

# Chapter-\*

## System of Particles and Rotational Motion

### कणों के निकाय तथा घूर्णी गति प्रश्नावली

**प्रश्न 1.** एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केन्द्र की अवस्थिति लिखिए—

- (a) गोला, (b) सिलोएंडर, (c) छल्ला तथा (d) घन  
 (e) क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थित होता है?

**हल** (a) द्रव्यमान केन्द्र गोले की ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है।

- (b) बेलन का द्रव्यमान केन्द्र इसके ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है अर्थात् केवल समानित अक्ष के मध्य बिन्दु पर रहता है।  
 (c) छल्ले का द्रव्यमान केन्द्र इसकी ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है।  
 (d) घन का द्रव्यमान केन्द्र इसके ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है जहाँ इसके विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं।  
 (e) यह आवश्यक नहीं कि वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के अन्दर स्थित रहे क्योंकि छल्ला, खोखला बेलन तथा खोखला घन आदि का द्रव्यमान केन्द्र इनसे बाहर होता है।

**प्रश्न 2.** HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथक्कन लगभग  $1.27 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) है। इस अणु के द्रव्यमान केन्द्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए। यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में  $35.5$  गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केन्द्रित होता है।

यदि द्रव्यमान  $m_1$  तथा  $m_2$  के स्थिति सदिश क्रमशः  $\vec{r}_1$  तथा  $\vec{r}_2$  हैं, तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

**हल** दिया है, H तथा Cl के नाभिक के बीच दूरी  $= 1.27 \text{ \AA} = 1.27 \times 10^{-10} \text{ m}$

हाइड्रोजन के अणु का द्रव्यमान  $= m$

$\therefore$  क्लोरीन के अणु का द्रव्यमान  $= 35.5m$

माना हाइड्रोजन अणु मूल बिन्दु पर स्थित है अर्थात् इसका स्थिति सदिश  $\vec{r}_1 = 0$

$\therefore$  क्लोरीन अणु का स्थिति सदिश  $\vec{r}_2 = 1.27 \times 10^{-10} \text{ m}$

द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \times 0 + 35.5m \times 1.27 \times 10^{-10}}{m + 35.5m} \\ &= \frac{35.5 \times 1.27 \times 10^{-10}}{36.5} \\ &= 1.235 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.24 \text{ \AA} \end{aligned}$$

**प्रश्न 3.** कोई बच्चा किसी चिकने क्षेत्रिज फर्श पर एक समान चाल  $v$  से गतिपान किसी लम्बी ट्रॉली के एक सिरे पर बैठा है। यदि बच्चा खड़ा होकर ट्रॉली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब निकाय ( $\text{ट्रॉली} + \text{बच्चा}$ ) के द्रव्यमान केन्द्र की चाल क्या है?

हल निकाय ( $\text{ट्रॉली} + \text{बच्चे}$ ) के द्रव्यमान केन्द्र की चाल नियत रहती है अर्थात्  $v$ , क्योंकि किसी निकाय की स्थितिज केवल बाह्य बल द्वारा परिवर्तित की जा सकती है तथा दोड़ने में ट्रॉली पर आरोपित बल आन्तरिक बल है।

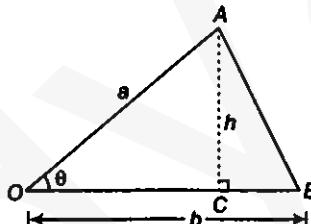
**प्रश्न 4.** दर्शाइये कि  $a$  एवं  $b$  के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल  $a \times b$  के परिणाम का आधा है।

हल माना सदिश  $a$  तथा  $b$  त्रिभुज की दो संलग्न भुजाओं को प्रदर्शित करते हैं तथा इनके बीच का कोण  $\theta$  है। त्रिभुज की ऊँचाई  $h$  है।

$$\therefore OA = a, OB = b, AC = h \text{ तथा } \angle AOB = \theta$$

$$\Delta OCA \text{ में, } \sin\theta = \frac{AC}{OA} \text{ या } AC = OA \sin\theta$$

$$h = a \sin\theta$$



$$\begin{aligned}\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times OB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times b \times a \sin\theta = \frac{1}{2} ab \sin\theta \quad \dots(i)\end{aligned}$$

दो सदिशों के सदिश गुणन के अनुसार

$$a \times b = ab \sin\theta \hat{n}$$

जहाँ  $\hat{n}$  एकांक वेक्टर तल के लम्बवत् है।

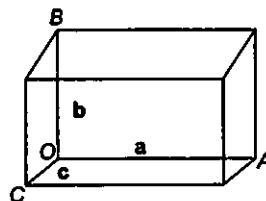
$$\therefore |a \times b| = |ab \sin\theta \hat{n}| = ab \sin\theta \quad (\because |\hat{n}| = 1) \quad \dots(ii)$$

समी (i) व (ii) से,

$$\begin{aligned}\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} |a \times b| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(a \times b) \text{ का परिमाण}|\end{aligned}$$

**प्रश्न 5.** दर्शाइये कि  $a \cdot (b \times c)$  का परिमाण तीन सदिशों  $a$ ,  $b$  एवं  $c$  से बने समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

**हल** माना षट्फलक तीन सदिश से बना है जहाँ,  $OA = a$ ,  $OB = b$  और  $OC = c$



$b$  तथा  $c$  का सदिश गुणन निम्न प्रकार होगा।

$$(b \times c) = bc \sin 90^\circ \hat{n} = bc \hat{n}$$

जहाँ  $\hat{n}$ ,  $OA$  के अनुदिश एकांक सदिश है

$$\begin{aligned} \therefore a \cdot (b \times c) &= a \cdot (bc \hat{n}) \\ &= a(bc) \cos 0^\circ \\ &= abc \end{aligned}$$

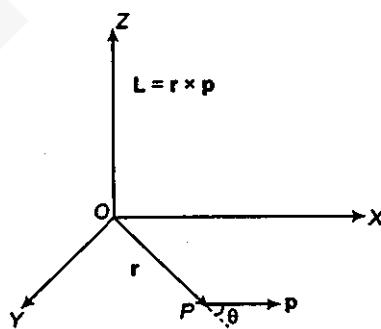
जो समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

**प्रश्न 6.** एक कण, जिसके स्थिति सदिश  $r$  के  $x, y, z$  अक्षों के अनुदिश अवयव क्रमशः  $x, y, z$  हैं, और रेखीय संवेग सदिश  $p$  के अवयव  $p_x, p_y, p_z$  हैं, कोणीय संवेग  $L$  के अक्षों के अनुदिश अवयव ज्ञात कीजिए। दर्शाइये, कि यदि कण के बल  $x-y$  तल में ही गतिमान हो तो कोणीय संवेग का केवल  $z$ -अवयव ही होता है।

**हल** (a) माना कण बिन्दु  $P$  पर स्थित है इसका स्थिति सदिश  $r$  तथा रेखीय संवेग  $p$  है।

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$p = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}$$



संदिश का काणीय संवेग  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

यदि  $X, Y$  तथा  $Z$  के अनुदिश  $L$  के अवयव क्रमशः  $L_x, L_y$  तथा  $L_z$  हैं तब

$$L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} = \hat{i}(yp_z - zp_y) + \hat{j}(zp_x - xp_z) + \hat{k}(xp_y - yp_x)$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

(b) प्रश्नानुसार, कण  $X-Y$  तल में गति कर रहा है।

$\therefore X-Y$  तल में गतिमान कण द्वारा बल आघूर्ण

$$\tau_z = F_y - F_x \quad \dots(i)$$

जहाँ,  $\tau_z$   $X-Y$  तल में गतिमान कण पर  $Z$ -अक्ष के अनुदिश बल आघूर्ण का अवयव है।

माना  $X-Y$  तल में  $m$  द्रव्यमान के कण का वेग  $v$  है तथा  $v_x$  तथा  $v_y$  इसके  $X$  तथा  $Y$  अक्ष के अनुदिश वेग है।

न्यूटन के द्वितीय नियम से,

$$F_x = \frac{d}{dt}(p_x) = \frac{d}{dx}(mv_x) = m \frac{dv_x}{dt}$$

$$\text{तथा} \quad F_y = \frac{d}{dt}(p_y) = m \frac{dv_y}{dt}$$

यह मान समी (i) में रखने पर

$$\begin{aligned} \tau_z &= xm \frac{d}{dt}(v_x) - ym \frac{d}{dt}(v_y) \\ &= m \left[ x \frac{dv_y}{dt} - y \frac{dv_x}{dt} \right] \quad \dots(ii) \end{aligned}$$

$$\text{अब,} \quad \frac{d}{dt}(xv_y - yv_x) = \frac{d}{dt}(xv_y) - \frac{d}{dt}(yv_x)$$

$$= \left[ x \frac{d}{dt}v_y + v_y \frac{d}{dt}x \right] - \left[ y \frac{d}{dt}v_x + v_x \frac{d}{dt}y \right]$$

$$= x \frac{d}{dt}v_y + v_y v_x - y \frac{d}{dt}v_x - v_x v_y$$

$$= x \frac{d}{dt}v_y - y \frac{d}{dt}v_x \quad \dots(iii)$$

सभी (i) व (iii) से

$$\begin{aligned}
 \tau_z &= m \frac{d}{dt} (xv_y - yv_x) \\
 &= \frac{d}{dt} (xmv_y - ymv_x) \\
 \therefore p_y &= mv_y \text{ तथा } p_x = mv_x \quad (\because \text{संवेग } p = mv) \\
 \therefore \tau_z &= \frac{d}{dt} (xp_y - yp_x) \\
 \tau_z &= \frac{d}{dt} \tau_z \quad [\text{सभी (ii) के भाग (a) से}]
 \end{aligned}$$

उपरोक्त सम्बन्ध से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि कण  $X$ - $Y$  तल में गतिमान हो तो कोणीय संवेग ( $L$ ) का केवल  $Z$  अवयव ही होता है।

**प्रश्न 7.** दो कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान  $m$  एवं चाल  $v$  है  $d$  दूरी पर, समान्तर रेखाओं के अनुदिश, विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं। दर्शाइये कि इस टिक्कण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है, चाहे हम जिस बिन्दु के परितः कोणीय संवेग लें।

हल प्रत्येक कण का द्रव्यमान  $= m$

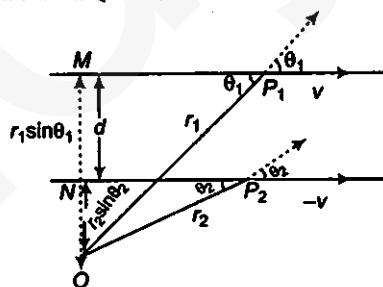
प्रत्येक कण का देग  $= v$

कण  $d$  दूरी पर, दो समान्तर रेखाओं के अनुदिश विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं।

माना किसी क्षण  $t$  पर कणों की स्थितियाँ  $P_1$  व  $P_2$  हैं।

माना बिन्दु  $O$  के परितः किसी क्षण कणों के कोणीय संवेग तथा स्थिति सदिश क्रमशः  $L_1$  व  $L_2$  तथा  $v$  व  $v$  हैं।  $L_1 = r_1 \times mv$  और  $L_2 = r_2 \times mv$

यदि निकाय का परिणामी कोणीय संवेग  $L$  है, तब  $L = L_1 + L_2 = r_1 \times mv + (-r_2 \times mv)$  ऋणात्मक चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि दोनों कण विपरीत दिशाओं में हैं।



$$\begin{aligned}
 |L| &= |L_1| - |L_2| \\
 &= mv r_1 \sin \theta_1 - mv r_2 \sin \theta_2 \\
 &= mv(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)
 \end{aligned}
 \quad \dots (i)$$

जहाँ  $\theta_1$  तथा  $\theta_2$  क्रमशः  $r_1$ , तथा  $v$  और  $r_2$  तथा  $v$  के बीच के कोण हैं।

जब कण समय के साथ अपनी स्थिति परिवर्तित करता है तब उनकी गति की दिशा अपरिवर्तित रहती है तथा उनकी दूरियाँ

$$OM = r_1 \sin \theta_1 \text{ और } ON = r_2 \sin \theta_2 \text{ एक समान}$$

लेकिन

$$OM - ON = MN = d \quad (\text{दिया है})$$

∴

$$r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 = d \quad \dots \text{(ii)}$$

सभी (i) तथा (ii) से

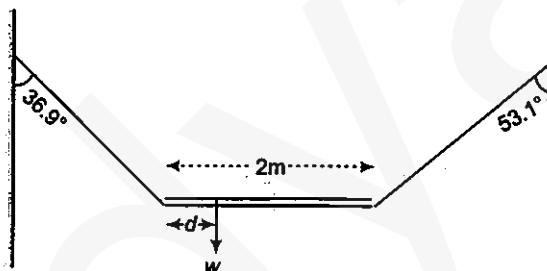
$$|L| = mvd$$

यह समय के साथ नियत है।

$L$  की दिशा  $r$  तथा  $v$  तल के लम्बवत तथा कागज के तल के अन्दर की ओर है जो समय के साथ अपरिवर्तित रहती है।

अतः द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है।

**प्रश्न 8.**  $W$  भार की एक असमान छड़ को, उपेक्षणीय भार काली दो डोरियों से चित्र में दर्शाये अनुसार लटका कर विरापावस्था में रखा गया है। डोरियों द्वारा ऊर्ध्वाधर से बने कोण क्रमशः  $36.9^\circ$  एवं  $53.1^\circ$  हैं। छड़ 2m लम्बाई की है। छड़ के बाएँ सिरे से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी  $d$  ज्ञात कीजिए।



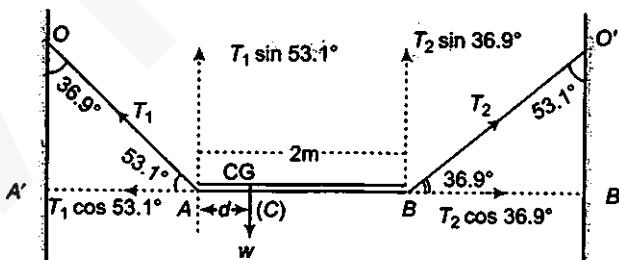
हल छड़ का भार =  $w$

छड़ की लम्बाई = 2 m

माना  $AB$  की असमान छड़ जो डोरियों  $OA$  तथा  $OB$  से लटकी है स्थिर अवस्था में है।

दिया है,  $\angle AOA' = 36.9^\circ \Rightarrow \angle OAA' = 90^\circ - 36.9^\circ = 53.1^\circ$

$\angle BO'B' = 53.1^\circ \Rightarrow \angle O'BB' = 90^\circ - 53.1^\circ = 36.9^\circ$



माना  $T_1$  तथा  $T_2$  डोरियों  $OA$  तथा  $OB$  के तनाव हैं। छड़ के बाएँ सिरे  $A$  से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी  $d$  है।

इस निकाय पर विभिन्न बल आरोपित होते हैं

- (i) पहली डोरी में तनाव  $T_1$ , डोरी के अनुदिश ऊपर की ओर कार्य करता है।  
( $\because$  छड़ डोरी को नीचे की ओर दबाती है इसलिये तनाव ऊपर की ओर कार्य करता है।) तनाव को इसके क्षेत्रिज अवयव  $T_1 \cos 53.1^\circ$  तथा ऊर्ध्वाधर अवयव  $T_1 \sin 53.1^\circ$  में विभाजित किया जा सकता है।
- (ii) दूसरी डोरी में तनाव  $T_2$  के क्षेत्रिज अवयव तथा ऊर्ध्वाधर अवयव क्रमशः  $T_2 \cos 36.9^\circ$  तथा  $T_2 \sin 36.9^\circ$  हैं।
- (iii) छड़ का भार  $w$  नीचे की ओर कार्य करता है।

निकाय साम्यावस्था में है अर्थात् निकाय पर कुल बल शून्य है। इसका अर्थ है विभिन्न बल एक-दूसरे को सन्तुलित करते हैं। इसलिए क्षेत्रिज बल तथा ऊर्ध्वाधर बल एक दूसरे को सन्तुलित करते हैं।

$$T_1 \cos 53.1^\circ = T_2 \cos 36.9^\circ \quad \dots(i)$$

इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर बल एक-दूसरे को सन्तुलित करते हैं।

ऊपर की ओर लगे कुल बल = नीचे की ओर लगे कुल बल

$$\therefore T_1 \sin 53.1^\circ + T_2 \sin 36.9^\circ = w \quad \dots(ii)$$

$A$  के परितः बल आधूर्ण

$$T_2 \sin 36.9^\circ \times 2 = w \times d$$

$$\text{अथवा} \quad T_2 = \frac{wd}{2 \sin 36.9^\circ} \quad \dots(iii)$$

सभी (ii) व (iii) से

$$\begin{aligned} T_1 \sin 53.1^\circ &= w - T_2 \sin 36.9^\circ \\ &= w - \frac{wd}{2} \end{aligned}$$

$$\text{अथवा} \quad T_1 = \frac{w}{\sin 53.1^\circ} \left( 1 - \frac{d}{2} \right) \quad \dots(iv)$$

सभी (iii) व (iv) से  $T_1$  तथा  $T_2$  का मान सभी (i) में रखने पर

$$\frac{w \left( 1 - \frac{d}{2} \right)}{\sin 53.1^\circ} \cos 53.1^\circ = \frac{wd}{2 \sin 36.9^\circ} \cdot \cos 36.9^\circ$$

$$\frac{\left( 1 - \frac{d}{2} \right)}{\tan 53.1^\circ} = \frac{d}{2 \tan 36.9^\circ}$$

$$\frac{\left( 1 - \frac{d}{2} \right)}{1.3319} = \frac{d}{2 \times 0.7508}$$

$$1 - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \times \frac{1.3319}{0.7508} = \frac{d}{2} \times 1.7740$$

$$1 - 0.5d = 0.8870d$$

या

$$1 = 1.3870d$$

$$d = \frac{1}{1.3870}$$

$$= 0.721 \text{ m}$$

$$= 72.1 \text{ cm}$$

**प्रश्न 9.** एक कार का भार  $1800 \text{ kg}$  है। इसकी अगली और पिछली धुरियों के बीच की दूरी  $1.8 \text{ m}$  है। इसका गुरुत्व केन्द्र अगली धुरी से  $1.05 \text{ m}$  पीछे है। समतल धरती द्वारा इसके प्रत्येक अगले और पिछले पहियों पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

गुरुत्व केन्द्र के परितः आघूर्ण शून्य होता है।

हल कार का कुल द्रव्यमान  $= 1800 \text{ kg}$

माना  $m$  तथा  $(900 - m)$  आगे तथा पीछे के पहियों का द्रव्यमान है

अगली धुरी से गुरुत्व केन्द्र की दूरी  $= 1.05 \text{ m}$

$\therefore$  पिछली धुरी से गुरुत्व केन्द्र की दूरी  $= 1.80 - 1.05 = 0.75 \text{ m}$

गुरुत्व केन्द्र के परितः बल आघूर्ण लेने पर

$$m \times 1.05 = (900 - m) \times 0.75$$

या

$$1.05m + 0.75m = 900 \times 0.75$$

या

$$1.80m = 900 \times 0.75$$

या

$$m = \frac{900 \times 0.75}{1.80}$$

$$= 375 \text{ kg}$$

$$\therefore (900 - m) = 900 - 375 = 525 \text{ kg}$$

$\therefore$  प्रत्येक अगले पहिये का भार ( $w_1$ )  $= m_1 g$

$$w_1 = 375 \times 9.8$$

$$= 3675 \text{ N}$$

प्रत्येक अगले पहिये पर समतल धरती द्वारा लगाया गया बल

= प्रत्येक अगले पहिये द्वारा समतल धरती पर लगाया गया बल ( $w_1$ )

$$= 3675 \text{ N}$$

प्रत्येक पिछले पहिये का भार ( $w_2$ )  $= m_2 g$

$$w_2 = 525 \times 9.8$$

$$= 5145 \text{ N}$$

$\therefore$  प्रत्येक पिछले पहिये पर समतल धरती द्वारा लगाया गया बल

= प्रत्येक पिछले पहिये द्वारा समतल धरती पर लगाया गया बल ( $w_2$ )

$$= 5145 \text{ N}$$

### Ques 10

समान द्रव्यमान और त्रिज्या के एक खोखले बेलन और एक ठोस गोले पर समान परिमाण के बल आधूर्ण लगाये गये हैं। बेलन अपनी सामान्य समर्पित अक्ष के परितः घूम सकता है और गोला अपने केन्द्र से गुजरने वाली किसी अक्ष के परितः एक दिये गये समय के बाद दोनों में कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा?

हल माना ठोस गोले तथा खोखले गोले का द्रव्यमान  $M$  तथा त्रिज्या  $R$  हैं  
ऊपरी अक्ष के परितः खोखले गोले का द्रव्यमान

$$I_1 = MR^2$$

ठोस गोले का व्यास के परितः जड़त्व आधूर्ण

$$I_2 = \frac{2}{5}MR^2$$

माना खोखले तथा ठोस गोले का बल आधूर्ण  $\tau$  समान है।

∴

$$\tau = I_1 \alpha_1$$

तथा

$$\tau = I_2 \alpha_2$$

अतः

$$I_1 \alpha_1 = I_2 \alpha_2$$

या

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2} = \frac{2}{5}$$

या

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{5}{2} \alpha_1 \\ &= 2.5 \alpha_1\end{aligned} \quad \dots \text{(i)}$$

माना  $t$  समय बाद खोखले तथा ठोस गोले की कोणीय चाल क्रमशः  $\omega_1$  तथा  $\omega_2$  हैं।

$$\therefore \omega_1 = \omega_0 + \alpha_1 t \quad \dots \text{(ii)}$$

तथा

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_0 + \alpha_2 t \\ &= \omega_0 + 2.5 \alpha_1 t\end{aligned} \quad \dots \text{(iii)}$$

सभी (ii) तथा (iii) से

$$\omega_2 > \omega_1$$

अतः दिये गये समय में ठोस गोला अधिकतम कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा।

**Ques 11** 20 kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिंडर अपने अक्ष के परितः 100 rad s<sup>-1</sup> की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। सिलिंडर की त्रिज्या 0.25 m है। सिलिंडर के घूर्णन से संबद्ध गतिज ऊर्जा क्या है? सिलिंडर का अपने अक्ष के परितः कोणीय संवेग का परिमाण क्या है?

हल दिया है,

$$M = 20 \text{ kg}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$R = 0.25 \text{ m}$$

ठोस बेलन का अपने समर्भित अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} MR^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times (0.25)^2 \\ &= 10 \times 0.0625 \\ &= 0.625 \text{ kg-m}^2\end{aligned}$$

बेलन की घूर्णन त्रिज्या

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.625 \times (100)^2 \\ &= 0.3125 \times 10000 = 3125 \text{ J}\end{aligned}$$

कोणीय संवेग  $L = I\omega$

$$= 0.625 \times 100 = 62.5 \text{ J-s}$$

**Ques 12** (a) कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की ओर फेलाकर खड़ा है। घूर्णिका को 40 rev/min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है। यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़ कर अपना जड़त्व आघूर्ण अपने आंरभिक जड़त्व आघूर्ण का 2/5 गुना कर लेता है, तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है।

- (b) यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है। आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे?

कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार, किसी निकाय पर कार्यरत कुल बल आघूर्ण शून्य है तो निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है अतः  $L = I\omega$  = नियतांक।

हल (a) दिया है  $\omega_1 = 40 \text{ rev/min}$

माना बच्चे का जड़त्व आघूर्ण / है।

$$\therefore I_1 = I \quad \text{तथा} \quad I_2 = \frac{2}{5}I$$

कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार

$$\begin{aligned} I_1\omega_1 &= I_2\omega_2 \\ \therefore \omega_2 &= \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{I}{\frac{2}{5}I} \times 40 \\ &= \frac{5}{2} \times 40 = 100 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{b}) \quad \frac{\text{अंतिम घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{प्रारंभिक घूर्णन गतिज ऊर्जा}} &= \frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}I\right)(100)^2}{I \times (40)^2} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{10000}{1600} = \frac{5}{2} \\ \therefore \quad \text{अंतिम घूर्णन ऊर्जा} &= \frac{5}{2} \text{ (प्रारंभिक घूर्णन ऊर्जा)} \end{aligned}$$

अतः बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक गतिज ऊर्जा से अधिक होती है तथा यह ऊर्जा बच्चे की पेशीय ऊर्जा से प्राप्त होती है जब वह हाथ सिकोड़ता है।

### Ques 13

3 kg द्रव्यमान तथा 40 cm क्रिझा के किसी खोखले सिलिंडर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रसी लपेटी गई है। यदि रसी को 30 N बल से खींचा जाए तो सिलिंडर का कोणीय त्वरण क्या होगा? रसी का रैखिक त्वरण क्या है? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है।

हल दिया है,

$$M = 3 \text{ kg}$$

$$R = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$$

$$F = 30 \text{ N}$$

खोखले बेलन का अपनी समित अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = MR^2 = 3 \times (0.40)^2 = 0.48 \text{ kg-m}^2$$

बेलन का बल आधूर्ण

$$\tau = F \times R \\ = 30 \times 0.40 = 12 \text{ N-m}$$

बेलन में उत्पन्न कोणीय त्वरण

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{12}{0.48} = 25 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{रेखीय त्वरण } a = R\alpha \\ = 0.40 \times 25 \\ = 10.0 \text{ m/s}^2$$

**Ques 14** किसी घूर्णक (रोटर) की  $200 \text{ rad/s}$ , की एक समान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वारा  $180 \text{ N-m}$  का बल आधूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है। इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए।

हल दिया है,

$$\omega = 200 \text{ rad/s}$$

$$\tau = 180 \text{ N-m}$$

$$\text{इंजन के लिये आवश्यक शक्ति (P)} = \tau\omega \\ = 180 \times 200 \\ = 36000 \text{ W} \\ = 36 \text{ kW}$$

**Ques 15**  $R$  त्रिज्या वाली समान डिस्क से  $\frac{R}{2}$  त्रिज्या का एक वृत्ताकार भाग काट कर निकाल

दिया गया है। इस प्रकार बने वृत्ताकार सुराखा का केन्द्र मूल डिस्क के केन्द्र से  $\frac{R}{2}$  दूरी पर है।

अवशिष्ट डिस्क के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

हल माना डिस्क का प्रति क्षेत्रफल द्रव्यमान  $m$  है

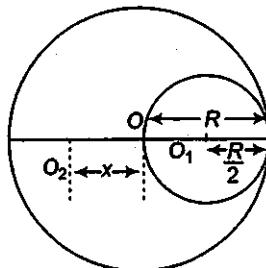
$$\therefore \text{डिस्क का द्रव्यमान (M)} = \text{डिस्क का कुल क्षेत्रफल} \times \text{प्रति क्षेत्रफल द्रव्यमान} = \pi R^2 m$$

काट कर निकाले गये भाग का द्रव्यमान ( $M'$ )

$$= \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 m \\ = \frac{\pi R^2}{4} m = \frac{M}{4}$$

सम्पूर्ण डिस्क का द्रव्यमान केन्द्र  $O$  है तथा काटकर निकाले गये भाग का द्रव्यमान केन्द्र  $O_1$  है तथा बचे भाग का द्रव्यमान  $O_2$  है।

प्रश्नानुसार, चित्र को इस प्रकार प्रदर्शित किया गया है।



यहाँ,

$$OO_1 = \frac{R}{2}$$

डिस्क का बचा भाग निकाय के दो द्रव्यमानों जैसे बिन्दु O पर M तथा बिन्दु O<sub>1</sub> पर  $-\frac{M}{4}$  में मान लिया जाता है।

यदि बचे भाग के द्रव्यमान केन्द्र की O बिन्दु से दूरी x है। तब

$$x = \frac{M \times 0 - M' \times \frac{R}{2}}{M - M'}$$

$$= \frac{-\frac{M}{4} \times \frac{R}{2}}{M - \frac{M}{4}}$$

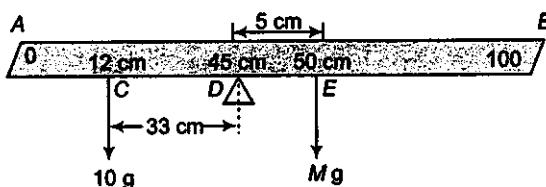
$$= -\frac{MR}{8} \times \frac{4}{3M} = -\frac{R}{6}$$

अतः अवशिष्ट का द्रव्यमान केन्द्र O से बायी ओर  $\frac{R}{6}$  दूरी पर होगा।

**Ques 16**

एक मीटर छड़ के केन्द्र के नीचे क्षुर-धार रखने पर वह इस पर संतुलित हो जाती है जब दो सिक्के, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 5 g है, 12.0 cm. के चिह्न पर एक के ऊपर एक रखे जाते हैं तो छड़ 45.0 cm. चिह्न पर संतुलित हो जाती है। मीटर छड़ का द्रव्यमान क्या है?

**हल** माना मीटर छड़ का कुल द्रव्यमान M kg है।



मध्य बिन्दु E तथा नये द्रव्यमान के बीच की दूरी (DE) = 50 - 45 = 5 cm

चिह्नित 12 cm तथा नये द्रव्यमान केन्द्र के बीच की दूरी ( $CD$ ) =  $45 - 12 = 33$  cm  
आधूर्णों के सिद्धान्त से

$$Mg \times DE = (2 \times 5g) \times CD$$

$$M \times 5 = 10 \times 33$$

या

$$M = 66 \text{ g}$$

$\therefore$  मीटर छड़ का द्रव्यमान 66 ग्राम है।

**Ques 17** एक ठोस गोला, पिन्न नति के दो आनत तलों पर एक ही ऊँचाई से लुढ़कने दिया जाता है।

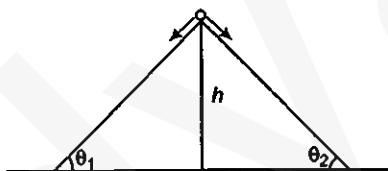
(a) क्या वह दोनों बार समान चाल से तली में पहुँचेगा?

(b) क्या उसको एक तल पर लुढ़कने में दूसरे से अधिक समय लगेगा?

(c) यदि हाँ, तो किस पर और क्यों?

**हल** (a) माना ठोस गोले का द्रव्यमान  $M$  तथा त्रिज्या  $R$  है।

माना दोनों आनत तल  $h$  ऊँचाई तक डबे हैं।



यदि आनत के तल पर गोले की रेखीय चाल  $v$  तथा कोणीय चाल  $\omega$  है।

तब ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार

गतिज ऊर्जा में वृद्धि = स्थितिज ऊर्जा में कमी

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = Mgh$$

लेकिन ठोस गोले के लिये,

ठोस गोले का उसके व्यास के परितः जड़त्व आधूर्ण

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \text{ तथा कोणीय वेग } \omega = \frac{v}{R}$$

$$\therefore \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} MR^2 \right) \times \frac{v^2}{R^2} = Mgh$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{5} Mv^2 = Mgh$$

$$\text{या } \frac{7}{10} Mv^2 = Mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

अतः प्रत्येक स्थिति में ठोस गोला आनत तलों की तली पर समान वेग से पहुँचेगा।

- (b) हाँ, कम आनत कोण वाले तल पर लुढ़कने में अधिक समय होगा।  
 (c) माना आनत तल 1 तथा 2 पर लुढ़कने में गोले द्वारा लिया समय क्रमशः  $t_1$  तथा  $t_2$  हैं।

$$\text{आनत तल पर गोले का त्वरण } a = \frac{g \sin \theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}$$

जहाँ  $K = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta}$

$$\begin{aligned} \text{ठोस गोले के लिए} \quad 1 + \frac{K^2}{R^2} &= 1 + \frac{\frac{2}{5}R^2}{R^2} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

$\therefore$  पहले आनत तल पर गोले का त्वरण

$$a_1 = \frac{5}{7} g \sin \theta_1$$

दूसरे आनत तल पर गोले का त्वरण

$$a_2 = \frac{5}{7} g \sin \theta_2$$

माना  $\theta_1$ , तथा  $\theta_2$  आनत तलों की लम्बाईयाँ हैं तथा तली तक पहुँचने में लिया गया समय  $t_1$  तथा  $t_2$  है।

गति की समीकरण से  $v = u + at$

$$v = 0 + at$$

$$\text{या} \quad t = \frac{v}{a}$$

लेकिन तली पर चाल समान है

$$\therefore t \propto \frac{1}{a}$$

$$\text{या} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

As  $\theta_2 > \theta_1$ ,

$$\therefore \sin \theta_2 > \sin \theta_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} > 1$$

$$\text{या} \quad \frac{t_1}{t_2} > 1$$

$$\text{या} \quad t_1 > t_2$$

अतः गोला कम कोण के आनत तल पर लुढ़कने में अधिक समय लेता है।

### Ques 18

2 m त्रिज्या के एक वलय (छल्ले) का भार 100 kg है। यह एक क्षैतिज फर्श पर इस प्रकार लोटनिक गति करता है कि इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 20 cm/s हो। इसको रोकने के लिए कितना कार्य करना होगा?

हल दिया है, त्रिज्या  $R = 2 \text{ m}$

तथा द्रव्यमान  $M = 100 \text{ kg}$

$$\text{द्रव्यमान केन्द्र की चाल } (v) = 20 \text{ cm/s} = 0.20 \text{ m/s}$$

वलय को रोकने में किया गया कार्य = वलय की कुल गतिज ऊर्जा

$$W = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{जड़त्व आधूर्ण } I = Mr^2 \text{ तथा कोणीय वेग } \omega = \frac{v}{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore W &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} (Mr^2) \times \left( \frac{v^2}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M v^2 = M v^2 \\ &= 100 \times (0.20)^2 \\ &= (100 \times 0.04) \text{ J} = 4.0 \text{ J} \end{aligned}$$

### Ques 19

ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान  $5.30 \times 10^{-26} \text{ kg}$  है तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाली और इसके दोनों परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आधूर्ण  $1.94 \times 10^{-46} \text{ kg-m}^2$  है। मान लीजिए कि गैस के ऐसे अणु की औसत चाल 500 m/s है और इसके धूर्णन की गतिज ऊर्जा स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा की दो-तिहाई है। अणु का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

हल ऑक्सीजन के अणुओं का द्रव्यमान ( $M$ ) =  $5.30 \times 10^{-26} \text{ kg}$

$$\text{जड़त्व आधूर्ण } I = 1.94 \times 10^{-46} \text{ kg-m}^2$$

$$\text{अणुओं की औसत चाल } (v) = 500 \text{ m/s}$$

$$\text{दिया है, धूर्णन ऊर्जा} = \frac{2}{3} \times \text{स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा}$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} M v^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mv^2}{I}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 5.30 \times 10^{-26} \times (500)^2}{1.94 \times 10^{-46}}}$$

$$= 1.35 \times 10^{10} \times 500$$

$$= 6.75 \times 10^{12} \text{ rad/s}$$

## Ques 20

एक बेलन  $30^\circ$  कोण बनाते आनत तल पर लुढ़कता हुआ ऊपर चढ़ता है। आनत तल की तली में बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल  $5 \text{ m/s}$  है।

- आनत तल पर बेलन कितना ऊपर जायेगा?
- बापस तली तक लौट आने में इसे कितना समय लगेगा?

हल कोण ( $\theta$ ) =  $30^\circ$

द्रव्यमान केन्द्र की चाल ( $v$ ) =  $5 \text{ m/s}$

- आनत तल पर लुढ़ककर ऊपर चढ़ते हुए बेलन का त्वरण

$$a = - \left( \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{K^2}{R^2}} \right)$$

जहाँ,  $K$  = बेलन की धूर्णन त्रिज्या है।

बेलन के लिये, जड़त्व आघूर्ण  $I = mK^2 = \frac{1}{2}mR^2$

या

$$K^2 = \frac{R^2}{2}$$

$\therefore$

$$a = - \frac{9.8 \times \sin 30^\circ}{\left( 1 + \frac{R^2/2}{R^2} \right)}$$

$$= - \frac{9.8 \times 1/2}{3/2} = - \frac{9.8}{3} \text{ m/s}^2$$

गति के समीकरण से,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = (5)^2 + 2 \left( -\frac{9.8}{3} \right) \times s$$

या

$$s = \frac{25 \times 3}{2 \times 9.8} = 3.83 \text{ m}$$

ऐकलिपक विधि

ऊर्जा संरक्षण के नियम से

गतिज ऊर्जा में कमी = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

बेलन का समित अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\text{कोणीय देग}, \omega = \frac{v}{R}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right) \times \frac{v^2}{R^2} = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = mgh$$

$$\frac{3}{4}v^2 = gh$$

या 
$$h = \frac{3v^2}{4g}$$

$$\therefore h = \frac{3 \times (5)^2}{4 \times 9.8} = \frac{3 \times 25}{4 \times 9.8}$$

$$= 1.913 \text{ m}$$

यदि आनत तल पर चली गयी दूरी s है तब

$$\sin\theta = \frac{h}{s}$$

या 
$$s = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1.913}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{1.913}{(1/2)} = 3.826 \text{ m} \approx 3.83 \text{ m}$$

(b) अवमंदित त्वरण 
$$a = \frac{gs\sin\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)} = \frac{9.8}{3} \text{ m/s}^2$$

प्रारम्भिक वेग ( $u$ ) = 0

गति की समीकरण से, 
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = 0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{समय } t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times \left(\frac{25 \times 3}{2 \times 9.8}\right)}{(9.8 / 3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 \times 3 \times 3}{9.8 \times 9.8}}$$

$$= \frac{5 \times 3}{9.8} = 1.53 \text{ s}$$

ऊपर चढ़ने में लगा समय = नीचे आने में लगा समय

$\therefore$  नीचे आने में लगा कुल समय

$$T = 2t = 2 \times 1.53 = 3.06 \text{ s}$$