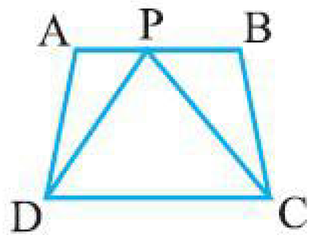
9. समान्तर चतुर्भुज और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

प्रश्नावली 9.1

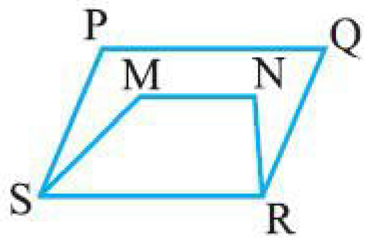
Q1. निम्नलिखित आकृतियों में से कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं? ऐसी स्थिति में, उभयनिष्ठ आधार और दोनों समांतर रेखाएँ लिखिए।

(i)



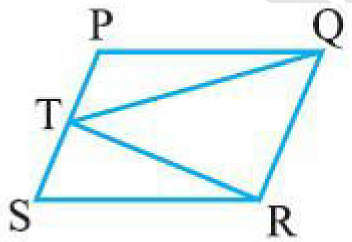
हल : यह आकृति एक ही आधार CD और एक ही समान्तर रेखाओं AB || CD के मध्य स्थित है |

(ii)



हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

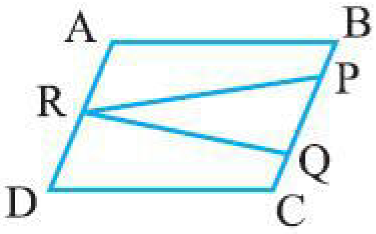
(iii)



हल : यह आकृति एक ही आधार QR और एक ही समान्तर रेखाओं PS || QR के मध्य स्थित है |

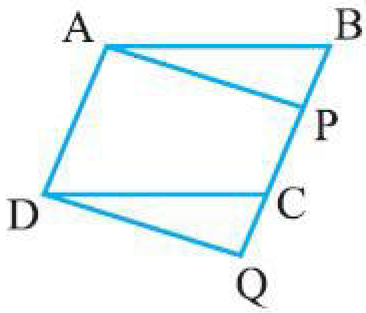
(iv)

Vidyarthi



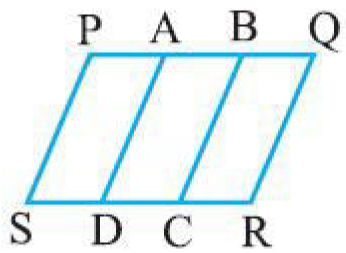
हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

(v)



हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

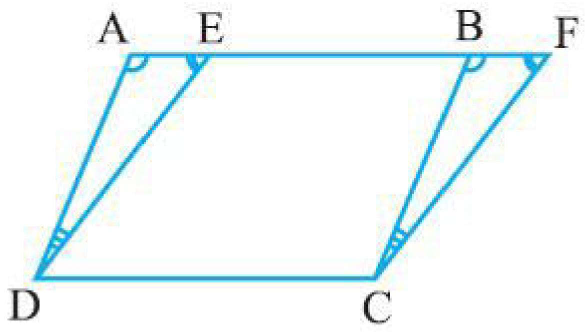
(vi)



हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

प्रमेय :

प्रमेय 9.1 : सिद्ध कीजिए कि एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बिच स्थित समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |



हल :

दिया है : ||gm ABCD और ||gm EFCD

एक ही आधार CD और AB || CD के मध्य स्थित है |

सिद्ध करना है :

ar(ABCD) = ar(EFCD)

उपपति :

ΔADE तथा ΔBCF में

AD = BC (||gm के सम्मुख भुजा बराबर होते हैं)

$\angle$DAE = $\angle$CBF (संगत कोण)

$\angle$AED = $\angle$BFC (संगत कोण)

ASA सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ADE \cong \Delta BCF$

अत: ar(ADE) = ar(BCF) .... (i)

(सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं)

अब, दोनों तरफ ar(EBCD) जोड़ने पर

ar(ADE) + ar(EBCD) = ar(BCF) + ar(EBCD)

ar(ABCD) = ar(EFCD) **Proved**

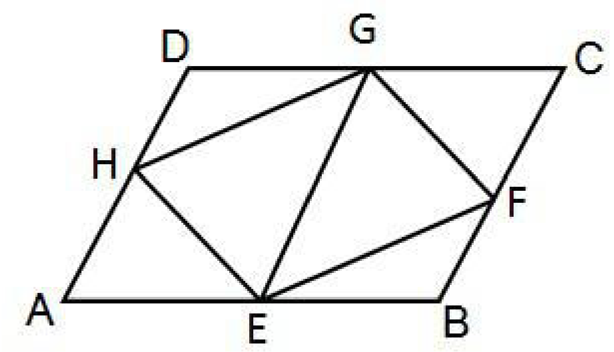
प्रश्नावली 9.2

Q1.

eVidyarthi

Q2. यदि E, F, G और H क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, तो दर्शाइए कि ar(EFGH) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) है |

हल :



दिया है : E, F, G और H क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं |

eVidyarthi

सिद्ध करना है : $ar(EFGH) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

रचना : E को G से मिलाया |

प्रमाण : E तथा G क्रमश: AB तथा CD के मध्य बिंदु है और AB||CD है |

इसलिए AEGD और EBCG भी समांतर चतुर्भुज हैं |

अब, ΔGEH तथा ||gm AEGD एक ही आधार GE तथा AD || GE के मध्य स्थित है |

अत: $ar(GEH) = \frac{1}{2} ar(AEGD)$ .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसीप्रकार,

ΔGEF तथा ||gm EBCD एक ही आधार GE तथा BC || GE के मध्य स्थित है |

अत: $ar(GEF) = \frac{1}{2} ar(EBCD)$ .... (ii)

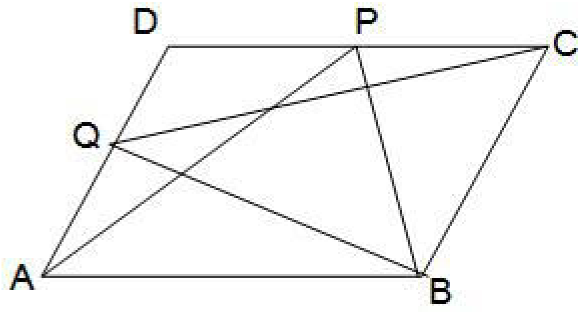
समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$$ar(GEH) + ar(GEF) = \frac{1}{2} ar(AEGD) + \frac{1}{2} ar(EBCD)$$

या $ar(EFGH) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ **Proved**

Q3. P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है | दर्शाइए ar (APB) = ar (BQC) है |

हल :



दिया है : P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD

की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है |

सिद्ध करना है :

ar(APB) = ar(BQC)

प्रमाण :

ΔAPB तथा ||gm ABCD एक ही आधार AB तथा AB || CD के मध्य स्थित है |

अत: ar(APB) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

ΔBQC तथा ||gm ABCD एक ही आधार BC तथा AD || BC के मध्य स्थित है |

अत: ar(BQC) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

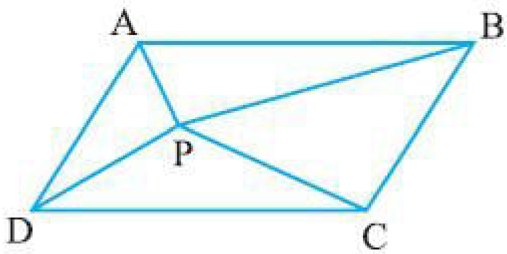
ar(APB) = ar(BQC) **Proved**

Q4. P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थिति कोई बिंदु है | दर्शाइए कि

(i) ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

(ii) ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD)

हल :

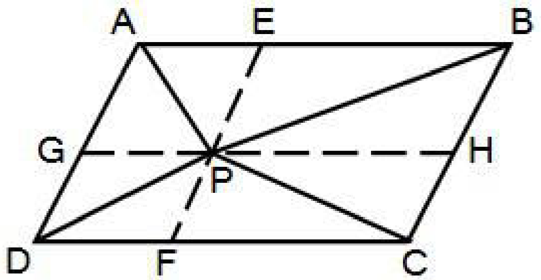


दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके अभ्यंतर P कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है :

(i) ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

(ii) ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD)



रचना : P बिंदु से होकर AB के समांतर GH खिंचा और AD के समान्तर EF खिंचा |

प्रमाण :

AB || GH रचना से और AB = GH है इसलिए ABHG एक समांतर चतुर्भुज है |

इसी प्रकार DCHG भी एक समांतर चतुर्भुज है |

अब

ΔAPB तथा ||gm ABHG एक ही आधार AB तथा AB || GH के मध्य स्थित है |

अत: ar(APB) = $\frac{1}{2}$ ar(ABHG) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसीप्रकार, ΔPCD तथा ||gm DCHG एक ही आधार DC तथा DC || GH के मध्य स्थित है |

अत: ar(PCD) = $\frac{1}{2}$ ar(DCHG) .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar(ABHG) + $\frac{1}{2}$ ar(DCHG)

ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) .... (iii)

अब ΔAPD और ||gm ADFE एक ही आधार AD तथा AD || EF के मध्य स्थित है |

इसलिए, ar(APD) = $\frac{1}{2}$ ar(ADFE) .... (iv)

इसीप्रकार, ΔPBC और ||gm BCFE एक ही आधार BC तथा BC || EF के मध्य स्थित है |

इसलिए, ar(PBC) = $\frac{1}{2}$ ar(BCFE) .... (v)

समीकरण (iv) और (v) को जोड़ने से

ar(APD) + ar(PBC) = $\frac{1}{2}$ ar(ADFE) + $\frac{1}{2}$ ar(BCFE)

या ar(APD) + ar(PBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

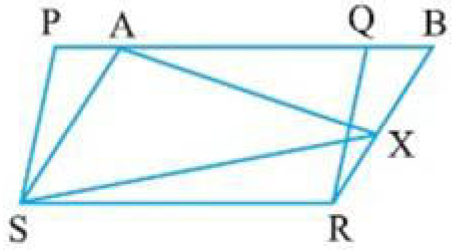
या ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD) समीकरण (iii) से

Proved

Q5. PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है | दर्शाइए कि :

(i) ar(PQRS) = ar(ABRS)

(ii) $ar(AXS) = \frac{1}{2}\ ar\ (PQRS)$



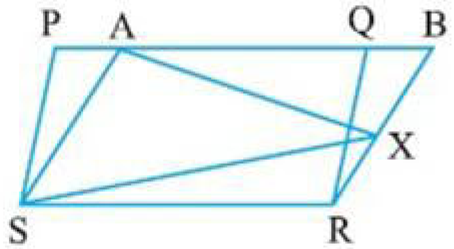
हल :

दिया है : PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है :

(i) ar(PQRS) = ar(ABRS)

(ii) $ar(AXS) = \frac{1}{2}\ ar\ (PQRS)$



प्रमाण :

||gm PQRS तथा ||gm ABRS एक ही आधार SR तथा SR|| PB के मध्य स्थित हैं |

इसलिए प्रमेय 9.1 से

ar(PQRS) = ar(ABRS) .... (i) **Proved**

अब, ΔAXS तथा ||gm ABRS एक ही आधार AS तथा AS || BR के मध्य स्थित है |

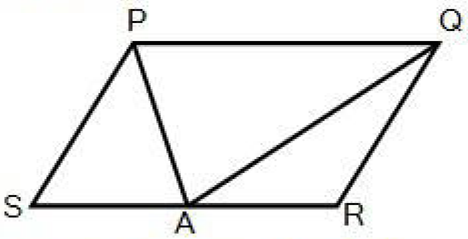
$\therefore\ ar(AXS) = \frac{1}{2}\ ar(ABRS)$

या $ar(AXS) = \frac{1}{2}\ ar(PQRS)$ **समी० (i) से Proved**

Q6. एक किसान के पास समांतर चतुर्भुज (PQRS) के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या हैं? वह किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग बोना चाहती है। वह ऐसा कैसे करे?

हल :

दिया है : PQRS एक ||gm है और RS पर एक बिंदु A है |



सिद्ध करना है :

ar(PAQ) = ar(PAS) + ar(QAR)

प्रमाण : ΔPAQ तथा ||gm PQRS एक ही आधार PQ तथा PQ || SR के मध्य स्थित है |

$\therefore$ ar(PAQ) = $\frac{1}{2}$ ar(PQRS) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसलिए ar(PAS) + ar(QAR) = $\frac{1}{2}$ ar(PQRS) .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

ar(PAQ) = ar(PAS) + ar(QAR)

अर्थात किसान चाहे तो ar(PAQ) में गेंहू बो सकता है अथवा ar(PAS) + ar(QAR) में चना बो सकता है | क्योंकि ये क्षेत्रफल में बराबर हैं |

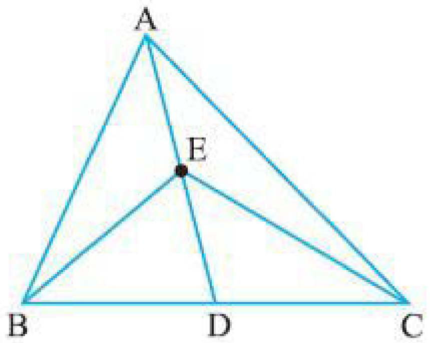
Exercise 9.3

Q1. ΔABC की एक मध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है | दर्शाइए कि ar(ABE) = ar(ACE) है |

हल :

दिया है : ΔABC की एक मध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है : ar(ABE) = ar(ACE)



रचना : B तथा C E को मिलाया |

प्रमाण : ΔABC में,

AD ΔABC कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(ABD) = ar(ACD) .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, ΔBEC में,

ED भी ΔBEC कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(BED) = ar(CED) .... (ii)

समीकरण (i) में से (ii) घटाने पर

ar(ABD) - ar(BED) = ar(ACD) - ar(CED)

या ar(ABE) = ar(ACE) **Proved**

Q2. ΔABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है | दर्शाइए कि $ar(BED) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ है |

हल:

दिया है : ΔABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है |

सिद्ध करना है :

$$ar(BED) = \frac{1}{4} ar(ABC)$$

Vidyarthi

रचना : B तथा C को बिंदु E से मिलाया |

प्रमाण :

ΔABC में,

AD ΔABC कि एक माध्यिका है |

इसलिए, $ar(ABD) = \frac{1}{2} ar(ABC)$ .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, बिंदु E Δ ABD कि भुजा AD का मध्य-बिंदु है (दिया है)

इसलिए, BE ΔABD की एक माध्यिका है |

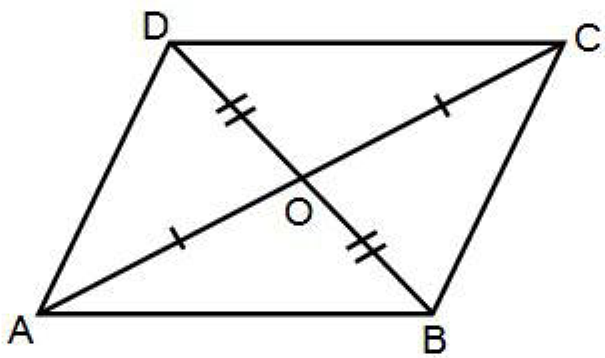
अत: $ar(BED) = \frac{1}{2} ar(ABD)$

या $ar(BED) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} ar(ABC)$ समी० (i) से

या $ar(BED) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ **Proved**

Q3. दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

हल :



दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके दो विकर्ण AC तथा BD हैं | जो एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है |

सिद्ध करना है :

ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD)

प्रमाण :

ΔABC की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है |

इसलिए OB एक माध्यिका है |

अत: ar(AOB) = ar(BOC) .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

इसीप्रकार, ΔACD की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है |

इसलिए OD एक माध्यिका है |

अत: ar(AOD) = ar(COD) .... (ii)

अब और ΔBCD में

भुजा BD की मध्य-बिंदु O है अत: OC एक माध्यिका है |

अत : ar(BOC) = ar(COD) .... (iii)

समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से हमें प्राप्त होता है |

ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD) **Proved**

Q4. ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं | यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि ar(ABC) = ar(ABD)

हल :

दिया है : ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं और रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है |

सिद्ध करना है : ar(ABC) = ar(ABD)

प्रमाण : DACD में भुजा CD को AB समद्विभाजित करता है जिसका मध्य-बिंदु O है |

अत: AO त्रिभुज कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(AOC) = ar(AOD) ...... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

इसीप्रकार, DBCD में OB एक माध्यिका है |

eVidyarthi

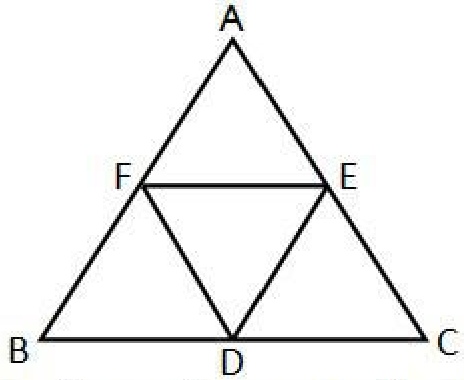
अत: ar(BOC) = ar(BOD) .... (ii)

समी० (i) तथा (ii) जोड़ने पर

ar(AOC) + ar(BOC) = ar(AOD) + ar(BOD)

या   ar(ABC) = ar(ABD)   **Proved**

Q5. D, E और F क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं | दर्शाइए कि



(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है |

(ii) ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC)

(iii) ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC)

हल :

दिया है : D, E और F क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है :

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है |

(ii) ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC)

(iii) ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC)

प्रमाण : (i) ΔABC में F तथा E भुजाएँ AB तथा AC के क्रमश: मध्य-बिंदु है |

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

FE || BC तथा FE = $\frac{1}{2}$ BC

या FE || BC तथा FE = BD [चूँकि D BC का मध्य-बिंदु है]

अत: BDEF एक समांतर चतुर्भुज है | **Proved** (i)

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है |)

(ii) DF समांतर चतुर्भुज BDEF का विकर्ण है इसलिए

ar(BDF) = ar(DEF) .... (i)

इसीप्रकार, DCEF भी समान्तर चतुर्भुज है और DE इसका विकर्ण है |

ar(CED) = ar(DEF) .... (ii)

और AEDF भी समान्तर चतुर्भुज है और FE इसका विकर्ण है |

तो ar(AEF) = ar(DEF) .... (iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

ar(AEF) = ar(BDF) = ar(DEF) = ar(CED) ..... (vi)

अब ar(AEF) + ar(BDF) + ar(DEF) + ar(CED) = ar(ABC)

या ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) = ar(ABC) समी॰ (vi)

या 4 ar(DEF) = ar(ABC)

या ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) **Proved** (ii)

(iii) ar(BDF) + ar(DEF) + ar(AEF) + ar(CED) = ar(ABC)

या ar(BDF) + ar(DEF) + ar(BDF) + ar(DEF) = ar(ABC)

या ar(BDEF) + ar(BDEF) = ar(ABC)

या 2 ar(BDEF) = ar(ABC)

या ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC) **Proved** (iii)

Q6. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है | यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

(i) ar (DOC) = ar (AOB)

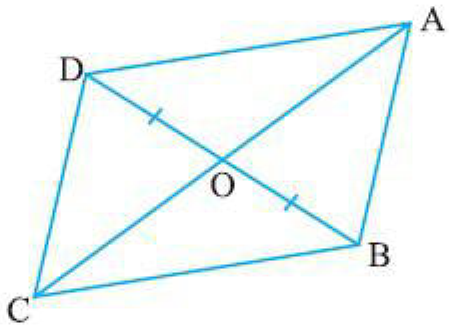
(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

हल :

eVidyarthi

दिया है : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है | यदि AB = CD है |



सिद्ध करना है :

(i) ar (DOC) = ar (AOB)

(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

प्रमाण : ΔDOC तथा ΔAOB में

CD = AB (दिया है)

OD = OB (दिया है)

∠COD = ∠AOB (शीर्षाभिमुख कोण)

इसलिए, SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔDOC ≅ ΔAOB

∠DCO = ∠BAO ...... (i) BY CPCT

चूँकि ΔDOC ≅ ΔAOB इसलिए

ar (DOC) = ar (AOB) ....(ii) Proved

(सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है)

समी० (ii) दोनों तरफ ar(BOC) जोड़ने पर

ar (DOC) + ar(BOC) = ar (AOB) + ar(BOC)

या ar(DCB) = ar (ACB) **Proved**

evidyarthi

समी० (i) से

∠DCO = ∠BAO ...... (एकांतर कोण)

इसलिए, CD || AB और CD = AB दिया है |

अत: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

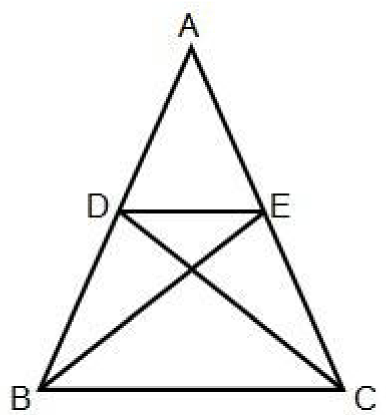
(सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है)

इसलिए DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है | **Proved**

Q7. बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है | दर्शाइए कि DE || BC है |

हल :

दिया है : बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है |



सिद्ध करना है :

DE || BC

प्रमाण :

ΔDBC और ΔEBC एक ही आधार BC और क्षेत्रफल में बराबर है क्योंकि

ar(DBC) = ar(EBC) दिया है |

अत: प्रमेय 9.3 से

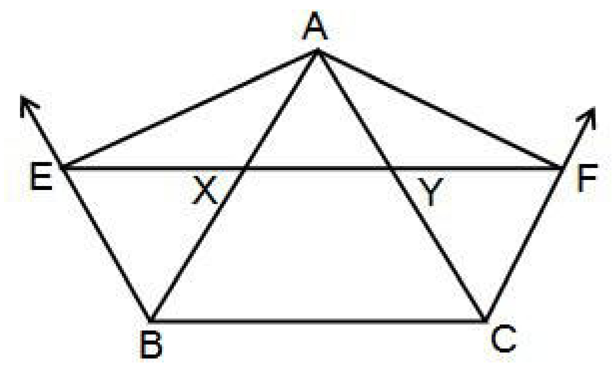
DE || BC **Proved**

evidyarthi

Q8. XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है | यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमश: E और F पर मिलती है, तो दर्शाइए कि:

ar(ABE) = ar(ACF)

हल :



दिया है : XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है | यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमश : E और F पर मिलती है |

सिद्ध करना है :

ar(ABE) = ar(ACF)

रचना : E तथा F को A से मिलाया |

प्रमाण : BC || XY और BE || AC दिया है, इसलिए BCYE एक समांतर चतुर्भुज है |

इसीप्रकार BC || XY और CE || AB दिया है अत: BCFX भी समांतर चतुर्भुज है |

अब समांतर चतुर्भुज BCYE तथा BCFX एक ही आधार BC और BC||XY के मध्य-स्थित है |

इसलिए प्रमेय 9.1 से

ar(BCYE) = ar(BCFX) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते है |)

ΔABE और ||gm BCYE एक ही आधार BE और BE || AC के मध्य-स्थित है |

evidyarthi

इसलिए, ar(ABE) = $\frac{1}{2}$ ar(BCYE) .... (2)

इसीप्रकार,

ΔACF और ||gm BCFX एक ही आधार CF और CF || AB के

मध्य-स्थित है |

इसलिए, ar(ACF) = $\frac{1}{2}$ ar(BCFX)

अथवा ar(ACF) = $\frac{1}{2}$ ar(BCYE) समी० (1) से ..... (3)

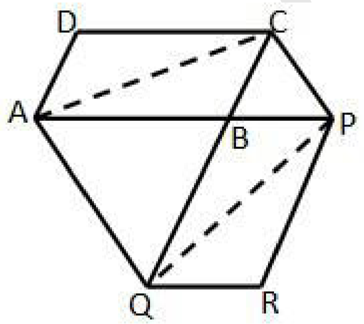
समीकरण (2) तथा (3) से

ar(ABE) = ar(ACF) **proved**

Q9. समान्तर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिंदु P तक बढाया गया है | A से होकर CP के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है | दर्शाइए कि ar(ABCD) = ar(PBQR) है |

[संकेत: AC और PQ को मिलाइए | अब ar(ACQ) और ar(APQ) कि तुलना कीजिये |]

हल :



दिया है : ABCD तथा PBQR समांतर चतुर्भुज है |

जहाँ AQ || CP है |

सिद्ध करना है : ar(ABCD) = ar(PBQR)

प्रमाण : ||gm ABCD का AC एक विकर्ण है |

अत: $ar(ABC) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ .... (1)

||gm PBQR का PQ भी एक विकर्ण है |

इसलिए $ar(PBQ) = \frac{1}{2} ar(PBQR)$ .... (2)

ΔACQ तथा ΔAPQ एक ही आधार AQ तथा CP || AQ के मध्य स्थित है |

अत: ar(ACQ) = ar(APQ) .... (3)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

समीकरण (3) में दोनों तरफ ar(ABQ) घटाने पर

ar(ACQ) - ar(ABQ) = ar(APQ) - ar(ABQ)

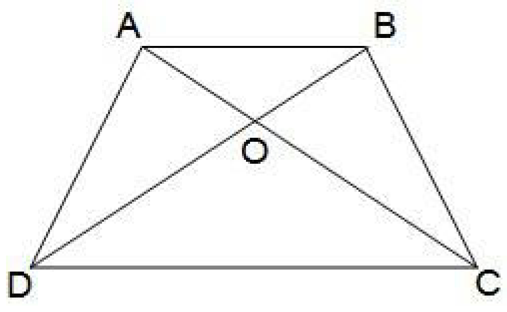
या ar(ABC) = ar(PBQ)

या $\frac{1}{2} ar(ABCD) = \frac{1}{2} ar(PBQR)$ समी० (1) तथा (2)

या ar(ABCD) = ar(PBQR)

Q10. एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं | दर्शाइए कि ar(AOD) = ar(BOC) है |

हल :



दिया है : एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : ar(AOD) = ar(BOC)

प्रमाण : ΔACD तथा ΔBCD एक ही आधार DC तथा AB || DC

के बीच स्थित है | अत:

ar(ACD) = ar(BCD) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

दोनों तरफ ar(COD) घटाने पर

ar(ACD) - ar(COD) = ar(BCD) - ar(COD)

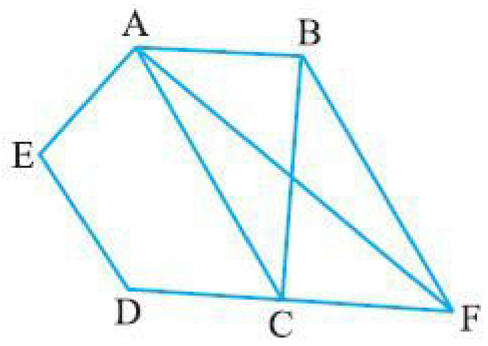
या ar(AOD) = ar(BOC) **Proved**

Q11. ABCDE एक पंचभुज है| B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है | दर्शाइए कि

(i) ar(ACB) = ar(ACF)

(ii) ar(AEDF) = ar(ABCDE)

हल :



दिया है : ABCDE एक पंचभुज है| B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है |

सिद्ध करना है :

(i) ar(ACB) = ar(ACF)

(ii) ar(AEDF) = ar(ABCDE)

प्रमाण : AC || BF दिया है |

ΔACB और ΔACF एक ही आधार AC तथा AC || BF के बीच स्थित है |

अत: ar(ACB) = ar(ACF) .... (1) **Proved**

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

अब दोनों तरफ ar(ACDE) जोड़ने पर

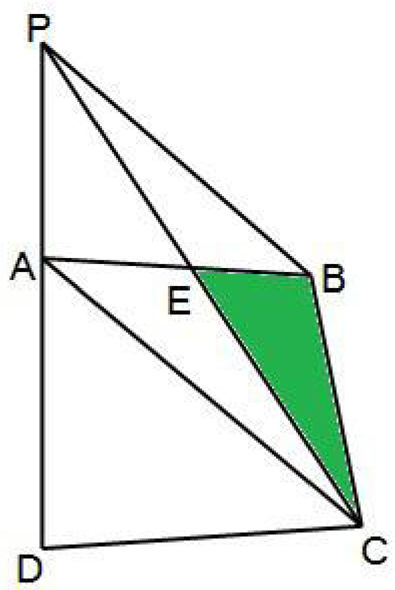
ar(ACB) + ar(ACDE) = ar(ACF) + ar(ACDE)

या ar(ABCDE) = ar(AEDF)

या ar(AEDF) = ar(ABCDE) **Proved**

Q12. गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध् के साथ स्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

हल :



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है | ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र के लिए भूखंड है |

सिद्ध करना है :

ar(ABCD) = ar(PCD)

रचना : A को C से मिलाया और AB के बढ़े हुए भाग P बिंदु से AC || PB खिंचा |

प्रमाण : ΔACP तथा ΔACB एक ही आधार AC तथा AC || PB के बीच स्थित है |

अत: ar(ACP) = ar(ACB) .... (1)
(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

ar(AEC) दोनों तरफ घटाने पर

ar(ACP) - ar(AEC) = ar(ACB) - ar(AEC)

या   ar(AEP) = ar(BEC)   .... (2)

अत: ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र है और ar(AEP) के बदले मिला भूखंड है |

अब समीकरण (2) में दोनों तरफ ar(AECD) जोड़ने पर

ar(BEC) + ar(AECD) = ar(AEP) + ar(AECD)

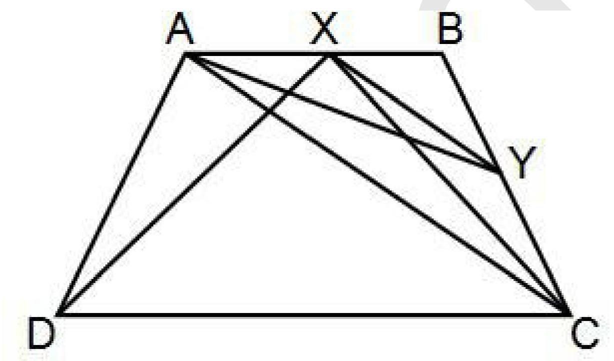
या   ar(ABCD) = ar(PCD) **Proved**

Q13. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है | सिद्ध कीजिए कि

ar (ADX) = ar (ACY) है |

[संकेत : CX को मिलाइए]

हल :



दिया है : ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : ar (ADX) = ar (ACY)

रचना : CX और AY को मिलाया |

प्रमाण :

ΔADX तथा ΔACX एक ही आधार AX और AB || DC के मध्य स्थित है |

अत: ar(ADX) = ar(ACX) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

अब ΔACY तथा ΔACX एक ही आधार AC तथा AC || XY के बीच स्थित है |

अत: ar(ACY) = ar(ACX) .... (2)

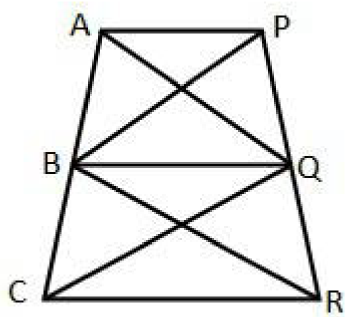
समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है |

ar (ADX) = ar (ACY) **Proved**

Q14. दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है | सिद्ध कीजिए कि

ar(AQC) = ar(PBR) है |

हल :



दिया है : दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है |

सिद्ध करना है : ar(AQC) = ar(PBR)

प्रमाण : AP || BQ दिया है | अत: ΔABQ तथा ΔPQB एक ही आधार BQ

तथा AP || BQ के मध्य स्थित है |

∴ ar(ABQ) = ar(PQB) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

इसीप्रकार, BQ || CR दिया है और ΔBQC तथा ΔBQR एक ही आधार BQ तथा BQ || CR के बीच स्थित है |

∴ ar(BQC) = ar(BQR) .... (2)

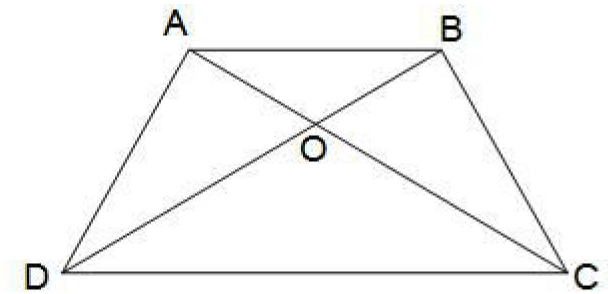
समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

ar(ABQ) + ar(BQC) = ar(PQB) + ar(BQR)

या ar(AQC) = ar(PBR) **Proved**

Q15. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ar (AOD) = ar (BOC) है | सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है |

हल :



दिया है : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD

परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं

कि ar (AOD) = ar (BOC) है |

सिद्ध करना है :

ABCD एक समलंब है |

प्रमाण : ar (AOD) = ar (BOC) .... (1) (दिया है)

समीकरण (1) में दोनों तरफ ar(COD) जोड़ने पर

ar (AOD) + ar(COD) = ar (BOC) + ar(COD)

या ar(ACD) = ar(BCD)

अब ΔACD तथा ΔBCD एक ही आधार CD और ar(ACD) = ar(BCD) है | अत: प्रमेय 9.3 से ये दोनों त्रिभुज अवश्य ही एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित है |

इसलिए AB || DC है |

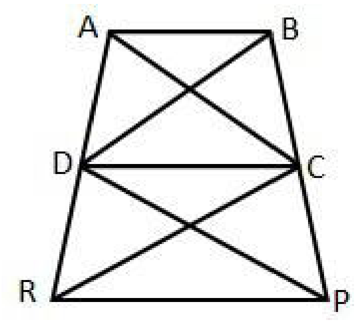
चतुर्भुज ABCD में AB || DC है अत: ABCD एक समलंब है |

Proved

Q16. दी गई आकृति में, ar(DRC) = ar(DPC) है और

ar(BDP) = ar(ARC) है | दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है |

हल :



दिया है : ar(DRC) = ar(DPC) है और

ar(BDP) = ar(ARC) है |

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है |

प्रमाण :

ar(ARC) = ar(BDP) ……… (1) (दिया है)

और ar(DRC) = ar(DPC) …... (2) (दिया है)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

ar(ARC) - ar(DRC) = ar(BDP) - ar(DPC)

या ar(ADC) = ar(BCD) ……. (3)

अब ΔADC और ΔBCD एक ही आधार DC और क्षेत्रफल में बराबर हैं समी० (3) से अत: प्रमेय 9.3 से

(एक ही आधार और क्षेत्रफल में बराबर त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के मध्य-स्थित होते हैं|)

इसलिए, AB || CD है अत: ABCD एक समलंब है |

अब ΔDRC और ΔDPC एक ही आधार DC और समी० (2) से क्षेत्रफल में बराबर हैं | अत: प्रमेय 9.3 से

DC || RP है इसलिए DCPR एक समलंब है |

अत: चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है | **Proved**

evidyarthi

गणित

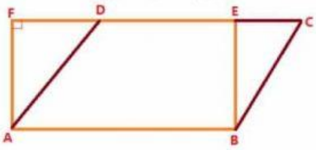
(अध्याय - 9)(समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल)

(कक्षा - 9)

प्रश्नावली 9.4 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1:

समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEF एक ही आधार पर स्थित हैं और उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज का परिमाप आयत के परिमाप से अधिक है।



उत्तर 1:

ΔAFD में,

$\angle F = 90°$ [∵आयत का कोण]

$AD > AF$ [∵ समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है]

दोनों ओर AB जोड़ने पर, $AD + AB > AF + AB$

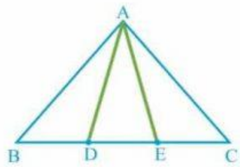
2 से गुणा करने पर' $2[AD + AB] > 2[AF + AB]$

⇒ समांतर चतुर्भुज का परिमाप > आयत का परिमाप

प्रश्न 2:

आकृति में, भुजा BC पर दो बिंदु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = DE = EC$ है। दर्शाइए कि $ar(ABD) = ar(ADE) = ar(AEC)$ है।

क्या आप अब उस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं, जो आपने इस अध्याय की 'भूमिका' में छोड़ दिया था कि "क्या बुधिया का खेत वास्तव में बराबर क्षेत्रफलों वाले तीन भागों में विभाजित हो गया है"?



उत्तर 2:

ΔABE में, AD माध्यिका है। [∵ $BD = DE$]

अतः, $ar(ABD) = ar(AED)$ ... (1)

[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

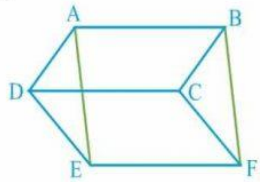
इसीप्रकार, ΔADC में, AE माध्यिका है। [∵ $DE = EC$]

अतः, $ar(ADE) = ar(AEC)$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $ar(ABD) = ar(ADE) = ar(AEC)$

प्रश्न 3:

आकृति में, ABCD, DCFE और ABFE समांतर चतुर्भुज हैं। दर्शाइए कि $ar(ADE) = ar(BCF)$ है।



उत्तर 3:

ΔADE और ΔBCF में,

$AD = BC$ [∵ समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ]

$DE = CF$ [∵ समांतर चतुर्भुज DCFE की सम्मुख भुजाएँ]

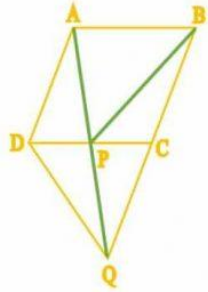
$AE = BF$ [∵ समांतर चतुर्भुज ABFE की सम्मुख भुजाएँ]

अतः, $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]

अतः, $ar(ADE) = ar(BCF)$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं]

प्रश्न 4:

आकृति में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और BC को एक बिंदु Q तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AD = CQ$ है। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि $ar(BPC) = ar(DPQ)$ है। [**संकेत**: AC को मिलाइए।]



उत्तर 4:

ΔADP और ΔQCP में,

$\angle APD = \angle QPC$ [∵ शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle ADP = \angle QCP$ [∵ एकांतर कोण]

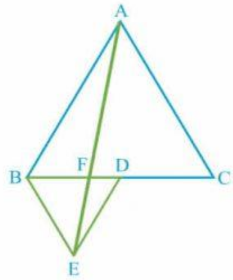
$AD = CQ$ [∵ दिया है]

अतः, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [∵ AAS सर्वांगसमता नियम]
इसलिए, DP = CP [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
ΔCDQ में, QP माध्यिका है। [∵ DP = CP]
अतः, $ar(DPQ) = ar(QPC)$ ... (1)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,
ΔPBQ में, PC माध्यिका है। [∵ AD = CQ और AD = BC ⇒ BC = QC]
अतः, $ar(QPC) = ar(BPC)$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) से, $ar(BPC) = ar(DPQ)$

प्रश्न 5:

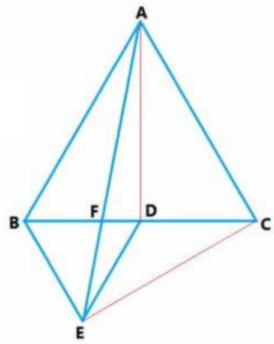
आकृति में, ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। यदि AE भुजा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि



(i) $ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ **(ii)** $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$
(iii) $ar(ABC) = 2\, ar(BEC)$ **(iv)** $ar(BFE) = ar(AFD)$
(v) $ar(BFE) = 2\, ar(FED)$ **(vi)** $ar(FED) = \frac{1}{8} ar(AFC)$
[**संकेत**: EC और AD को मिलाइए। दर्शाइए कि BE || AC और DE || AB है, इत्यादि।]

उत्तर 5:

(i) रचना: EC और AD को मिलाया।
माना, $BC = x$
इसलिए, $ar(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ [∵ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2]
तथा $ar(BDE) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^2$ [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{4} x^2\right] = \frac{1}{4}[ar(ABC)]$



(ii) ΔBEC में, ED माध्यिका है। [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BEC)$ ... (1)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
$\angle EBC = 60°$ और $\angle BCA = 60°$ [∵ समबाहु त्रिभुज के कोण]
इसलिए, $\angle EBC = \angle BCA$
यहाँ, एकांतर कोण ($\angle EBC = \angle BCA$) बराबर हैं, अतः, BE || AC
त्रिभुज BEC और BAE एक ही आधार BE और एक ही समांतर रेखाओं BE || AC के बीच स्थित हैं।
अतः, $ar(BEC) = ar(BAE)$ ... (2)
[∵ यदि त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो क्षेत्रफल में बराबर होते हैं]
समीकरण (1) और (2) से, अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$

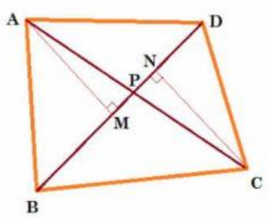
(iii) ΔBEC में, ED माध्यिका है। [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BEC)$ ... (3)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
$ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ ... (4) [∵ ऊपर **(i)** में सिद्ध किया गया है]
समीकरण (3) और (4) से, $ar(ABC) = 2\, ar(BEC)$

(iv) $\angle ABD = 60°$ और $\angle BDE = 60°$ [∵ समबाहु त्रिभुज के कोण]
इसलिए, $\angle ABD = \angle BDE$
यहाँ, एकांतर कोण ($\angle ABD = \angle BDE$) बराबर हैं, अतः,
BA || ED
त्रिभुज BDE और AED एक ही आधार ED और एक ही समांतर रेखाओं BA || ED के बीच स्थित हैं।
अतः, $ar(BDE) = ar(AED)$
[∵ यदि त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो क्षेत्रफल में बराबर होते हैं]
दोनों ओर से $ar(FED)$ घटाने पर
$ar(BDE) - ar(FED) = ar(AED) - ar(FED)$
$\Rightarrow ar(BEF) = ar(AFD)$

(v) ΔBEC में, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$
ΔLED में, $EL^2 = DE^2 - DL^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow EL = \frac{\sqrt{3}a}{4}$
इसलिए, $ar(AFD) = \frac{1}{2} \times FD \times AD = \frac{1}{2} \times FD \times \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ... (5)
तथा $ar(EFD) = \frac{1}{2} \times FD \times EL = \frac{1}{2} \times FD \times \frac{\sqrt{3}a}{4}$ ... (6)
समीकरण (5) और (6) से
$ar(AFD) = 2\, ar(FED)$ ... (7)
$\Rightarrow ar(BFE) = 2\, ar(FED)$ [∵ **(iv)** से तुलना करने पर]

(vi) $ar(BDE) = \frac{1}{4}\, ar(ABC)$ [∵ **(i)** से]
$\Rightarrow ar(BEF) + ar(FED) = \frac{1}{4}\, ar(ABC)$
$\Rightarrow ar(BEF) + ar(FED) = \frac{1}{4}[2\, ar(ADC)]$ [∵ $ar(ABC) = 2\, ar(ABC)$]
$\Rightarrow 2\, ar(FED) + ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(ADC)]$ [∵ **(v)** से]
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(AFC) - ar(AFD)]$
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(AFC) - 2ar(FED)]$ [∵समीकरण (7) से]
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}ar(AFC) - \frac{1}{2} \times 2ar(FED)$
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}ar(AFC) - ar(FED)$
$\Rightarrow 4\, ar(FED) = \frac{1}{2}ar(AFC)$
$\Rightarrow ar(FED) = \frac{1}{8}ar(AFC)$

प्रश्न 6:
चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$ है। [**संकेत**: A और C से BD पर लम्ब खींचिए।]

उत्तर 6:


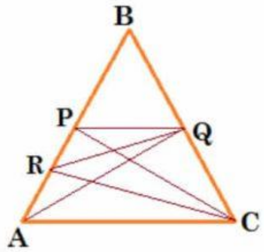
रचना: A और C से BD पर लम्ब AM और CN खींचिए।
$ar(APB) \times ar(CPD) = \frac{1}{2} \times BP \times AM \times \frac{1}{2} \times PD \times CN$ ... (1)
$ar(APD) \times ar(BPC) = \frac{1}{2} \times PD \times AM \times \frac{1}{2} \times BP \times CN$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) से, $ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$

प्रश्न 7:

P और Q क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं तथा R रेखाखंड AP का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि:

(i) $ar(PRQ) = \frac{1}{2}ar(ARC)$ **(ii)** $ar(RQC) = \frac{3}{8}ar(ABC)$ **(iii)** $ar(PBQ) = ar(ARC)$

उत्तर 7:



रचना: AQ, PC, RC तथा RQ को मिलाया।

(i) ΔAPQ में, QR माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(PQR) = \frac{1}{2}ar(APQ)$ ... (1)

[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,

ΔAQB में, QP माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(APQ) = \frac{1}{2}ar(ABQ)$ ... (2)

तथा ΔABC में, AQ माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(ABQ) = \frac{1}{2}ar(ABC)$ ... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

$ar(PQR) = \frac{1}{8}ar(ABC)$ ... (4)

ΔARC में, CR माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(ARC) = \frac{1}{2}ar(APC)$ ... (5)

[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,

ΔABC में, CP माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(APC) = \frac{1}{2}ar(ABC)$ ... (6)

समीकरण (5) और (6) से

$ar(ARC) = \frac{1}{4}ar(ABC)$ ... (7)

समीकरण (4) और (7) से

$$ar(PQR) = \frac{1}{8}ar(ABC) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}ar(ABC)\right] = \frac{1}{2}ar(ARC)$$

(ii) $ar(RQC) = ar(RQA) + ar(AQC) - ar(ARC)$ ... (8)

ΔPQA में, QR माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(RQA) = \frac{1}{2}ar(PQA)$ ... (9)

ΔAQB में, PQ माध्यिका है।

अतः, $ar(PQA) = \frac{1}{2}ar(AQB)$ ... (10)

ΔABC में, AQ माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(AQB) = \frac{1}{2}ar(ABC)$ ... (11)

समीकरण (9), (10) और (11) से

$ar(RQA) = \frac{1}{8}ar(ABC)$ ... (12)

ΔABC में, AQ माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(AQC) = \frac{1}{2}ar(ABC)$ ... (13)

ΔAPC में, CR माध्यिका है।

अतः, $ar(ARC) = \frac{1}{2}ar(APC)$ ... (14)

ΔABC में, CP माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(\text{APC}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (15)

समीकरण (14) और (15) से

$ar(\text{ARC}) = \frac{1}{4}ar(\text{ABC})$ ... (16)

समीकरण (8), (12), (13) और (16) से

$$ar(\text{RQC}) = \frac{1}{8}ar(\text{ABC}) + \frac{1}{2}ar(\text{ABC}) - \frac{1}{4}ar(\text{ABC}) = \frac{3}{8}ar(\text{ABC})$$

(iii) ΔABQ में, PQ माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(\text{PBQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABQ})$ ... (17)

ΔABC में, AQ माध्यिका है।

अतः, $ar(\text{ABQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (18)

समीकरण (16), (17) और (18) से

$ar(\text{PQB}) = ar(\text{ARC})$

प्रश्न 8:

आकृति में, ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB पर बने वर्ग हैं। रेखाखंड AX ⊥ DE भुजा BC को बिंदु Y पर मिलता है। दर्शाइए कि:

(i) $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$

(ii) $ar(\text{BYXD}) = 2\, ar(\text{MBC})$

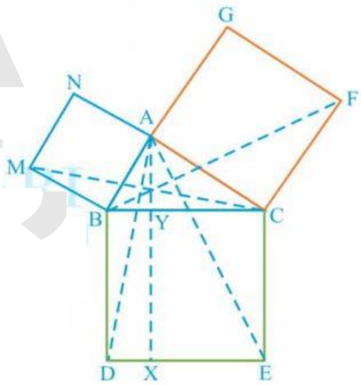
(iii) $ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$

(iv) $\Delta\text{FCB} \cong \Delta\text{ACE}$

(v) $ar(\text{CYXE}) = 2\, ar(\text{FCB})$

(vi) $ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

(vii) $ar(\text{BCED}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$



उत्तर 8:

(i) ΔMBC और ΔABD में,

AB = AC [∵ वर्ग की भुजा]

$\angle$MBC = $\angle$ABD [∵ प्रत्येक 90° + $\angle$ABC]

MB = AB [∵ वर्ग की भुजा]

अतः, $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(ii) त्रिभुज ABD और समांतर चतुर्भुज BYXD एक ही आधार BD और एक ही समांतर रेखाओं AX || BD के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ABD}) = \frac{1}{2}ar(\text{BYXD})$ ... (1)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

लेकिन, $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

इसलिए, $ar(\text{MBC}) = ar(\text{ABD})$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$ar(\text{MBC}) = \frac{1}{2}ar(\text{BYXD})$ ... (3)

$\Rightarrow 2\, ar(\text{MBC}) = ar(\text{BYXD})$

(iii) त्रिभुज MBC और वर्ग ABMN एक ही आधार MB और एक ही समांतर रेखाओं MB || NC के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{MBC}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABMN})$ ... (4)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

समीकरण (3) और (4) से

$ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$

(iv) ΔACE और ΔBCF में,

CE = BC	[∵ वर्ग की भुजा]
∠ACE = ∠BCF	[∵ प्रत्येक 90° + ∠BCA]
AC = CF	[∵ वर्ग की भुजा]
अतः, ΔACE ≅ ΔBCF	[∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(v) त्रिभुज ACE और वर्ग CYXE एक ही आधार CE और एक ही समांतर रेखाओं CE || AX के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ACE}) = \frac{1}{2}ar(\text{CYXE})$

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

$\Rightarrow ar(\text{FCB}) = \frac{1}{2}ar(\text{CYXE})$ ... (5) [∵ $ar(\text{FCB}) = ar(\text{ACE})$]

$\Rightarrow 2\ ar(\text{FCB}) = ar(\text{CYXE})$

(vi) त्रिभुज BCF और वर्ग ACFG एक ही आधार CF और एक ही समांतर रेखाओं CF || FG के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{BCF}) = \frac{1}{2}ar(\text{ACFG})$ ... (6)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

समीकरण (5) और (6) से

$\Rightarrow ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

(vii) भाग (iii) और (vi) से

$ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$ तथा $ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

दोनों को जोड़ने पर

$ar(\text{BYXD}) + ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$

$\Rightarrow ar(\text{BCED}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$