

10. वृत्त

प्रश्नावली 10.1

Q1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

उत्तर : अनेक |

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

- (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है |
- (ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते हैं |
- (iii) एक वृत्त की समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं |
- (iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं |

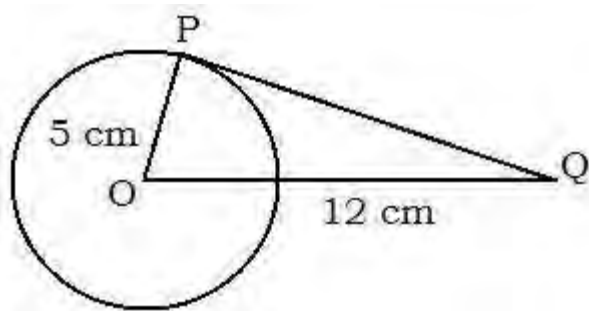
उत्तर:

- (i) एक
- (ii) जीवा
- (iii) दो
- (iv) स्पर्श बिंदु

Q3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है की $OQ = 12$ सेमी | PQ की लंबाई है :

- (A) 12 सेमी
- (B) 13 सेमी
- (C) 8.5 सेमी
- (D) $\sqrt{119}$ सेमी

उत्तर : (D)



$$PQ^2 = OQ^2 - PO^2$$

$$= 12^2 - 5^2$$

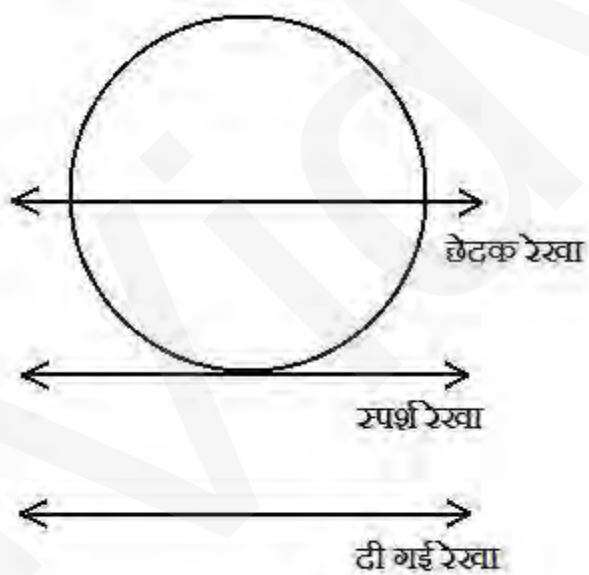
$$= 144 - 25$$

$$= 119$$

$$PQ = \sqrt{119} \text{ सेमी}$$

Q4. एक वृत्त खींचिए और दो एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए की उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।

उत्तर :



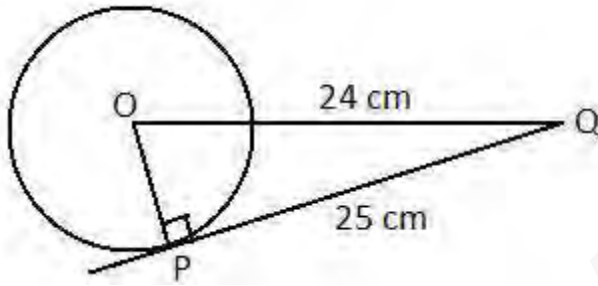
प्रश्नावली 10.2

प्रश्न सं. 1,2, 3 में सही विकल्प चुनिए एवं उचित कारण दीजिए ।

Q1. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है । वृत्त की त्रिज्या है :

- (A) 7 cm
- (B) 12 cm
- (C) 15 cm
- (D) 24.5 cm

उत्तर :



त्रिज्या (OP) = ?

OQ = 24 cm, PQ = 25 cm

चूँकि $OP \perp PQ$ है, पैथागोरस प्रमेय से -

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$$

$$25^2 = OP^2 + 24^2$$

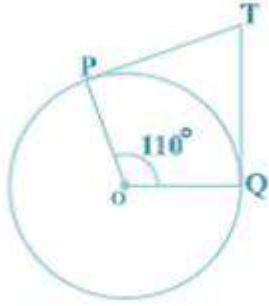
$$OP^2 = 625 - 576$$

$$OP^2 = 49$$

$$OP = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

Q2. आकृति 10.11 में, यदि TP केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं की $\angle POQ = 110^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है :

- (A) 60°
- (B) 70°
- (C) 80°
- (D) 90°



आकृति 10.11

उत्तर : (B) 70°

हल : $\angle POQ + \angle PTQ = 180^\circ$

$$\Rightarrow 110^\circ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\Rightarrow 70^\circ$$

Q3. यदि एक बिन्दु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है:

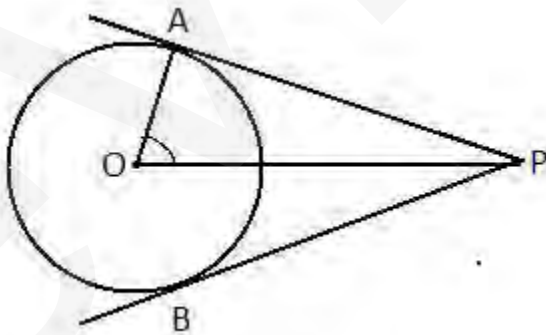
(A) 50°

(B) 60°

(C) 70°

(D) 80°

उत्तर : (A) 50°



दिया है : $\angle APB = 80^\circ$

इसलिए, $\angle APO = 80^\circ / 2 = 40^\circ$

स्पर्श बिंदु पर $\angle A = 90^\circ$

त्रिभुज AOP में,

$$\Rightarrow \angle A + \angle APO + \angle POA = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 40^\circ + \angle POA = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - 130^\circ$$

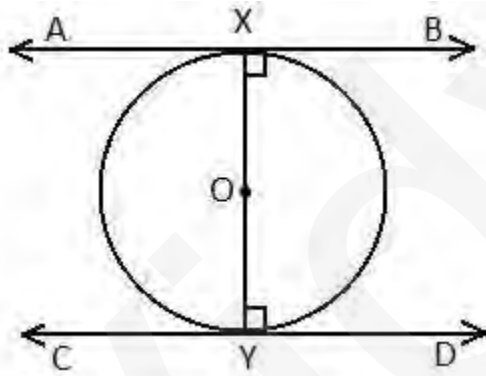
$$\Rightarrow \angle POA = 50^\circ$$

Q4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती है ।

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा CD हैं जो वृत्त को X तथा Y पर क्रमशः स्पर्श करती है ।

सिद्ध करना है : $AB \parallel CD$



प्रमाण :

$OX \perp AB$ (स्पर्श बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श बिंदु पर लंब होती है)

अतः $\angle BXO = 90^\circ$ (i)

इसीप्रकार, $OY \perp CD$

अतः $\angle DYO = 90^\circ$ (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$$\angle BXO + \angle DYO = 90^\circ + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BXO + \angle DYO = 180^\circ$$

चूँकि एक ही ओर से अंतःआसन्न कोण संपूरक हैं, इसलिए

AB || CD Proved

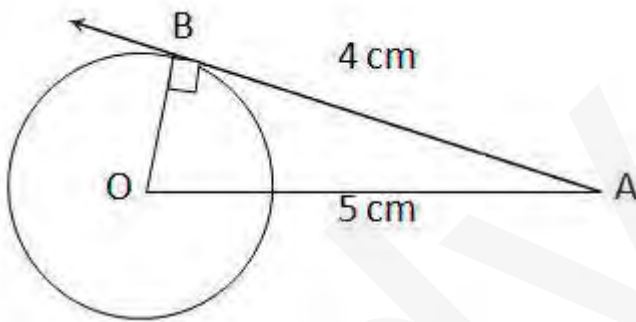
Q5. सिद्ध कीजिए की स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

Q6. एक बिन्दु A से जो एक वृत्त के केंद्र से 5cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : बिंदु A से केंद्र की दूरी (OA) = 5 cm

स्पर्श रेखा AB की लंबाई = 4 cm

वृत्त की त्रिज्या OB = ?



समकोण त्रिभुज AOB में, पैंथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$5^2 = OB^2 + 4^2$$

$$5^2 - 4^2 = OB^2$$

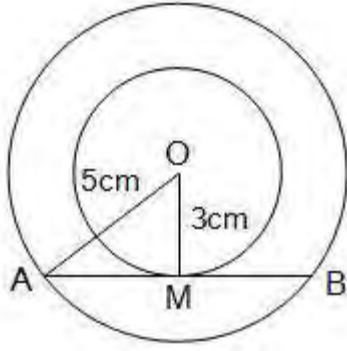
$$25 - 16 = OB^2$$

$$OB^2 = 9$$

$$OB = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

Q7. दो सकेन्द्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm है। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल :



दो संकेंद्री वृत्त जिसका केंद्र O है और बड़े वृत्त की

जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती है।

त्रिज्याएँ क्रमशः $AO = 5 \text{ cm}$ और $OM = 3 \text{ cm}$ है।

$OM \perp AB$ है। (चूँकि जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखाखण्ड जीवा पर लंब होती है।)

अतः समकोण त्रिभुज AOM में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$5^2 = 3^2 + AM^2$$

$$5^2 - 3^2 = AM^2$$

$$25 - 9 = AM^2$$

$$AM^2 = 16$$

$$AM = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{अतः } AB = 2 \times AM$$

$$= 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$$

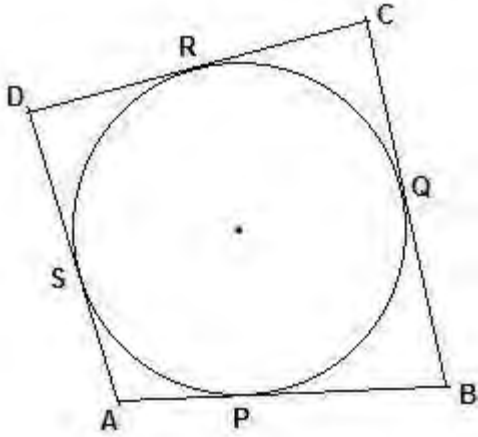
जीवा की लंबाई 8 cm है।

Q8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज **ABCD** खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12)। सिद्ध कीजिए : **$AB + CD = AD + BC$** .

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है। रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमशः बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है : $AB + CD = AD + BC$



प्रमाण : P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अतः $AP = AS$ (i) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती हैं |)

इसीप्रकार,

$BP = BQ$ (ii)

$CR = CQ$ (iii)

और $DR = DS$ (iv)

समी० (i), (ii), (iii) और (iv) जोड़ने पर

$$AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ$$

$$AB + CD = AD + BC \text{ **Proved**}$$

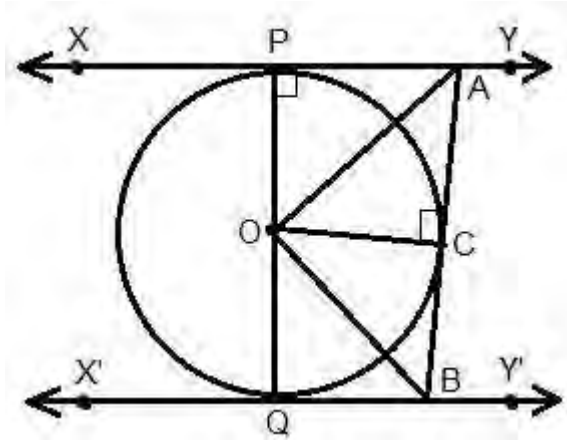
Q9. आकृति 10.13 में XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है | सिद्ध कीजिए की $\angle AOB = 90^\circ$ है |

हल :

दिया है : XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : $\angle AOB = 90^\circ$

प्रमाण :



$\triangle AOP$ और $\triangle AOC$ में

$$PA = CA \quad (\text{भुजा}) \text{ प्रमेय 10.2 से}$$

$$\angle APO = \angle ACO = 90^\circ \text{ प्रत्येक}$$

$$AO = AO \quad \text{उभयनिष्ठ कर्ण}$$

RHS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOP \cong \triangle AOC$$

$$\text{इसलिए, } \angle PAO = \angle CAO \quad (\text{i) BY CPCT}$$

$$\text{इसीप्रकार } \triangle BOQ \cong \triangle BOC$$

$$\text{इसलिए, } \angle QBO = \angle CBO \quad (\text{ii) BY CPCT}$$

अब $XY \parallel X'Y'$ दिया है।

$$\text{इसलिए, } \angle PAC + \angle QBC = 180^\circ \quad (\text{तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोणों का योग})$$

$$\text{या } (\angle PAO + \angle CAO) + (\angle QBO + \angle CBO) = 180^\circ$$

$$\text{या } (\angle CAO + \angle CAO) + (\angle CBO + \angle CBO) = 180^\circ \quad (\text{समी० (i) तथा (ii) के प्रयोग से})$$

$$\text{या } 2 \angle CAO + 2 \angle CBO = 180^\circ$$

$$\text{या } 2 (\angle CAO + \angle CBO) = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle CAO + \angle CBO = \frac{180^\circ}{2}$$

या $\angle CAO + \angle CBO = 90^\circ$ (iii)

अब त्रिभुज AOB में,

$$\angle AOB + \angle CAO + \angle CBO = 180^\circ$$

$$\angle AOB + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ$$

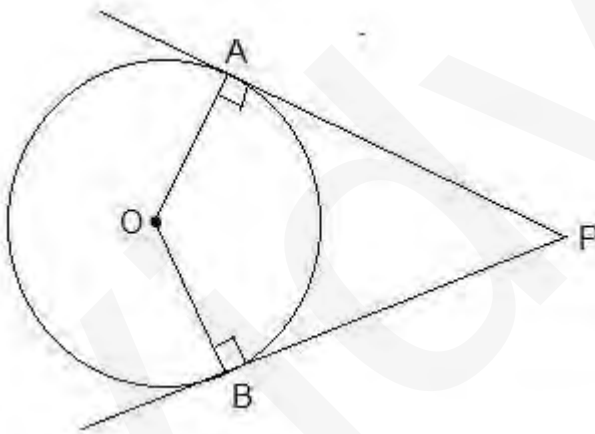
$$\angle AOB = 90^\circ \text{ Proved}$$

Q10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की बाह्य बिंदु P से खींची गई स्पर्श रेखाओं AP तथा BP है।

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$



प्रमाण :

$OA \perp AP$ और $OB \perp BP$ (चूँकि स्पर्श रेखा से केंद्र को मिलाने वाली रेखाखंड लंब होती है।)

अतः $\angle OAP = 90^\circ$ (i)

और $\angle OBP = 90^\circ$ (ii)

चूँकि APBO एक चतुर्भुज है इसलिए,

$$\angle OAP + \angle AOB + \angle OBP + \angle APB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \angle AOB + 90^\circ + \angle APB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 180^\circ + \angle AOB + \angle APB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 360^\circ - 180^\circ$$

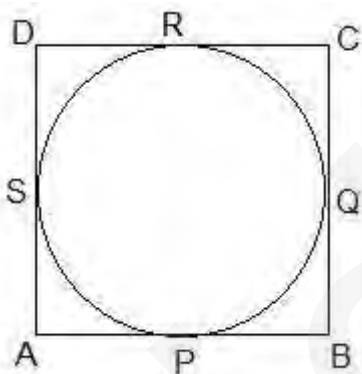
$$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 180^\circ \text{ **Proved**}$$

Q11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है ।

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना समांतर चतुर्भुज है । रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमशः बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं ।

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है ।



प्रमाण : चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है इसलिए

$$AB = CD \dots\dots\dots (i) \text{ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)}$$

$$\text{इसीप्रकार, } BC = AD \dots\dots\dots (ii)$$

अब, P और S स्पर्श बिंदु हैं ।

$$\text{अतः } AP = AS \dots\dots\dots (iii) \text{ प्रमेय 10.2 से}$$

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती हैं ।)

इसीप्रकार,

$$BP = BQ \dots\dots\dots (iv)$$

$$CR = CQ \dots\dots\dots (v)$$

$$\text{और } DR = DS \dots\dots\dots (vi)$$

समी० (iii), (iv), (v) और (vi) जोड़ने पर

$$AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ$$

$$\text{या } AB + CD = AD + BC$$

$$\text{या } AB + AB = AD + AD \text{ समी० (i) तथा (ii) से}$$

$$\text{या } 2 AB = 2 AD$$

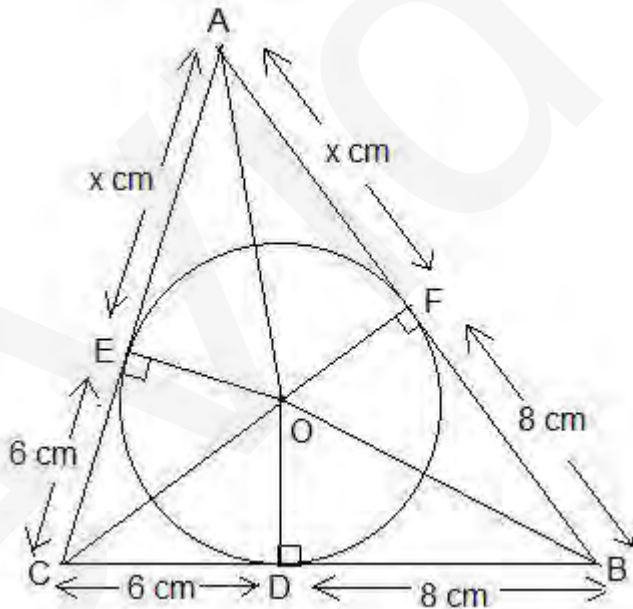
$$\text{या } AB = AD \dots\dots\dots (vii)$$

समीकरण (i), (ii) और (vii) से

$$AB = BC = CD = AD$$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है | **Proved**

Q12. 4cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज **ABC** इस प्रकार खींचा गया है की रेखाखंड **BD** और **DC** (जिनमें स्पर्श बिन्दु **D** द्वारा **BC** विभाजित है) की लंबाई क्रमशः **8 cm** और **6 cm** हैं (देखिए आकृति 10.14) | भुजाएँ **AB** और **AC** ज्ञात कीजिए |



हल : माना $AF = AE = x \text{ cm}$ (प्रमेय 10.2 से)

इसी प्रकार $CD = CE = 6 \text{ cm}$

और $BD = BF = 8 \text{ cm}$

अतः $AB = 8 + x \text{ cm}$, $BC = 8 + 6 = 14 \text{ cm}$ और $AC = 6 + x \text{ cm}$

$OD = OF = OE = 4 \text{ cm}$ (त्रिज्या)

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल हेरॉन सूत्र से

$a = 8 + x \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$ और $c = 6 + x \text{ cm}$

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{8+x + 14 + 6 + x}{2} = \frac{28 + 2x}{2}$$

$$s = \frac{2(14 + x)}{2} = 14 + x$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-(8+x)][14+x-14][14+x-(6+x)]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-8-x][x][14+x-6-x]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[6][x][8]}$$

$$= \sqrt{48x(14+x)} \text{ cm}^2 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \text{ar}(\triangle AOB) + \text{ar}(\triangle BOC) + \text{ar}(\triangle AOC)$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times OF + \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE$$

$$= \frac{1}{2} (AB \times OF + BC \times OD + AC \times OE)$$

$$= \frac{1}{2} (8 + x \times 4 + 14 \times 4 + 6 + x \times 4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 (8 + x + 14 + 6 + x)$$

$$= 2(28 + 2x) \text{ cm}^2 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से चूँकि दोनों त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल हैं |

$$\sqrt{48x(14+x)} \text{ cm}^2 = 2(28 + 2x) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [2(28 + 2x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [4(14 + x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [4 \times 4 (14 + x)(14 + x)]$$

$$\Rightarrow 48x = 16 (14 + x) \text{ सरल करने पर}$$

$$\Rightarrow 3x = (14 + x) \text{ सरल करने पर}$$

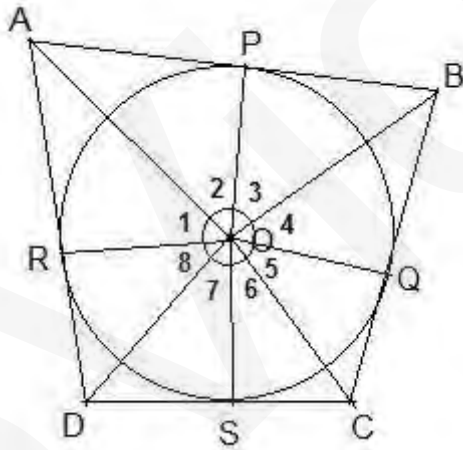
$$\Rightarrow 3x - x = 14$$

$$\Rightarrow 2x = 14$$

$$\Rightarrow x = 7$$

अतः भुजाएँ $AB = 8 + 7 = 15 \text{ cm}$ और $AC = 6 + 7 = 13 \text{ cm}$

Q13. सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं |



हल :

दिया है : ABCD O केंद्र वाले एक वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है |

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

प्रमाण : $\triangle AOP \cong \triangle AOR$ प्रमेय 10.2 से

अतः $\angle 1 = \angle 2$ (i) संगत भाग

इसी प्रकार,

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (ii)}$$

$$\angle 5 = \angle 6 \text{ (iii)}$$

$$\angle 7 = \angle 8 \text{ (iv)}$$

अब $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$
(केंद्र पर अंतरित कोण)

या $\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 7 = 360^\circ$

समी० (i) (ii) (iii) और (iv) के प्रयोग से

$$\text{या } 2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 6 + 2\angle 7 = 360^\circ$$

$$\text{या } 2(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 360^\circ$$

$$\text{या } (\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\text{या } \angle AOB + \angle COD = 180^\circ \quad \text{Proved}$$