गणित

पाठ–8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1.

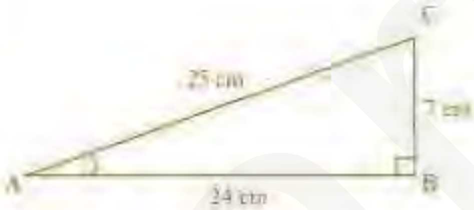
ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24cm और BC = 7cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i). $\sin A,\ \cos A$

(ii).$\sin C,\ \cos C$

उत्तर 1:

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (24\ cm)^2 + (7\ cm)^2$

$= (576 + 49)\ cm^2$

$= 625\ cm^2$

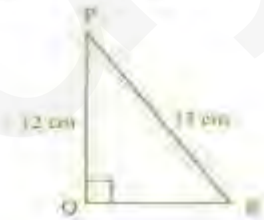
$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25\ cm$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ और $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ और $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

प्रश्न 2.

आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।



उत्तर 2:

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से

$QR^2 = PR^2 - PQ^2$

$= (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow QR = \sqrt{25} = 5$

इसलिए, $\tan P - \cot R = \frac{QR}{PQ} - \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

https://www.evidyarthi.in

प्रश्न 3.

यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $\sin A = \frac{3}{4}$

माना $\sin A = \frac{3k}{4k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= (4k)^2 - (3k)^2$

$= 16k^2 - 9k^2$

$= 7k^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}k$

इसलिए, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ और $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

प्रश्न 4.

यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है $15 \cot A = 8$

$\Rightarrow \cot A = \frac{8}{15}$

https://www.evidyarthi.in

माना $\cot A = \frac{8k}{15k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (8k)^2 + (15k)^2$

$= 64k^2 + 225k^2$

$= 289k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{289k^2} = 17k$

इसलिए, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$ और $\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$

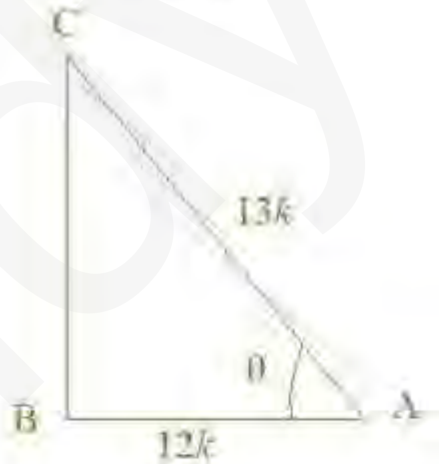
प्रश्न 5.

यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है $\sec\theta = \frac{13}{12}$

माना $\sec\theta = \frac{13k}{12k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (13k)^2 - (12k)^2$

$= 169k^2 - 144k^2$

$= 25k^2$

$\Rightarrow BC = \sqrt{25k^2} = 5k$

https://www.evidyarthi.in

इसलिए, $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{12}$

$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$

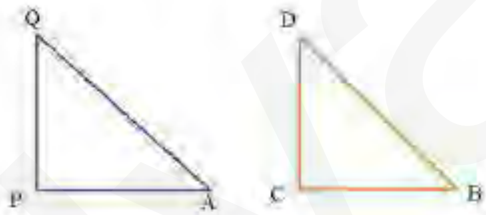
और $\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 6.

यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$ ।

उत्तर 6:

दिया है $\cos A = \cos B$



$\cos A = \cos B$

$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{BC}{BD}$

$\Rightarrow \frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD}$

माना $\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = k$ ... (i)

इसलिए, $AP = k(BC)$ तथा $AQ = k(BD)$

अब, ΔAPQ तथा ΔBCD में

$\frac{PQ}{CD} = \frac{\sqrt{AQ^2 - AP^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{\sqrt{(k.BD)^2 - (k.BC)^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{k\sqrt{BD^2 - BC^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = k$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = \frac{PQ}{CD}$

अतः, $\Delta APQ \sim \Delta BCD$ [SSS प्रमेय से]

इसलिए, $\angle A = \angle B$

https://www.evidyarthi.in

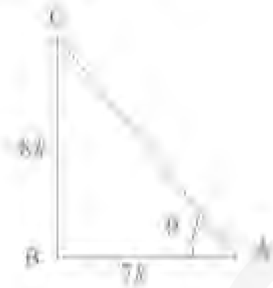
प्रश्न 7.

यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो **(i)** $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ **(ii)** $\cot^2\theta$ का मान निकालिए?

उत्तर 7:

दिया है $\cot\theta = \frac{7}{8}$

माना $\cot\theta = \frac{7k}{8k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (8k)^2 + (7k)^2$

$= 64k^2 + 49k^2$

$= 113k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{113k^2} = \sqrt{113}k$

इसलिए,

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$$= \frac{\left(1+\frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{7}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2} = \frac{1-\frac{49}{113}}{1-\frac{64}{113}} = \frac{\frac{113-49}{113}}{\frac{113-64}{113}} = \frac{64}{49}$$

(ii) $\cot^2\theta$

$$= (\cot\theta)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

https://www.evidyarthi.in

प्रश्न 8.

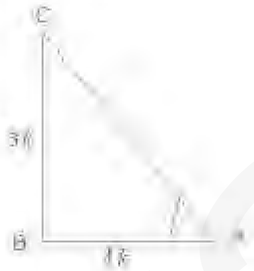
यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

उत्तर 8:

दिया है $3\cot A = 4$

$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$

माना $\cot A = \frac{4k}{3k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (3k)^2 + (4k)^2$

$= 9k^2 + 16k^2$

$= 25k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{25k^2} = 5k$

इसलिए,

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{7}{25}$$

और

$\cos^2 A - \sin^2 A$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

अतः, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है।

https://www.evidyarthi.in

प्रश्न 9.

त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

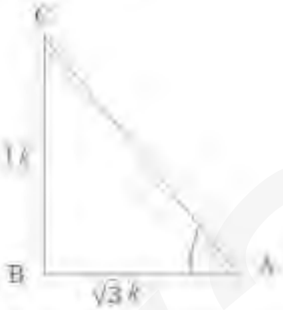
(i) sin A cos C + cos A sin C

(ii) cos A cos C – sin A sin C

उत्तर 9:

दिया है $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

माना $\tan A = \frac{1k}{\sqrt{3}k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (1k)^2 + (\sqrt{3}k)^2$

$= k^2 + 3k^2$

$= 4k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{4k^2} = 2k$

इसलिए, **(i)** sin A cos C + cos A sin C

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

, **(ii)** cos A cos C – sin A sin C

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

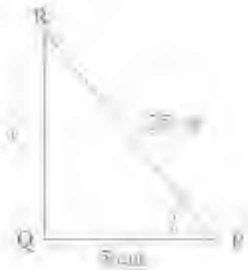
https://www.evidyarthi.in

प्रश्न 10.

ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, PR + QR = 25 cm और PQ = 5 cm है। $\sin P, \cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

दिया हैΔPQR में, कोण Q समकोण है



माना QR = x
इसलिए, PR = 25 − x

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से

$PR^2 = PQ^2 + OQ^2$

$\Rightarrow (25 - x)^2 = (5)^2 + (x)^2$

$\Rightarrow 625 + x^2 - 50x = 25 + x^2$

$\Rightarrow 625 - 50x = 25$

$\Rightarrow 50x = 600$

$\Rightarrow x = 12$

$\Rightarrow$ QR = 12

इसलिए, PR = 25 − 12 = 13

अब, $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$ और $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 11.

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारन सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) $\cot A, cot$ और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

उत्तर 11:

(i) असत्य,

क्योंकि $\tan A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}$ यदि कोण की सम्मुख भुजा > संलग्न भुजा, तो $\tan A$ का मान 1 से अधिक होगा।

(ii) सत्य,

क्योंकि $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, संलग्न भुजा से सदैव बड़ी होती है।

(iii) असत्य,

क्योंकि $\cos A$, कोण A के cosine के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) असत्य,

क्योंकि $\cot A$, कोण A का $cotangent$ होता है।

(v) असत्य,

क्योंकि $\sin \theta = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, सम्मुख भुजा से सदैव बड़ी होती है।

evidyarthi

पाठ–8 त्रिकोणमिति का परिचय
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1.

निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i). $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii). $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii).

$$\frac{\cos 45°}{\sec 30° + cosec\, 30°}$$

(iv).

$$\frac{\sin 30° + \tan 45° - cosec\, 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$$

(v).

$$\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$$

उत्तर 1:

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

मान रखने पर

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

मान रखने पर

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(iii)

$$\frac{\cos 45°}{\sec 30° + cosec\, 30°}$$

https://www.evidyarthi.in

मान रखने पर

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{24-8}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{16}$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{8}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(iv) $\frac{\sin 30°+\tan 45°-cosec\ 60°}{\sec 30°+\cos 60°+\cot 45°}$

मान रखने पर

$$=\frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}}}=\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)}{\left(3\sqrt{3}+4\right)}$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(3\sqrt{3}-4\right)}{\left(3\sqrt{3}+4\right)\left(3\sqrt{3}-4\right)}=\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(4\right)^2}$$

$$=\frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16}=\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

https://www.evidyarthi.in

(v)

$$\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

मान रखने पर

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{16}{3}\right) - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12}$$

प्रश्न 2.

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i). $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii). $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii). $\sin 2A = 2\sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0 (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv). $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ बराबर है:

(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

उत्तर 2:

(i). $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

मान रखने पर

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हम जानते हैं कि $sin\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(ii). $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

मान रखने पर

$$= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

(iii). $\sin 2A = 2 \sin A$

हम जानते हैं कि $sin\ 0 = 0$

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(iv). $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

मान रखने पर

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

हम जानते हैं कि $tan\ 60^\circ = \sqrt{3}$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

evidyarthi

https://www.evidyarthi.in

प्रश्न 3.

यदि $tan\ (A+B)=\sqrt{3}$ और $tan\ (A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° < A+B \le 90°, A > B$, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $tan\ (A+B)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ tan\ (A+B)=\tan 60°$ $\left[\text{क्योंकि } \tan 60°=\sqrt{3}\right]$

$\Rightarrow A+B=60°$ ... (i)

दिया है $tan\ (A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\ tan\ (A-B)=\tan 30°$ $\left[\text{क्योंकि } \tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow A-B=30°$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर

$2A=90°$

$\Rightarrow A=45°$

समीकरण (i) से

$45°+B=60°$

$\Rightarrow B=15°$

इसलिए, $A=45°$ और $B=15°$

प्रश्न 4.

बताइए कि निम्नलिखित में कौन - कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर कि पुष्टि कीजिए।

(i). $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

(ii). θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii). θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv). θ के सभी मानों पर $\sin\theta=\cos\theta$.

(v). $A=0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

उत्तर 4:

(i) असत्य,

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in

माना $A = 30°$ और $B = 60°$

इसप्रकार,

$LHS = \sin(A + B) = \sin(30° + 60°) = \sin 90° = 1$ और

$\text{RHS} = \sin A + \sin B = \sin 30° + \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq 1$

अतः, $\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) सत्य,

क्योंकि, हम जानते हैं कि $\sin 0° = 0, \sin 30° = \frac{1}{2}, \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin 90° = 1$

इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) असत्य,

क्योंकि, हम जानते हैं कि $\cos 0° = 1, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60° = \frac{1}{2}$ और $\cos 90° = 0$

इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में कमी होती है।

(iv) असत्य,

क्योंकि $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ लेकिन $\sin 30° = \frac{1}{2}$ होता है।

(v) सत्य,

क्योंकि $\tan 0° = 0$, हम जानते हैं कि $\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0}$ परिभाषित नहीं है।

evidyarthi

https://www.evidyarthi.in

गणित

पाठ–8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

Exercise 8.3

प्रश्न 1:

त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ को के $\cot A$ पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर 1:

(i). $\sin A$

$= \sqrt{\sin^2 A}$

$= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}\right]$

$= \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 A}}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

(ii). $\cos A$

$= \sqrt{\cos^2 A}$

$= \sqrt{1 - \sin^2 A}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{1+\cot^2 A}}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \sqrt{\frac{1+\cot^2 A - 1}{1+\cot^2 A}}$

$= \frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

(iii). $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \tan A = \frac{1}{\cot A}\right]$

प्रश्न 2:

$\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

https://www.evidyarthi.in

उत्तर 2:

(i). $\sin A$

$= \sqrt{\sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - \cos^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{\sec A}\right]$

$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}}$

$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$

(ii). $\cos A$

$\cos A = \frac{1}{\sec A}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{\sec A}\right]$

(iii). $\tan A$

$= \sqrt{\tan^2 A}$

$= \sqrt{\sec^2 A - 1}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

(iv). $\operatorname{cosec} A$

$= \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \sqrt{1 + \cot^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{\sec^2 A - 1}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1 + 1}{\sec^2 A - 1}}$

$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

(v). $\cot A$

$= \sqrt{\cot^2 A}$

$= \sqrt{\frac{1}{\tan^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

https://www.evidyarthi.in

$= \sqrt{\frac{1}{\sec^2 A - 1}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

प्रश्न 3:

मान निकालिए:

(i). $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii). $sin\ 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

उत्तर 3:

(i). $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

$= \frac{\sin^2 63° + \cos^2 (90° - 27°)}{\cos^2 17° + \sin^2 (90° - 73°)}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos(90° - \theta) = \sin\theta \text{ और } \sin(90° - \theta) = \cos\theta\right]$

$= \frac{\sin^2 63° + \cos^2 63°}{\cos^2 17° + \sin^2 17°}$

$= \frac{1}{1} = 1$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$

(ii). $sin\ 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

$= cos(90° - 25°) \cos 65° + \sin(90° - 25°) \sin 65°$

$= cos\ 65° \cos 65° + \sin 65° \sin 65°$

$= \cos^2 65° + \sin^2 65° = 1$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$

प्रश्न 4:

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i). $9sec^2 A - 9tan^2 B$ बराबर है:

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii). $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ बराबर है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

(iii). $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

(A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $cosec\ A$ (D) $\cos A$

(iv). $\frac{1 + tan^2 A}{1 + cot^2 A}$ बराबर है:

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $cot^2 A$ (D) $tan^2 A$

https://www.evidyarthi.in

उत्तर 4:

(i). $9sec^2 A - 9tan^2 B$

दिया है $9sec^2 A - 9tan^2 B$

$= 9(sec^2 A - tan^2 B)$

$= 9(1)$ $\left[\text{क्योंकि } sec^2 A - tan^2 B = 1\right]$

$= 9$

इसलिए, विकल्प (B) सही है।

(ii). $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

दिया है $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

$= 1 + \cot\theta - cosec\ \theta + \tan\theta + \tan\theta\cot\theta - \tan\theta\ cosec\ \theta + \sec\theta + \sec\theta\cot\theta - \sec\theta\ cosec\ \theta$

$= 1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta}$

$\left[\text{क्योंकि } \tan\theta\cot\theta = 1\right]$

$= 1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1 - \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= 1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1 - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= 2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= 2 + \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= 2 + \frac{1-1}{\sin\theta\cos\theta}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\right]$

$= 2 + 0 = 2$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

(iii). $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

दिया है $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$

https://www.evidyarthi.in

$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$

$= \cos A$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

(iv). $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A}$

दिया है $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$ [क्योंकि $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$]

$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A}\right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$

$= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \tan^2 A$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 5:

निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है:

(i). $(cosec\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii). $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(iv). $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v). सर्वसमिका $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

(vi). $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii). $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii). $(\sin A + cosec\, A)^2 + (\cos A + sec\, A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix). $(cosec\ A - \sin A)(sec\ A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(x). $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

उत्तर 5:

(i). $(coscec\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

वाम पक्ष $= (coscec\ \theta - \cot\theta)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta\right]$

$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ = दाँया पक्ष

(ii). $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

वाम पक्ष $= \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2 A + \cos^2 A = 1\right]$

$= \frac{2+2sin\ A}{(1+sin\ A)\ cos\ A}$

$= \frac{2(1+sin\ A)}{(1+sin\ A)\ cos\ A}$

$= \frac{2}{cos\ A} = 2\sec A$ = दाँया पक्ष

https://www.evidyarthi.in

(iii). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

वाम पक्ष $=\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$=\left[\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\right]+\left[\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right]$ $\left[\text{क्योंकि } \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$

$=\left[\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}\right]+\left[\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}\right]$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\,(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$ $\left[\text{क्योंकि } (\cos\theta-\sin\theta)=-(\sin\theta-\cos\theta)\right]$

$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\sin\theta\,(\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$ $\left[\text{क्योंकि } a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\right]$

$=\frac{(1+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right]$

$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta+1$

= दाँया पक्ष

(iv). $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

वाम पक्ष $=\frac{1+\sec A}{\sec A}$

$=\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec A=\frac{1}{\cos A}\right]$

$=\frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$

$=\frac{1+\cos A}{1}$

https://www.evidyarthi.in

$$= \frac{1+\cos A}{1} \times \frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$ $\left[\text{क्योंकि } 1-\cos^2 A = \sin^2 A\right]$

= दाँया पक्ष

(v). $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

वाम पक्ष $= \frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$

$$= \frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$$

$$= \frac{\cot A-1+\operatorname{cosec} A}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$$ [अंश और हर को $\sin A$ से भाग करने पर]

$$= \frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-(1)}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$$ $\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A = 1\right]$

$$= \frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-(\operatorname{cosec} A+\cot A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{(\cot A+\operatorname{cosec} A)(1-\operatorname{cosec} A+\cot A)}{1-\operatorname{cosec} A+\cot A}$$

$$= \cot A + \operatorname{cosec} A$$

= दाँया पक्ष

(vi). $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

वाम पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$

https://www.evidyarthi.in

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$ $\quad$ [क्योंकि $1 - \sin^2 A = \cos^2 A$]

$= \frac{1 + \sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A$

= दाँया पक्ष

(vii). $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

वाम पक्ष $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta[2(1 - \sin^2\theta) - 1]}$ $\quad$ [क्योंकि $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

$= \frac{\sin\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2 - 2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

= दाँया पक्ष

(viii). $(\sin A + cosec\ A)^2 + (\cos A + sec\ A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

वाम पक्ष $= (\sin A + cosec\ A)^2 + (\cos A + sec\ A)^2$

$= \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A\ cosec\ A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A\ sec\ A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \text{cosec}^2 A + 2 + \sec^2 A + 2$

[क्योंकि $\cos A\ sec\ A = 1, \quad \sin A\ cosec\ A = 1$]

$= 1 + (1 + \cot^2 A) + 2 + (1 + \tan^2 A) + 2$

[क्योंकि $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$]

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

= दाँया पक्ष

https://www.evidyarthi.in

(ix). $(cosec\,A - \sin A)(sec\,A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

वाम पक्ष $= (cosec\,A - \sin A)(sec\,A - \cos A)$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right)$$

$= \sin A\, cos\, A$ ... (i)

$=$ दाँया पक्ष $- \frac{1}{\tan A + \cot A}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos A \sin A}\right)}$$

$= \cos A \sin A$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से

वाम पक्ष = दाँया पक्ष

(x). $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

वाम पक्ष $= \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}$ [क्योंकि $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$]

$$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A}\right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \tan^2 A$$

= दाँया पक्ष

https://www.evidyarthi.in

अब, $\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

$$= \left(\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{\sin A - \cos A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \tan^2 A$$

= दाँया पक्ष

https://www.evidyarthi.in