गणित

पाठ–1 वास्तविक संख्या

(कक्षा 10)

Exercise 1.1

प्रश्न 1.

निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडो के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 140 **(ii)** 156 **(iii)** 3825 **(iv)** 5005 **(v)** 7429

उत्तर 1:

(i) $140 = 2\times2\times5\times7 = 2^2\times5\times7$

(ii) $156 = 2\times2\times3\times13 = 2^2\times3\times13$

(iii) $3825 = 3\times3\times5\times5\times17 = 3^2\times5^2\times17$

(iv) $5005 = 5\times7\times11\times13$

(v) $7429 = 17\times19\times23$

प्रश्न 2.

पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मो के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM है।

(i) 26 और 91 **(ii)** 510 और 92 **(iii)** 336 और 54

उत्तर 2:

(i) 26 और 91

$26 = 2\times13$

$91 = 7\times13$

HCF = 13

LCM = $2\times7\times13 = 182$

दो संख्याओं का गुणनफल = $26\times91 = 2366$

HCF×LCM = $13\times182 = 2366$

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

(ii) 510 और 92

$510 = 2\times3\times5\times17$

$92 = 2\times2\times23$

HCF = 2

LCM = $2\times2\times3\times5\times17\times23 = 23460$

दो संख्याओं का गुणनफल = $510\times92 = 46920$

HCF×LCM = $2\times23460 = 46920$

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

(iii) 336 और 52

$336 = 2\times2\times2\times2\times3\times7 = 2^4\times3\times7$

$54 = 2\times3\times3\times3 = 2\times3^3$

$HCF = 2\times3 = 6$

$LCM = 2^4\times3^3\times7 = 3024$

दो संख्याओं का गुणनफल $= 336\times54 = 18144$

$HCF\times LCM = 6\times3024 = 18144$

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

प्रश्न 3.

अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्लिखित पूर्णांकों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए:

(i) 12, 15 और 21 **(ii)** 17, 23 और 29 **(iii)** 8, 9 और 25

उत्तर 3:

(i) 12, 15 और 21

$12 = 2\times2\times3 = 2^2\times3$

$15 = 3\times5$

$21 = 3\times7$

$HCF = 3$

$LCM = 2^2\times3\times5\times7 = 420$

(ii) 17, 23 और 29

$17 = 1\times17$

$23 = 1\times23$

$29 = 1\times29$

$HCF = 1$

$LCM = 17\times23\times29 = 11339$

(iii) 8, 9 और 25

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

$9 = 3\times3 = 3^2$

$25 = 5\times5 = 5^2$

$HCF = 1$

$LCM = 2^3\times3^2\times5^2 = 8\times9\times25 = 1800$

प्रश्न 4.

HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

HCF (306, 657) = 9

हम जानते हैं,

LCM × HCF = दो संख्याओं का गुणनफल

इसलिए,

$$\text{LCM} = \frac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\text{HCF}} = \frac{306 \times 657}{9} = 22338$$

इसप्रकार, LCM (306, 657) = 22338

प्रश्न 5.

जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

उत्तर 5:

यदि कोई संख्या अंक 0 पर समाप्त हो सकती है, तो वह 10 से विभाजित होती है या दूसरे शब्दों यह संख्या 2 और 5 से विभाजित होगी।

क्योंकि 10 = 2 × 5

6^n का अभाज्य गुणनखंडन = $(2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$।

6^n के अभाज्य गुणनखंडन में 5 नहीं है। इसलिए 6^n, 5 से विभाजित नहीं होगा।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 6^n के गुणनखंड में 2 और 3 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है।

अतः, किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त नहीं हो सकती है।

प्रश्न 6.

व्याख्या कीजिए कि 7 × 11 × 13 + 13 और 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5 भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।

उत्तर 6:

भाज्य संख्याओं के दो से अधिक भाजक होते हैं।

दी गई संख्या = 7 × 11 × 13 + 13

$= 13 \times (7 \times 11 + 1)$

$= 13 \times (77 + 1)$

$= 13 \times 78$

$= 13 \times 13 \times 6$

इसप्रकार, इस संख्या के दो से अधिक भाजक (1, 6, 13 और ये संख्या) हैं। इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

अब दूसरी दी गई संख्या $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5 \times (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

$= 5 \times (1008 + 1)$

$= 5 \times 1009$

इसप्रकार, इस संख्या के दो से अधिक भाजक (1, 5, 1009 और ये संख्या) हैं। इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

प्रश्न 7.

किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

उत्तर 7:

रवि को 12 मिनट लगते हैं जबकि सोनिया को 18 मिनट लगते हैं एक समय बाद दोनों अपने प्रारम्भ स्थान पर होंगे और वह समय 12 और 18 का LCM होगा।

$18 = 2 \times 3 \times 3$ और,

$12 = 2 \times 2 \times 3$

12 और 18 का LCM $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

इसप्रकार, रवि और सोनिया 36 मिनट बाद दोनों अपने प्रारम्भ स्थान पर होंगे ।

गणित

पाठ–1 वास्तविक संख्या

(कक्षा 10)

प्रश्न 1. **Exercise 1.2**

सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 1:

माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$a = \sqrt{5}b$

$\Rightarrow a^2 = 5b^2$ ....(1)

अतः, 5, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, a को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $a = 5k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में a मान रखने पर,

$$(5k)^2 = 5b^2$$
$$\Rightarrow 5k^2 = b^2$$

अतः, 5, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, b को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2.

सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 2:

माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

उत्तर 3:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow 2a^2 = b^2$ ....(1)

अतः, 2, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, b को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $b = 2k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

$$3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-3\right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-3\right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6+\sqrt{2}$

उत्तर 3:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow 2a^2=b^2$ ....(1)

अतः, 2, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, b को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $b=2k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6+\sqrt{2}$

माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6 = \frac{a - 6b}{b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी ।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।