6. त्रिभुज

प्रश्नावली 6.1

Q1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सभी वृत्त ....होते है | (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग......होते हैं| (समरूप, सर्वांगसम)

(iv) सभी .... त्रिभुज समरूप होते है | (समद्विबाहु, समबाहु)

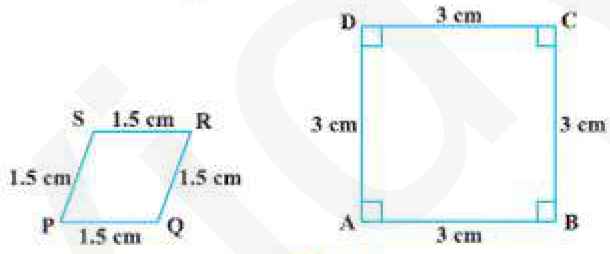
(v) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण ....हो तथा (ii) उनकी संगत ......भुजाएँ हों | (बराबर, समानुपाती|

Q2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न -भिन्न उदाहरण दीजिए :

(i) समरूप आकृतियाँ

(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं |

Q3. बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं :



आकृति 6.8

प्रश्नावली 6.2

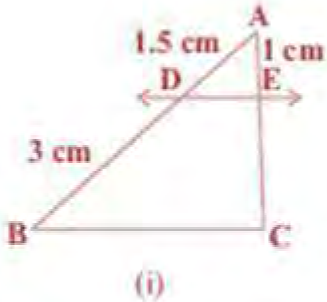
Q1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, DE || BC में AD ज्ञात कीजिए :

हल: (i)

Δ ABC में

DE || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय से



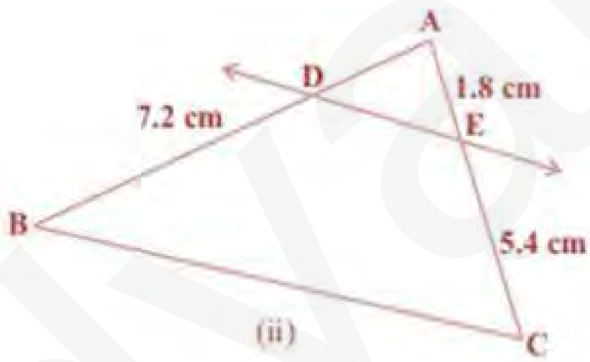
$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \quad \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$

$\Rightarrow \quad 1.5\ CE = 3$

$\Rightarrow \quad CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$

$\Rightarrow \quad CE = 2$



हल: (ii)

Δ ABC में

DE || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \quad \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$

$\Rightarrow \quad 1.5\ CE = 3$

$\Rightarrow \quad CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$

$\Rightarrow \quad CE = 2$

Q2. किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं | निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF|| QR है |

(i) PE = 3.9 cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, 0.18 cm और PF = 0.36 cm

हल Q2:

(i) PE = 3.9 cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4 cm

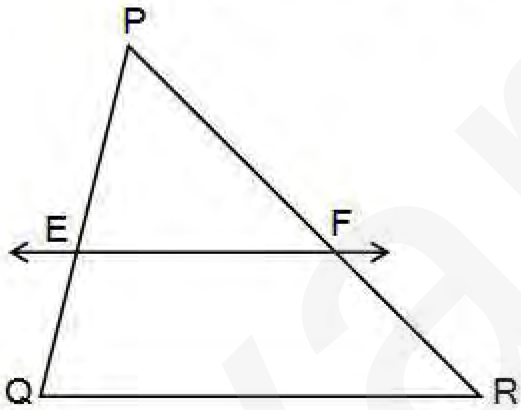
$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$

$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$

$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$

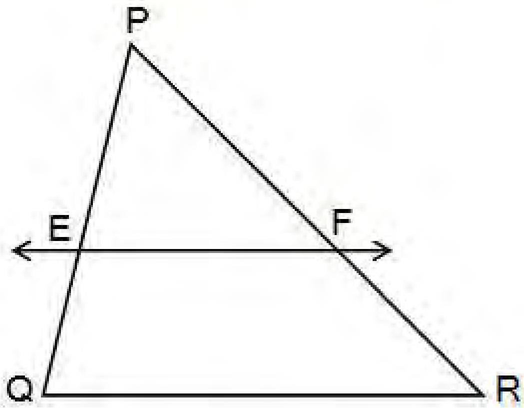
$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$



इसलिए, EF|| QR नहीं है |

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

$\therefore \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$



$\Rightarrow \quad \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

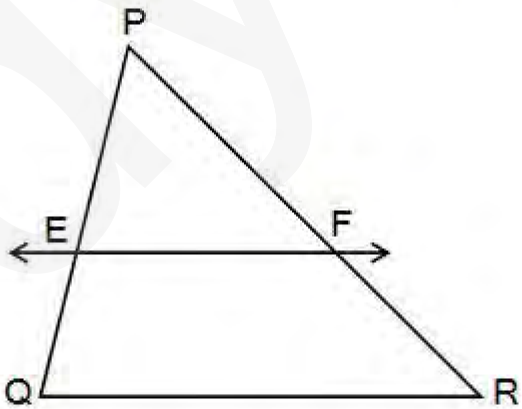
$\Rightarrow \quad \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, EF|| QR है |

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm और PF = 0.36 cm

$\therefore \quad \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$



$\Rightarrow \quad \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$

$\Rightarrow \quad \frac{18}{128} = \frac{36}{256}$

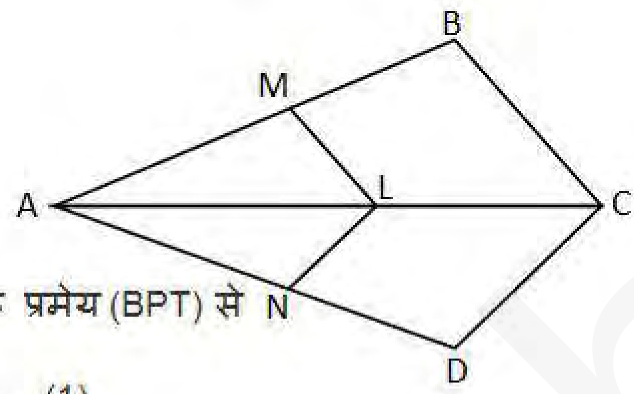
$\Rightarrow \quad \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, EF|| QR है |

Q3. आकृति 6.18 में यदि LM || CB और LN || CD हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ **है |**

हल:



Δ ABC में

ML || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL}$ .....(1)

Δ ACD में

NL || DC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL}$ .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

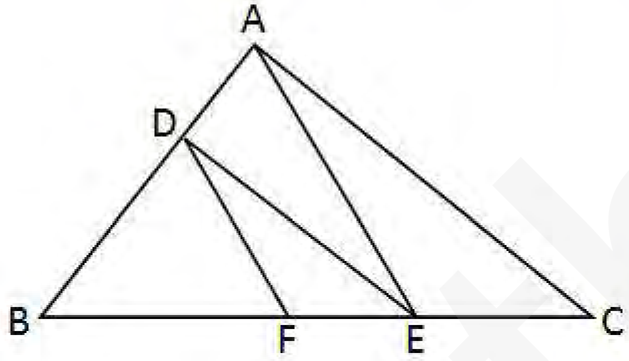
$$\frac{BM + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$$

पुन: व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ **Proved**

Q4. आकृति 6.19 में DE || AC और DF || AE है | सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है



हल:

Δ ABC में

DE || AC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC} \qquad .....(1)$

Δ ABE में

DF || AE दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

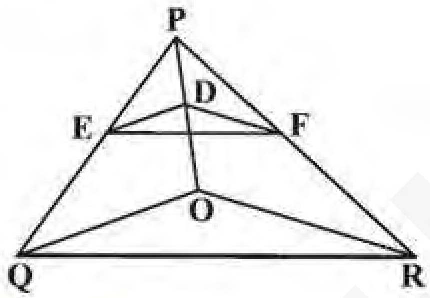
$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE} \qquad .....(2)$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

Q5. आकृति 6.20 में DE || OQ और OR है | दर्शाइए की EF || QR है |

हल:



Δ POQ में

DE || OQ दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO}$ .....(1)

Δ POR में

DF || OR दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO}$ .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

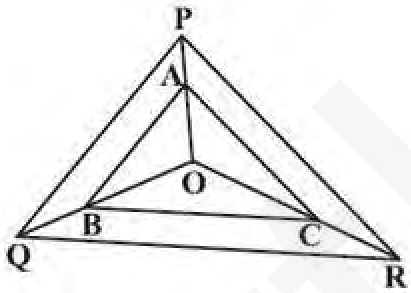
चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है |

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

EF || QR **Proved**

Q6. आकृति 6.21 में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A,B और C इस प्रकार है कि AB || PQ और AC || PR है | दर्शाइए कि BC || QR है |

हल:



Δ POQ में,

AB || PQ दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Δ POR में

AC || PR दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \qquad \ldots\ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

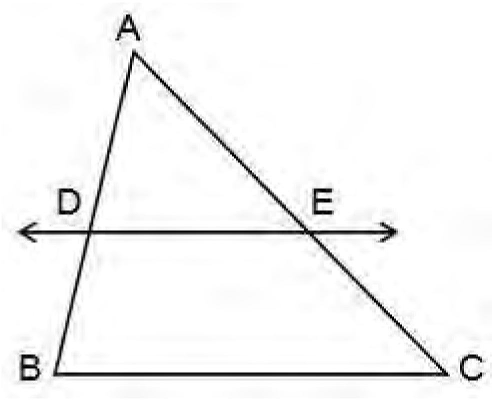
$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है |

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

BC || QR **Proved**

Q7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य -बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है । (याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और DE || BC है |

सिद्ध करना है : AE = EC

प्रमाण : Δ ABC में

AD = BD .... (1) दिया है |

DE || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

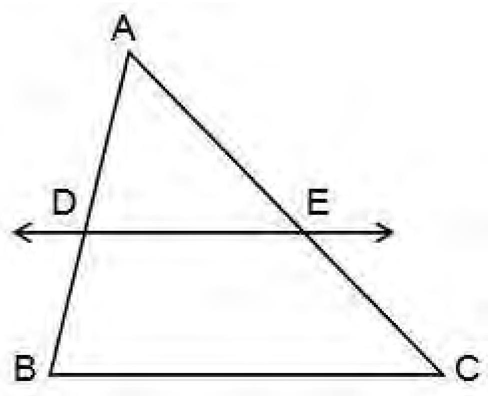
$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

अथवा $\frac{AD}{AD} = \frac{AE}{CE}$ (समीकरण 1 से)

अथवा $\frac{1}{1} = \frac{AE}{CE}$ (Bi-cross multiplication)

$\Rightarrow$ AE = EC **Proved**

Q8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है | (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं) |



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु क्रमशः

D तथा E है |

सिद्ध करना है : DE || BC

प्रमाण : Δ ABC में

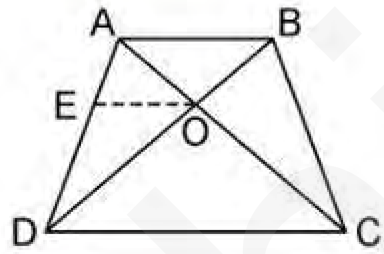
AD = BD .... (1) दिया है |

AE = EC .... (2) दिया है |

$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

अथवा $\frac{AD}{AD} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{1}$ (समीकरण 1 तथा 2 से)

Q9. ABCD एक समलंब है जिसमे AB || DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है | दर्शाइए की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है |



हल:

दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें AB || CD है | और विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

रचना : बिंदु O से AB || EO खिंचा |

प्रमाण : AB || EO .... (1) रचना से

AB || CD .... (2) दिया है |

समीकरण (1) तथा (2) से

EO || CD ....(3)

Δ ABD में

AB || EO .... रचना से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ .... (4)

इसीप्रकार, $\triangle$ ABD में

EO || CD ....(3) से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \quad \text{..........(5)}$$

समीकरण (4) तथा (4) से

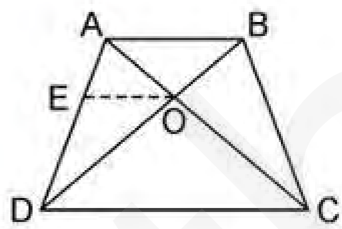
$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर]

Proved

Q10. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है | दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है |

हल:



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

और $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है |

सिद्ध करना है : ABCD एक समलंब है |

रचना : बिंदु O से AB || EO खिंचा |

प्रमाण : Δ ABD में

AB || EO .... रचना से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ .... (1)

जबकि, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

अथवा $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ ....(2) [एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर]

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

Δ ACD की संगत खंड की भुँजायें समानुपाती हैं | इसलिए **आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT)** के विलोम प्रमेय 6.2 से

EO || CD .... (3)

और

EO || AB .... (4) रचना से

समीकरण (3) तथा (4) से

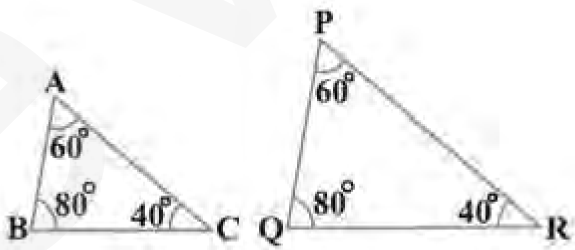
AB || CD

अत: ABCD एक समलंब है |

Proved

प्रश्नावली 6.3

Q1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन - कौन से युग्म समरूप हैं | उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देनें में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए |



हल : (i)

ΔABC तथा ΔPQR में

$\angle ABC = \angle PQR = 80°$

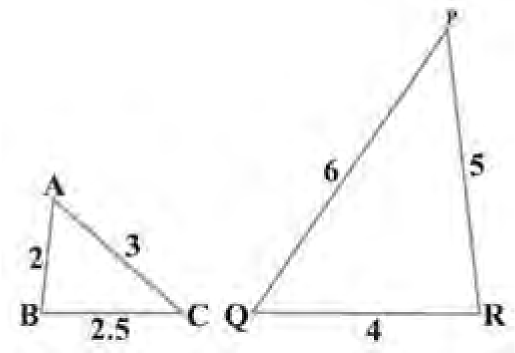
$\angle BAC = \angle QPR = 60°$

$\angle ACB = \angle PRQ = 40°$

$\therefore$ AAA समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

हल : (ii)



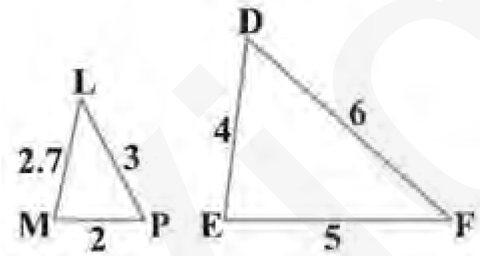
ΔABC तथा ΔQRP में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

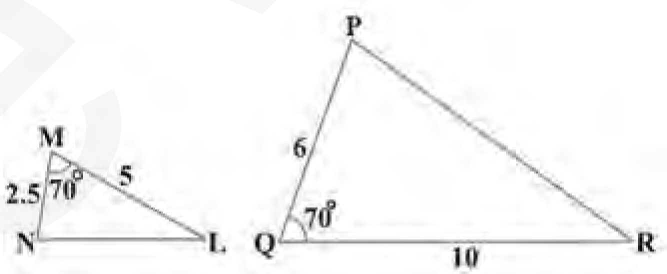
$\Delta ABC \cong \Delta QRP$

हल : (iii)



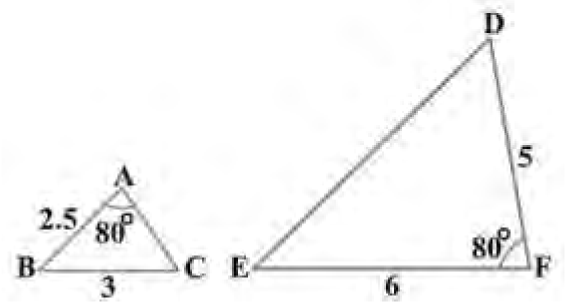
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (iv)



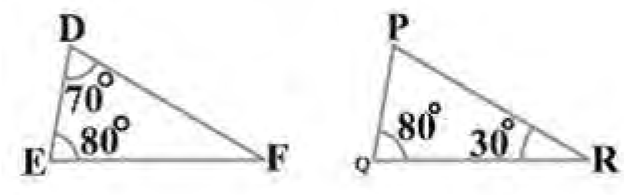
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (v)



त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (vi)



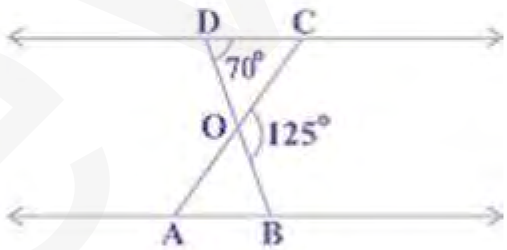
ΔABC तथा ΔQRP में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \cong \Delta QRP$

Q2. आकृति 6.35 में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^{o}$ और $\angle CDO = 70^{o}$ है | $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए |



आकृति 6.35

हल : $\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ$

$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$

अब ΔDOC में,

$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow 125^\circ \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$

$\Delta ODC \sim \Delta OBA$ (दिया है)

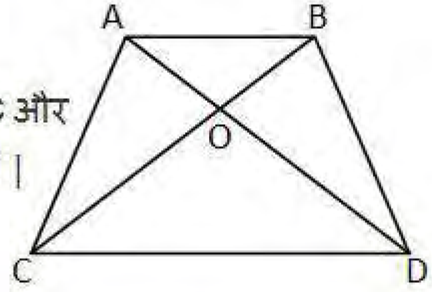
$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं|)

Q3. समलंब ABCD, जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं | दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए,

दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$ है |

हल :



दिया है : समलंब ABCD,
जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$

प्रमाण: AB || CD दिया है

$\therefore$ $\angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण) ...(1)

अब ΔAOB तथा ΔCOD में

$\angle ABO = \angle DCO$ (1) से

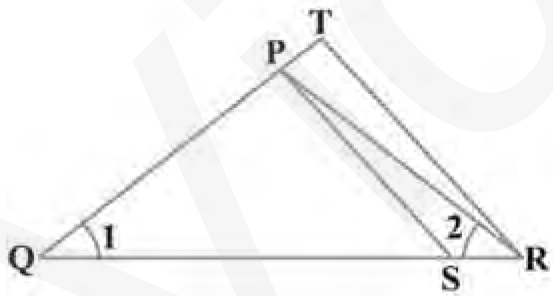
$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

$\therefore$ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं |)

Q4. आकृति 6.36 में, $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है | दर्शाइए की $\angle PQS \sim \angle TQR$ है |



हल :

दिया है : $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है |

सिद्ध करना है : $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

प्रमाण : ΔPQR में,

$\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

$\therefore$ PQ = PR (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ...(1)

और $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समी० (1) से .... (2)

ΔPQS तथा ΔTQR में

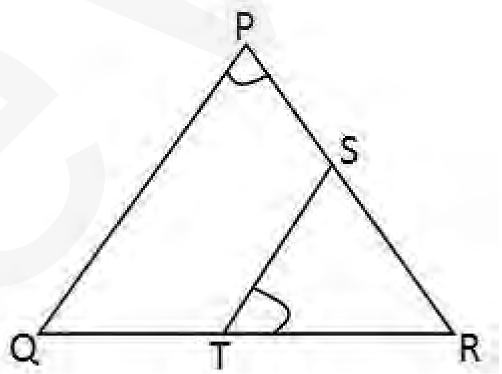
$\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समी० (2) से

$\angle 1 = \angle 1$ (उभयनिष्ठ)

SAS समरूपता कसौटी से

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$ Proved

Q5. DPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है | दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है |



हल:

दिया है : DPQR की भुजाओं PR और QR पर

क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है |

सिद्ध करना है : $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

प्रमाण : ΔRPQ तथा ΔRTS **में,**

$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

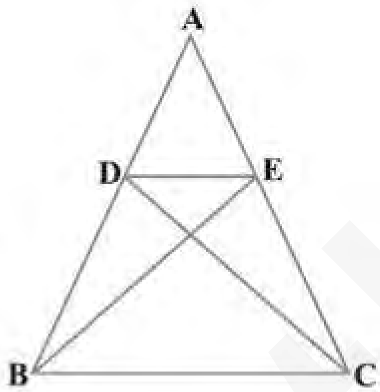
Q6. आकृति 6.37 में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है |

हल:

दिया है : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

प्रमाण : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)



$$\therefore \left.\begin{aligned} AB &= AC \\ AE &= AD \end{aligned}\right\} \text{By CPCT}$$

अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1}$ ...... (1)

ΔADE तथा ΔABC में

$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ ......समी० (1) से

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

S.A.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ Proved

Q7. आकृति 6.38 में, DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाइए कि :

(i) Δ AEP ~ Δ CDP
(ii) Δ ABD ~ Δ CBE
(iii) Δ AEP ~ Δ ADB
(iv) Δ PDC ~ Δ BEC

हल:

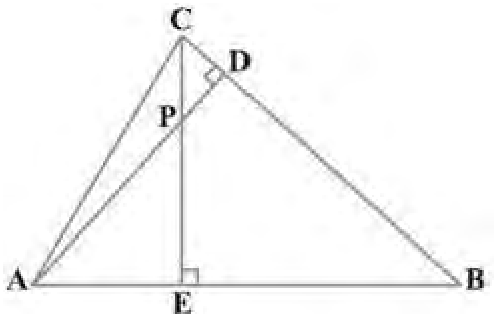
दिया है : DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है :

(i) Δ AEP ~ Δ CDP
(ii) Δ ABD ~ Δ CBE

(iii) Δ AEP ~ Δ ADB
(iv) Δ PDC ~ Δ BEC

प्रमाण :



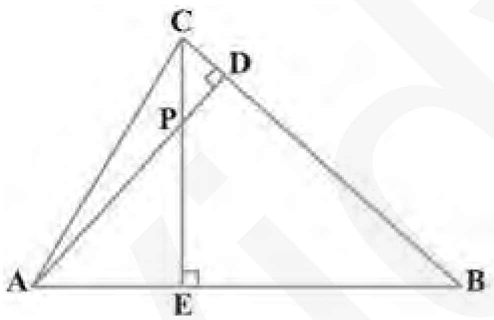
(i) Δ AEP तथा Δ CDP में,

∠AEP = ∠CDP (प्रत्येक 90°)

∠APE = ∠CPD (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ AEP ~ Δ CDP



(ii) Δ ABD तथा CBE में

∠ADB = ∠CEB (प्रत्येक 90°)

∠B = ∠B (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ ABD ~ Δ CBE

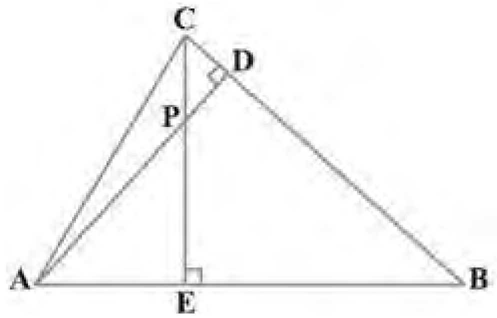
(iii) Δ AEP तथा Δ ADB में

∠AEP = ∠ADB (प्रत्येक 90°)

∠A = ∠A   (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ AEP ~ Δ ADB



(iv) Δ PDC तथा Δ BEC में

∠PDC = ∠BEC (प्रत्येक 90°)

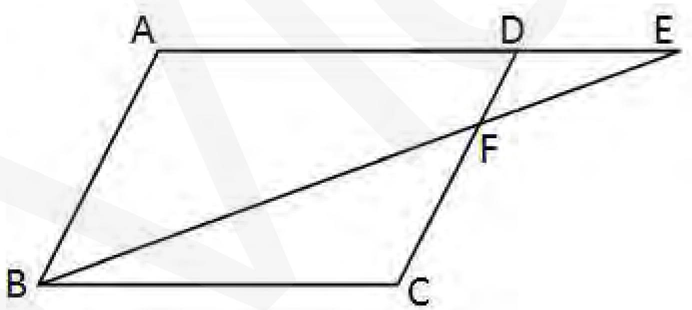
∠C = ∠C   (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ PDC ~ Δ BEC

Q8. समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है | दर्शाइए कि Δ ABE ~ Δ CFB है |

हल:



दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : Δ ABE ~ Δ CFB

प्रमाण : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है |

∠AEB = ∠CBE .... (1) एकान्तर कोण

Δ ABE तथा Δ CFB में,

∠AEB = ∠CBE समी० (1) से

∠A = ∠C (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ ABE ~ Δ CFB

Q9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं | सिद्ध कीजिए कि :

(i) Δ ABC ~ Δ AMP

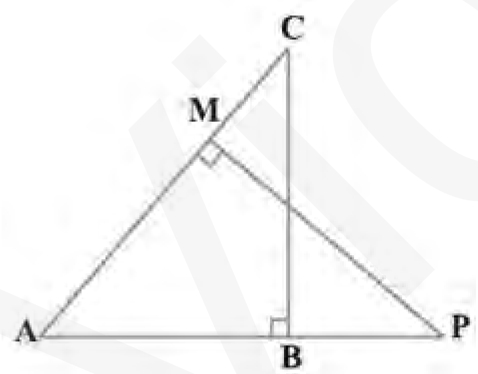
(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

हल:

दिया है : ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं |

सिद्ध करना है :

(i) Δ ABC ~ Δ AMP



(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

प्रमाण :

(i) Δ ABC तथा Δ AMP में

∠ABC = ∠AMP (प्रत्येक 90°)

∠A = ∠A   (उभयनिष्ठ)

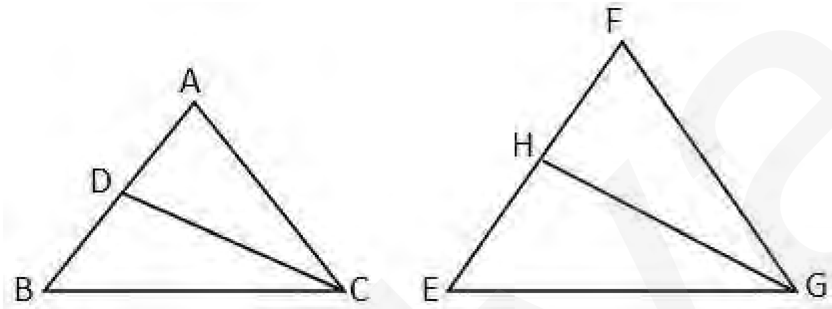
A.A समरूपता कसौटी से

Δ ABC ~ Δ AMP

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं |)

Q10. CD और GH क्रमश: ∠ ACB और ∠ EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमश: Δ ABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं | यदि Δ ABC ~ ΔFEG है, तो दर्शाइए कि :



(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) Δ DCB ~ Δ HGE
(iii) Δ DCA ~ Δ HGF

हल:

दिया है : CD और GH क्रमश: ∠ ACB और ∠ EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमश: Δ ABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और ΔABC ~ ΔFEG है |

सिद्ध करना है :

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) Δ DCB ~ Δ HGE
(iii) Δ DCA ~ Δ HGF

प्रमाण :

ΔABC ~ ΔFEG दिया है |

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \angle A &= \angle F \\ \angle B &= \angle E \\ \angle C &= \angle G \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &...(1) \\ &...(2) \\ &...(3) \end{aligned}$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं |)

(i) Δ ABC तथा Δ AMP में

(ii) Δ DCB तथा Δ HGE में,

∠B = ∠E समी॰ (2) से

∠BCD = ∠EGH [चूँकि ½∠C = ½∠G समी॰ (3) से]

A.A समरूपता कसौटी से

Δ DCB ~ Δ HGE

(iii) Δ DCA तथा Δ HGF में
∠A = ∠F समी॰ (1) से

∠ACD = ∠FGH [चूँकि ½∠C = ½∠G समी॰ (3) से]

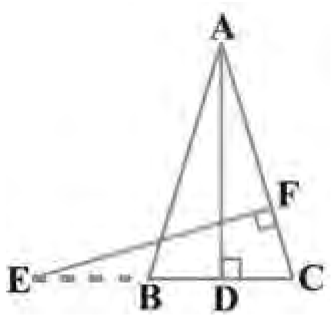
A.A समरूपता कसौटी से

Δ DCA ~ Δ HGF **Proved**

Q11. आकृति 6.40 में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है | यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है तो सिद्ध कीजिए कि ΔABD ~ ΔECF है |

हल:

दिया है : AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है



सिद्ध करना है :

ΔABD ~ ΔECF

प्रमाण :

ΔABC में,

AB = AC दिया है;

∴ ∠B = ∠C .... (1) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ....)

अब, ΔABD तथा ΔECF में

∠ADB = ∠EFC (प्रत्येक 90°)

∠B = ∠C समी० (1) से

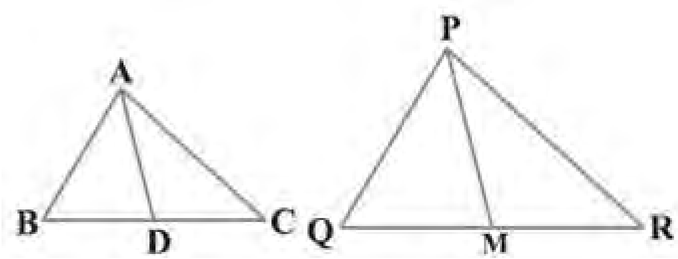
A.A समरूपता कसौटी से

ΔABD ~ ΔECF Proved

Q12. एक त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)| दर्शाइए कि ΔABC ~ ΔPQR है |

हल:

दिया है : त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं |



सिद्ध करना है :

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

प्रमाण :

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \ .... \quad (\text{दिया है})$$

अथवा $$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$$

अथवा $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \ ...... \ (1)$$

(चूँकि माध्यिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं |)

अब, ΔABD तथा ΔPQM में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$ समी० (1) से

S.S.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ABD \sim \Delta PQM$

$\therefore \quad \angle B = \angle Q \quad \ldots\ldots (2)$

अब, ΔABC तथा ΔPQR में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$ (दिया है)

और $\angle B = \angle Q$ समी० (2) से

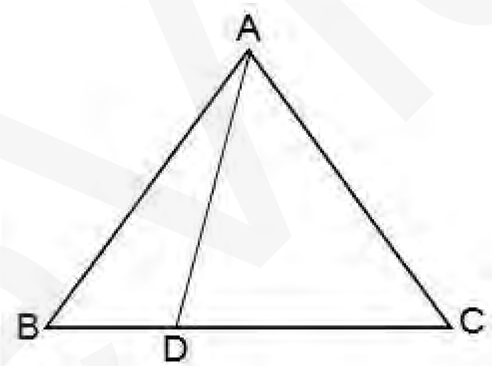
S.A.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ **Proved**

Q13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है | दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है |

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है |



सिद्ध करना है : $CA^2 = CB.CD$

प्रमाण :

अब, ΔADC तथा ΔBAC में

$\angle ADC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

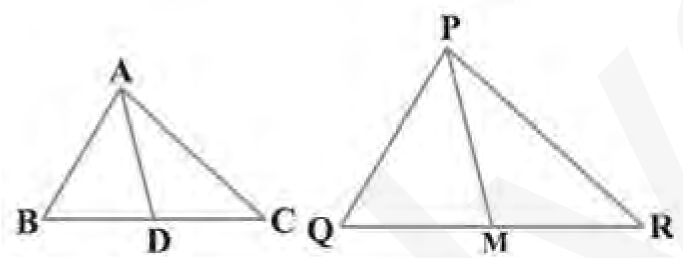
$\Delta ADC \sim \Delta BAC$

$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC}$ (चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं |)

या $CA^2 = CB.CD$ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)

Proved

Q14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं | दर्शाइए कि ΔABC ~ ΔPQR है |



हल :

दिया है : ΔABC और ΔPQR में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ है और AD तथा PM माध्यिकायें हैं |

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

प्रमाण : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ .... (1) दिया है |

यहाँ माध्यिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माध्यिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है |

$\therefore \quad \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR}$ .... (2)

समी॰ (1) तथा (2) से

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ .... (3)

ΔABC तथा ΔPQR में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$.समी. (3) से

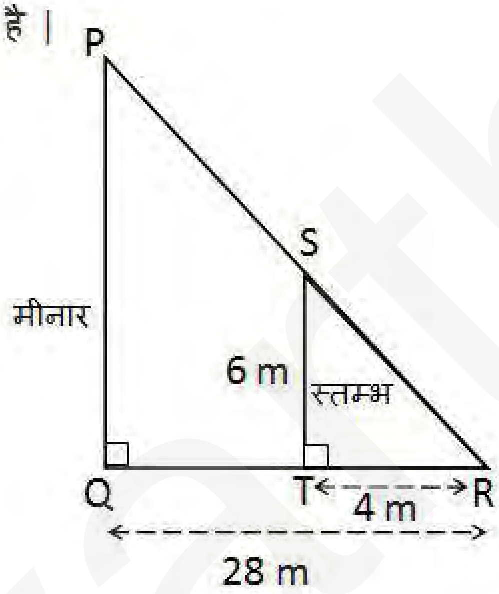
S.S.S समरूपता कसौटी से

ΔABC ~ ΔPQR Proved

Q15. लंबाई **6m** वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई **4m** है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई **28 m** है | मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल:

माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है | TR स्तम्भ की छाया है और QR मीनार की छाया है |



ΔPQR तथा ΔSTR में,

$\angle PQR = \angle STR$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta PQR \sim \Delta STR$

$\therefore \quad \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

या $\frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$

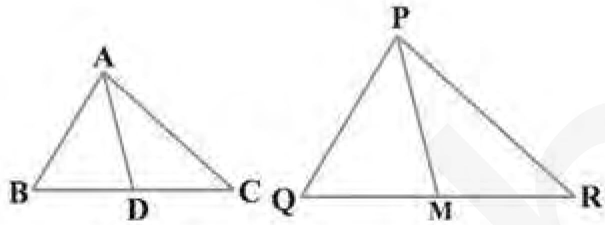
या $4\ PQ = 6 \times 28$

या $PQ = \frac{6 \times 28}{4} = 42$ m

अत: मीनार की ऊँचाई = 42 m

Q16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है |

सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है |



हल:

दिया है : AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है |

सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

प्रमाण : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ दिया है |

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

या $\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$

या $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...... (1)

और $\angle B = \angle Q$ ......(2) (समरूप त्रिभुज के संगत कोण)

ΔABD तथा ΔPQM में,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...... (1) से

$\angle B = \angle Q$ ......(2) से

SAS समरूपता कसौटी से

$\Delta ABD \sim \Delta PQM$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ Proved