, $(x+y)^4={}^4C_0x^4+{}^4C_1x^3y+{}^4C_2x^2y^2+{}^4C_3\,xy^3+{}^4C_4y^4$

$$={}^4C_0x^4+{}^4C_1\,x^3y+{}^4C_2\,x^2y^2+{}^4C_1xy^3+{}^4C_0y^4 \qquad (\because {}^nC_r={}^nC_{n-r})$$
$$=x^4+4x^3y+\frac{4\times 3}{2}x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$\Rightarrow$ $$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \quad \ldots(i)$$

इसी प्रकार, $$(x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+12x^2y^2+2y^4=2\,[x^4+6x^2y^2+y^4]$$

x तथा y का मान अर्थात् $x=a^2$ तथा $y=\sqrt{a^2-1}$ रखने पर,

$$(a^2+\sqrt{a^2-1})^4+(a^2-\sqrt{a^2-1})^4$$
$$=2\,[(a^2)^4+6\,(a^2)^2\,(\sqrt{a^2-1})^2+(\sqrt{a^2-1})^4]$$
$$=2\,[a^8+6a^4\,(a^2-1)+(a^2-1)^2]=2\,(a^8+6a^6-6a^4+a^4+1-2a^2)$$
$$=2\,(a^8+6a^6-5a^4-2a^2+1)=2a^8+12a^6-10a^4-4a^2+2$$

प्रश्न 7. $(0.99)^5$ के प्रसार के पहले तीन पदों का प्रयोग करते हुए इसका निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

0.99 = (1 − 0.01) लिखेंगे। तब, $(0.99)^5$ के प्रसार में यहाँ पर 6 पद होंगे परन्तु आपको केवल शुरुआती तीन पद ही लेने है।

$$(1-x)^n={}^nC_0-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-{}^nC_3x^3+{}^nC_4\,x^4+\ldots+(-1)^n\,{}^nC_nx^n$$

प्रयोग करने पर,

हल $(0.99)^5=(1-0.01)^5$

$$={}^5C_0(1)^5-{}^5C_1(1)^4(0.01)+{}^5C_2(1)^3\,(0.01)^2 \qquad \text{(अन्य पदों को छोड़ने पर)}$$
$$=1-5\times 1\times 0.01+\frac{5\times 4}{2}\times 1\times 0.01\times 0.01$$
$$=1-0.05+10\times 0.0001=1-0.05+0.001$$
$$=1.001-0.05=0.951$$

प्रश्न 8. यदि $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरंभ से 5वें और अंत से 5वें पद का अनुपात $\sqrt{6}:1$ हो, तो n ज्ञात कीजिए।

$(x+y)^n$ के प्रसार में $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ आरंभ में होता है, तब T_{r+1} को अंत से ज्ञात करने के लिए x तथा y की स्थितियों को बदल देते हैं। अर्थात् अब आपको $(y+x)^n$ के प्रसार में T_{r+1} ज्ञात करना है।

हल $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n = \left(2^{1/4}+\frac{1}{3^{1/4}}\right)^n = (2^{1/4}+3^{-1/4})^n$

अब, आरंभ से 5 वाँ पद, $T_{4+1} = T_5 = {}^nC_4 (2^{1/4})^{n-4}(3^{-1/4})^4$

$$\Rightarrow \quad T_5 = {}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}} 3^{-1} \quad \ldots(i)$$

$\left(3^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)^n$ अंत से 5वाँ पद, $T_5 = T_{4+1} = {}^nC_4 (3^{-\frac{1}{4}})^{n-4}(2^{1/4})^4$

$$\Rightarrow \quad T_5 = {}^nC_4 \, 3^{-\left(\frac{n-4}{4}\right)} 2^1 \quad \ldots(ii)$$

प्रश्नानुसार, $\frac{\text{आरंभ से 5वाँ पद}}{\text{अंत से 5वाँ पद}} = \frac{\sqrt{6}}{1}$

$$\therefore \quad \frac{{}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}} 3^{-1}}{{}^nC_4 3^{-\frac{(n-4)}{4}} 2^1} = \frac{\sqrt{6}}{1} \Rightarrow 2^{\frac{n-4}{4}-1} 3^{-1+\frac{n-4}{4}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{\frac{n-4-4}{4}} 3^{\frac{-4+n-4}{4}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{\frac{n-8}{4}} 3^{\frac{n-8}{4}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad (6)^{\frac{n-8}{4}} = 6^{1/2} \quad [\because a^n b^n = (ab)^n]$$

दोनों पक्षों में 6 की घात की तुलना करने पर,

$$\frac{n-8}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow n-8 = \frac{4}{2} \Rightarrow n-8 = 2 \Rightarrow n = 10$$

प्रश्न 9. $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार ज्ञात कीजिए।

(प्र.सं. 9 - 10) प्रथम दो पदों को x तथा अंतिम पद को y मानने पर $(x-y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करेंगे।

हल $\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{x}\right]^4 = {}^4C_0\left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - {}^4C_1\left(1+\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{2}{x}\right)$

$$+ {}^4C_2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - {}^4C_3\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - 4\left(1+\frac{x}{2}\right)^3 \frac{2}{x} + \frac{4\times 3}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \frac{4}{x^2} - 4\left(1+\frac{x}{2}\right)\times\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{8}{x}\left(1+\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{24}{x^2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{32}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

अब, $\left(1+\frac{x}{2}\right)^4, \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$ का प्रसार खोलने पर,

$$\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4 = \left(1+4\cdot\frac{x}{2}+6\cdot\frac{x^2}{4}+4\cdot\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}\right) - 8\cdot\frac{1}{x}\left(1+3\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}\right)$$

$$+ 24\cdot\frac{1}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right) - 32\times\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}\right) - \left(\frac{8}{x}+12+6x+x^2\right)$$

$$+ \left(\frac{24}{x^2}+\frac{24}{x}+6\right) - \left(\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + x^2\left(\frac{3}{2}-1\right) + x(2-6) + (1-12+6)$$

$$+ (24-8)\frac{1}{x} + (24-16)\frac{1}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 5 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

प्रश्न 10. $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3 = [3(x^2 + a^2) - 2ax]^3$

$$= {}^3C_0 \{3(x^2 + a^2)\}^3 - {}^3C_1 \{3(x^2 + a^2)\}^2\, 2ax$$

$$+ {}^3C_2 \{3(x^2 + a^2)\}(2ax)^2 - {}^3C_3 (2ax)^3$$

$$= 27(x^2 + a^2)^3 - 3\times 9(x^2 + a^2)^2 \times 2ax$$

$$+ 3\times 3(x^2 + a^2)\, 4a^2x^2 - 8a^3x^3$$

अब, $(x^2 + a^2)^3, (x^2 + a^2)^2$ का प्रसार खोलने पर, हम पाते हैं

$$= 27\,[{}^3C_0(x^2)^3 + {}^3C_1(x^2)^2 a^2 + {}^3C_2 x^2(a^2)^2 + {}^3C_3(a^2)^3]$$

$$- 27\,[{}^2C_0(x^2)^2 + {}^2C_1 x^2a^2 + {}^2C_2(a^2)^2] \times 2ax$$

$$+ 9(x^2 + a^2)\, 4a^2x^2 - 8a^3x^3$$

$$= 27\,[x^6 + 3x^4a^2 + 3x^2a^4 + a^6] - 27[x^4 + 2x^2a^2 + a^4]\, 2ax$$

$$+ 36a^2x^2\,(x^2 + a^2) - 8a^3x^3$$

$$= 27x^6 + 81x^4a^2 + 81x^2a^4 + 27a^6 - 54ax\,(x^4 + 2x^2a^2 + a^4)$$

$$+ 36a^2x^4 + 36a^4x^2 - 8a^3x^3$$

$$= 27x^6 + 117x^4a^2 + 117a^4x^2 + 27a^6 - 54ax^5 - 54a^5x - 8a^3x^3 - 108a^3x^3$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$$