

अध्याय 10

शांकव परिच्छेदन

Conic Sections

Exercise 10.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) निम्नलिखित प्रश्नों में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

यदि वृत्त का केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या (r) है, तब वृत्त की समीकरण निम्न होती है,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

प्रश्न 1. केंद्र $(0, 2)$ और त्रिज्या 2 इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (0, 2)$ तथा त्रिज्या $r = 2$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4 - 4y = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$[\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

प्रश्न 2. केंद्र $(-2, 3)$ और त्रिज्या 4 इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (-2, 3)$ तथा त्रिज्या $r = 4$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 + 4x + y^2 + 9 - 6y = 16$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ और } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

प्रश्न 3. केंद्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ तथा त्रिज्या $r = \frac{1}{12}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + y^2 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{y}{4} = \frac{1}{144} \quad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{144} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{36 + 9 - 1}{144} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{44}{144} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{11}{36} = 0$$

$$\Rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$$

प्रश्न 4. केंद्र $(1, 1)$ और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (1, 1)$ तथा त्रिज्या $= r = \sqrt{2}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

प्रश्न 5. केंद्र $(-a, -b)$ और त्रिज्या $\sqrt{a^2 - b^2}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (-a, -b)$ तथा त्रिज्या $r = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = (\sqrt{a^2 - b^2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + a^2 + 2ax + y^2 + b^2 + 2by = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$$

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) निम्नलिखित प्रश्नों में वृत्त का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

हल दिए गए वृत्त समीकरण

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36 = (6)^2$$

निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

हम प्राप्त करते हैं, $h = -5, k = 3$ तथा $r = 6$

अतः केंद्र $= (h, k) = (-5, 3)$ तथा त्रिज्या $r = 6$

प्रश्न 7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$$

निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

हम प्राप्त करते हैं, $2g = -4, 2f = -8, c = -45$

$$\Rightarrow g = -2, f = -4, c = -45$$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या क्रमशः $C(-g, -f)$ तथा

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\therefore \text{केंद्र} = (-g, -f) = (2, 4)$$

$$\text{तथा त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - (-45)} = \sqrt{4 + 16 + 45} = \sqrt{65}$$

प्रश्न 8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ से तुलना करने पर,}$$

$$\text{हम प्राप्त करते हैं, } 2g = -8, 2f = 10, c = -12 \Rightarrow g = -4, f = 5, c = -12$$

$$\therefore \text{केंद्र} = (-g, -f) = (4, -5)$$

$$\text{तथा त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 - (-12)} = \sqrt{16 + 25 + 12} = \sqrt{53}$$

प्रश्न 9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0$$

$$2 \text{ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं } x^2 + y^2 - \frac{x}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \text{ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,}$$

$$2g = -\frac{1}{2}, 2f = 0, c = 0 \Rightarrow g = -\frac{1}{4}, f = 0, c = 0$$

$$\therefore \text{केंद्र} = (-g, -f) = (1/4, 0)$$

$$\text{तथा त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0 - 0} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

नोट वृत्त का व्यापक समीकरण में सर्वप्रथम हम x^2 तथा y^2 के गुणांक को धनात्मक इकाई बनाते हैं। अन्यथा केंद्र के निर्देशांक लेने में गलती हो जाती है।

प्रश्न 10. बिंदुओं (4, 1) और (6, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।

हल माना वृत्त की समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$... (i)

चूँकि समी (i), बिंदुओं (4, 1) तथा (6, 5) से होकर गुजरती है अर्थात् ये इसे संतुष्ट करेंगे। जब बिंदु (4, 1) है,

$$(4)^2 + (1)^2 + 2g(4) + 2f(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow 17 + 8g + 2f + c = 0$$

$$\Rightarrow 8g + 2f + c + 17 = 0 \quad \dots (ii)$$

जब बिंदु (6, 5) है,

$$(6)^2 + (5)^2 + 2g(6) + 2f(5) + c = 0$$

$$\Rightarrow 36 + 25 + 12g + 10f + c = 0$$

$$\Rightarrow 12g + 10f + c + 61 = 0 \quad \dots (iii)$$

जैसा कि समी (i) का केंद्र $(-g, -f)$ रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है,

$$\therefore 4(-g) + (-f) = 16$$

$$\Rightarrow 4g + f + 16 = 0 \quad \dots (iv)$$

अब, समी (ii) को समी (iii) में से घटाने पर,

$$4g + 8f + 44 = 0 \quad \dots (v)$$

अब, समी (iv) को समी (v) में से घटाने पर,

$$7f + 28 = 0$$

$$\Rightarrow 7f = -28$$

$$\Rightarrow f = -4$$

$$\text{समी (iv) से, } 4g - 4 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 4g + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4g = -12 \Rightarrow g = -3$$

$$\text{समी (ii) से, } 8(-3) + 2(-4) + c + 17 = 0$$

$$\Rightarrow -24 - 8 + c + 17 = 0$$

$$\Rightarrow c - 32 + 17 = 0$$

$$\Rightarrow c - 15 = 0$$

$$\Rightarrow c = 15$$

g, f तथा c के मानों को समी (i) में रखने पर, हम वृत्त की अभीष्ट समीकरण प्राप्त करते हैं,

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-4)y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$$

प्रश्न 11. बिंदुओं (2, 3) तथा (-1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

हल माना वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots(i)$$

समी (i), बिंदुओं (2, 3) तथा (-1, 1) से होकर जाती है अर्थात् ये इसको संतुष्ट करेंगे।

जब बिंदु (2, 3) है, $(2)^2 + (3)^2 + 2g(2) + 2f(3) + c = 0$

$$\Rightarrow 4g + 6f + c + 13 = 0 \quad \dots(ii)$$

तथा जब बिंदु (-1, 1), है $(-1)^2 + (1)^2 + 2g(-1) + 2f(1) + c = 0$

$$\Rightarrow -2g + 2f + c + 2 = 0 \quad \dots(iii)$$

जैसा कि केंद्र $(-g, -f)$ रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है,

अर्थात् $(-g) - 3(-f) - 11 = 0$

$$\Rightarrow -g + 3f - 11 = 0 \quad \dots(iv)$$

अब समी (iii) को समी (ii) में से घटाने पर हम पाते हैं,

$$6g + 4f + 11 = 0 \quad \dots(v)$$

समी (iv) से, $g = 3f - 11$ समी (v) में रखने पर हम पाते हैं,

$$6(3f - 11) + 4f + 11 = 0$$

$$\Rightarrow 18f - 66 + 4f + 11 = 0$$

$$\Rightarrow 22f - 55 = 0$$

$$\Rightarrow f = \frac{55}{22} \Rightarrow f = \frac{5}{2}$$

समी (iv) से, $g = 3 \times \frac{5}{2} - 11 = \frac{15 - 22}{2} = -\frac{7}{2}$

समी (ii) से, $4 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 6\left(\frac{5}{2}\right) + c + 13 = 0$

$$\Rightarrow -14 + 15 + c + 13 = 0$$

$$\Rightarrow c + 14 = 0$$

$$\Rightarrow c = -14$$

g, f तथा c के मानों को समी (i) में रखने पर वृत्त की अभीष्ट समीकरण,

$$x^2 + y^2 + 2x\left(-\frac{7}{2}\right) + 2y\left(\frac{5}{2}\right) - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$$

प्रश्न 12. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र x -अक्ष पर हो और जो बिंदु (2, 3) से जाता है।

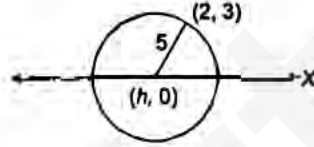
हल माना वृत्त का केंद्र $(h, 0)$ है, चूँकि वृत्त का केंद्र x -अक्ष पर स्थित है। अतः इसका y -निर्देशांक शून्य होगा।

चूँकि वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त के केंद्र की दूरी = त्रिज्या

$$\therefore \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$$

$$\therefore \sqrt{(h - 2)^2 + (0 - 3)^2} = 5 \quad (\because x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = h, y_2 = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow h^2 + 4 - 4h + 9 = 25 && \text{(दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)} \\
 &\Rightarrow h^2 - 4h + 13 - 25 = 0 \\
 &\Rightarrow h^2 - 4h - 12 = 0 \\
 &\Rightarrow h^2 - 6h + 2h - 12 = 0 \\
 &\Rightarrow h(h - 6) + 2(h - 6) = 0 \\
 &\Rightarrow (h - 6)(h + 2) = 0 \\
 &\Rightarrow h - 6 = 0 \text{ या } h + 2 = 0 \Rightarrow h = 6 \text{ या } -2
 \end{aligned}$$



∴ केंद्र (6, 0) या (-2, 0) है।

अतः वृत्त की समीकरण

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ के प्रयोग द्वारा,}$$

जब $(h, k) = (6, 0)$ तथा $r = 5$,

$$\begin{aligned}
 &(x - 6)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \\
 &\Rightarrow x^2 + 36 - 12x + y^2 = 25 \\
 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0
 \end{aligned}$$

और जब $(h, k) = (-2, 0)$ तथा $r = 5$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 && [\because (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2] \\
 &\Rightarrow x^2 + 4 + 4x + y^2 = 25 \\
 &\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0
 \end{aligned}$$

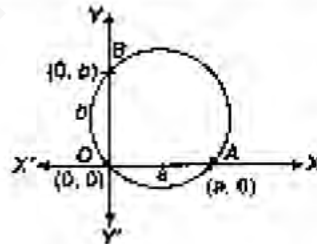
प्रश्न 13. $(0, 0)$ से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों पर a तथा b अंतःखंड बनाता है।

हल चूँकि वृत्त निर्देशाक्षों को a तथा b पर अंतःखंडित करता है। इसका अर्थ है कि x -अक्ष पर अंतःखंड बिंदु $(a, 0)$ तथा y -अक्ष पर अंतःखंड बिंदु $(0, b)$ है, अतः वृत्त बिंदुओं $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ तथा $B(0, b)$ से होकर गुजरता है।

माना गुण का व्यापक समीकरण,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots(i)$$

चूँकि समी (i) बिंदुओं $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ तथा $B(0, b)$ से होकर जाती है अर्थात् ये इसे संतुष्ट करेंगे।



जब बिंदु (0, 0) है,

$$0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

जब बिंदु (a, 0) है,

$$a^2 + 0 + 2ag + 0 + 0 = 0 \Rightarrow a^2 + 2ag = 0$$

$$\Rightarrow g = -\frac{a}{2}$$

तथा जब बिंदु (0, b) है,

$$0 + b^2 + 0 + 2bf + 0 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bf = 0 \Rightarrow f = -\frac{b}{2}$$

g, f तथा c के मानों को समी (i) में रखने पर वृत्त की अभीष्ट समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\text{अर्थात् } x^2 + y^2 + 2x\left(-\frac{a}{2}\right) + 2y\left(-\frac{b}{2}\right) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

प्रश्न 14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 2) हो तथा बिंदु (4, 5) से जाता है।

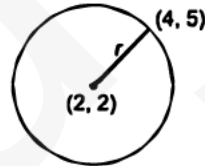
यदि बिंदु $P(x, y)$ वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक हैं तथा (h, k) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक है, तब त्रिज्या

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

हल यहाँ, केंद्र $(h, k) = (2, 2)$ तथा वृत्त पर स्थित बिंदु $P(x, y) = (4, 5)$ है।

$$\therefore r = \sqrt{(2-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$[\because r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}]$$



वृत्त की समीकरण

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2 \text{ [दिया है, } (h, k) = (2, 2) \text{ तथा } r = \sqrt{13}]$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 4 - 4y = 13$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$

प्रश्न 15. क्या बिंदु $(-2.5, 3.5)$ वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अंदर, बाहर या वृत्त पर स्थित है?

हल दिया है, वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 = 25$$

माना

$$S = x^2 + y^2 - 25$$

...(i)

$(x, y) = (-2.5, 3.5)$ समी (i) में रखने पर,

$$\Rightarrow S = (-2.5)^2 + (3.5)^2 - 25 = 6.25 + 12.25 - 25 = 18.50 - 25 = -6.50 < 0$$

$\therefore$ बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है।

नोट बिंदु (x_1, y_1) पर, यदि $S_1 > 0$ तब बिंदु वृत्त के बाहर, यदि $S_1 = 0$, तब बिंदु वृत्त पर तथा यदि $S_1 < 0$, तब बिंदु वृत्त के अंदर स्थित होते हैं।

Exercise 10.2

निर्देश (प्र. सं. 1-6) निम्नलिखित प्रश्नों में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $y^2 = 12x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = 12x$

जो $y^2 = 4ax$ रूप की है अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की धन दिशा में स्थित है।

यहाँ,

$$4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

नाभियाँ $= (a, 0) = (3, 0)$

अक्ष = X-अक्ष

नियता,

$$x = -a \Rightarrow x = -3$$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 3 = 12$

प्रश्न 2. $x^2 = 6y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = 6y$, जोकि $x^2 = 4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की धन दिशा में स्थित है।

यहाँ,

$$4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

नाभियाँ $= (0, a) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

अक्ष = Y-अक्ष

नियता, $y = -a \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

प्रश्न 3. $y^2 = -8x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = -8x$ है, जो $y^2 = -4ax$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।

यहाँ,

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

नाभियाँ $= (-a, 0) = (-2, 0)$

अक्ष = X-अक्ष

नियता, $x = a \Rightarrow x = 2$
 नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 2 = 8$

प्रश्न 4. $x^2 = -16y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = -16y$ है, जो $x^2 = -4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।
 यहाँ, $4a = 16 \Rightarrow a = 4$
 नाभियाँ $= (0, -a) = (0, -4)$
 अक्ष = Y-अक्ष
 नियता, $y = a \Rightarrow y = 4$
 नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 4 = 16$

प्रश्न 5. $y^2 = 10x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = 10x$ है, जो $y^2 = 4ax$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की धन दिशा में स्थित है।
 यहाँ, $4a = 10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$
 नाभियाँ $= (a, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$
 अक्ष = X-अक्ष
 नियता, $x = -a \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$
 नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times \frac{5}{2} = 10$

प्रश्न 6. $x^2 = -9y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = -9y$ है, जो $x^2 = -4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।
 यहाँ, $4a = 9$
 $\Rightarrow a = \frac{9}{4}$
 नाभियाँ $= (0, -a) = \left(0, -\frac{9}{4}\right)$
 अक्ष = Y-अक्ष
 नियता, $y = a \Rightarrow y = \frac{9}{4}$
 नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 9$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 12) निम्नलिखित प्रश्नों में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

प्रश्न 7. नाभि (6, 0) तथा नियता $x = -6$

हल दिया है कि, नाभि (6, 0) तथा नियता $x = -6$ है।

यहाँ, हम देखते हैं कि नाभि के निर्देशांक में x -निर्देशांक धनात्मक है तथा y -निर्देशांक शून्य है। अतः नाभि x -अक्ष की धनात्मक दिशा में स्थित है अर्थात् परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$, $a = 6$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = 4 \times 6x \Rightarrow y^2 = 24x$$

प्रश्न 8. नाभि (0, -3) तथा नियता $y = 3$

हल दिया है कि नाभि = (0, -3) तथा नियता $y = 3$

चूँकि नाभि y -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है अर्थात् परवलय की समीकरण $x^2 = -4ay$, $a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$x^2 = -4(3)y \Rightarrow x^2 = -12y$$

प्रश्न 9. शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (3, 0)

हल दिया है कि शीर्ष = (0, 0)

नाभि = (3, 0)

चूँकि शीर्ष (0, 0) तथा नाभि x -अक्ष की धन दिशा में स्थित है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$, $a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 \times 3x \\ \Rightarrow y^2 &= 12x \end{aligned}$$

प्रश्न 10. शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (-2, 0)

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

नाभि = (-2, 0)

चूँकि शीर्ष (0, 0) तथा नाभि x -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = -4ax$, $a = 2$ के साथ के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = -4(2)x = -8x$$

प्रश्न 11. शीर्ष (0, 0), (2, 3) से जाता है और अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

बिंदु = (2, 3), अक्ष = x -अक्ष

चूँकि बिंदु (2, 3) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा अक्ष X-अक्ष है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप की होगी, जोकि बिंदु (2, 3) से होकर गुजरती है अर्थात्

$$x = 2, y = 3 \text{ परवलय की समीकरण } y^2 = 4ax$$

$$\therefore (3)^2 = 4a \times (2) \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$

अतः परवलय की अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

प्रश्न 12. शीर्ष (0, 0), (5, 2) से जाता है और Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

बिंदु = (5, 2)

चूँकि बिंदु (5, 2) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा अक्ष Y-अक्ष है। इस प्रकार परवलय Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है। अतः परवलय की समीकरण $x^2 = 4ay$ के रूप की होगी, जो बिंदु (5, 2) से होकर गुजरती है अर्थात्

$$x = 5, y = 2 \text{ परवलय की समीकरण } x^2 = 4ay \text{ में रखने पर,}$$

$$\therefore (5)^2 = 4a \times 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{25}{8}$$

अतः परवलय की अभीष्ट समीकरण

$$x^2 = 4 \times \frac{25}{8} y \Rightarrow x^2 = \frac{25}{2} y$$

Exercise 10.3

निर्देश (प्र. सं. 1 - 3) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और स्पर्शों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा अभिलंब जीवा की संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

हल दिया है, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{36}$ का हर, भाग $\frac{y^2}{16}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है। दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर,

हम प्राप्त करते हैं,

$$a^2 = 36 \text{ तथा } b^2 = 16$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ तथा } b = 4$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं।

$$\text{अब,} \quad c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

$$\text{नाभियों} = (\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 6, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\text{प्रश्न 2. } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$\therefore \frac{x^2}{4}$ का हर भाग $\frac{y^2}{25}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम पाते हैं

$$b^2 = 4 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 25$$

$$\Rightarrow b = 2 \quad \text{तथा} \quad a = 5$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेंगे।

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{21}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{21})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 5)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$$

प्रश्न 3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{16}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{9}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$a^2 = 16 \text{ तथा } b^2 = 9$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ तथा } b = 3$$

यहाँ, a तथा b लंबाईयों हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

$$\Rightarrow c = \sqrt{7}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियों} = (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{7}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

प्रश्न 4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{25}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{100}$ के हर भाग के छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ के साथ करने पर हम पाते हैं,

$$b^2 = 25 \text{ तथा } a^2 = 100$$

$$\Rightarrow b = 5 \text{ तथा } a = 10$$

यहाँ, a तथा b लंबाईयों हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 25 = 75 = 25 \times 3 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियों} = (0, \pm c) = (0, \pm 5\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}\text{शीर्ष} &= (0, \pm a) = (0, \pm 10) \\ \text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} &= 2a = 2 \times 10 = 20 \\ \text{लघु अक्ष की लंबाई} &= 2b = 2 \times 5 = 10 \\ \text{उत्केंद्रता, } e &= \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 25}{10} = 5\end{aligned}$$

प्रश्न 5. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{49}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{36}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 49, b^2 = 36$$

$\Rightarrow a = 7, b = 6$

यहाँ, a तथा b लंबाईयों हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$

$\Rightarrow c = \sqrt{13}$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

नाभियों $= (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{13}, 0)$

शीर्ष $= (\pm a, 0) = (\pm 7, 0)$

दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 2 \times 7 = 14$

लघु अक्ष की लंबाई $= 2b = 2 \times 6 = 12$

उत्केंद्रता, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 36}{7} = \frac{72}{7}$

प्रश्न 6. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{100}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{400}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम पाते हैं

$$b^2 = 100 \text{ तथा } a^2 = 400$$

$$\Rightarrow b = 10 \text{ तथा } a = 20$$

यहाँ, a तथा b लंबाईयों हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं
अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 100 = 300$

$$\Rightarrow c = 10\sqrt{3}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष Y -अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm 10\sqrt{3})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 20)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 20 = 40$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 10 = 20$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{अभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 100}{20} = 10$$

प्रश्न 7. $36x^2 + 4y^2 = 144$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$36x^2 + 4y^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{36x^2}{144} + \frac{4y^2}{144} = 1 \quad [144 \text{ द्वारा भाग देने पर}]$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$\therefore \frac{x^2}{4}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{36}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y -अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$b^2 = 4 \text{ तथा } a^2 = 36$$

$$\Rightarrow b = 2 \text{ तथा } a = 6$$

यहाँ, a तथा b लंबाईयों हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं
तथा $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32$

$$\Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y -अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm 4\sqrt{2})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 6)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 8. $16x^2 + y^2 = 16$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$\begin{aligned} 16x^2 + y^2 &= 16 \\ \Rightarrow \frac{16x^2}{16} + \frac{y^2}{16} &= 1 & (16 \text{ द्वारा भाग करने पर}) \\ \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{x^2}{1}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{16}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned} b^2 &= 1 \text{ तथा } a^2 = 16 \\ \Rightarrow b &= 1 \text{ तथा } a = 4 \\ \text{यहाँ, } a \text{ तथा } b \text{ लंबाईयों हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं} \\ \text{अब, } c^2 &= a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15 \\ \Rightarrow c &= \sqrt{15} \\ \text{यहाँ, दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः} \end{aligned}$$

$$\text{नाभियों} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{15})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 4)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 36 \\ \Rightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 & (36 \text{ द्वारा भाग देने पर}) \end{aligned}$$

$\therefore \frac{x^2}{9}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{4}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 9 \text{ तथा } b^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ तथा } b = 2$$

$$\text{अब, } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{5}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{5}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

निर्देश (प्र. सं. 10 - 20) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10. शीर्षों $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

हल शीर्ष $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

$$\text{जहाँ, } a = 5 \text{ तथा } c = 4$$

$$\text{अब, } c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore (4)^2 = (5)^2 - b^2$$

$$\rightarrow 16 = 25 - b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 9$ समी (i) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 11. शीर्षों $(0, \pm 13)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$

हल शीर्ष $(0, \pm 13)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ Y-अक्ष पर स्थित होंगी, चूँकि इन दोनों के X-निर्देशांक शून्य हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

$$\text{जहाँ, } a = 13 \text{ तथा } c = 5$$

$$\begin{aligned}
 \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\
 \Rightarrow (5)^2 &= (13)^2 - b^2 \\
 \Rightarrow 25 &= 169 - b^2 \\
 \Rightarrow b^2 &= 169 - 25 \\
 \Rightarrow b^2 &= 144 \\
 a^2 = 169 \text{ तथा } b^2 = 144 \text{ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं} \\
 \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} &= 1
 \end{aligned}$$

प्रश्न 12. शीर्षों $(\pm 6, 0)$ तथा नाभियों $(\pm 4, 0)$

हल शीर्ष $(\pm 6, 0)$ तथा नाभियों $(\pm 4, 0)$ X-अक्ष पर स्थित होंगे, चूँकि इन दोनों के y-निर्देशांक शून्य हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, $a = 6$ तथा $c = 4$

$$\begin{aligned}
 \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\
 \Rightarrow (4)^2 &= (6)^2 - b^2 \\
 \Rightarrow 16 &= 36 - b^2 \\
 \Rightarrow b^2 &= 36 - 16 = 20
 \end{aligned}$$

$a^2 = 36$ तथा $b^2 = 20$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

प्रश्न 13. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 3, 0)$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm 2)$

हल चूँकि दीर्घ अक्ष $(\pm 3, 0)$ X-अक्ष के अनुदिश तथा लघु अक्ष $(0, \pm 2)$ Y-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, $a = 3$ तथा $b = 2$

अतः समी (i) से,

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

या

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

प्रश्न 14. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm \sqrt{15})$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 1, 0)$

हल चूँकि दीर्घ अक्ष $(0, \pm \sqrt{15})$ Y-अक्ष के अनुदिश तथा लघु अक्ष $(\pm 1, 0)$ X-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, $a = \sqrt{15}$ तथा $b = 1$

अतः समी (i) से, $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{15})^2} = 1$
या $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{15} = 1$

प्रश्न 15. दीर्घ अक्ष की लंबाई 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$

हल नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

दिया है कि, दीर्घ अक्ष की लंबाई, $2a = 26 \Rightarrow a = 13$ तथा $c = 5$

$$\begin{aligned} \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow (5)^2 &= (13)^2 - b^2 \\ \Rightarrow 25 &= 169 - b^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 169 - 25 = 144 \end{aligned}$$

$a^2 = 169$ तथा $b^2 = 144$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

प्रश्न 16. लघु अक्ष की लंबाई 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$

हल नाभियाँ $(0, \pm 6)$ Y-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

दिया है कि लघु अक्ष की लंबाई, $2b = 16$ तथा $c = 6$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b &= 8 \text{ तथा } c = 6 \\ \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow (6)^2 &= a^2 - (8)^2 \\ \Rightarrow 36 &= a^2 - 64 \\ \Rightarrow a^2 &= 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

$a^2 = 100$ तथा $b^2 = 64$ समी (ii) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

प्रश्न 17. नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

हल नाभियाँ $(\pm 3, 0)$ X-अक्ष पर स्थित होंगी, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

दिया है कि नाभियों $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$

$$\begin{aligned} \therefore c &= 3 \text{ तथा } a = 4 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \\ (3)^2 &= (4)^2 - b^2 \\ \Rightarrow 9 &= 16 - b^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 16 - 9 \\ \Rightarrow b^2 &= 7 \end{aligned}$$

$a^2 = 16$ तथा $b^2 = 7$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

प्रश्न 18. $b = 3, c = 4$, केंद्र मूल बिंदु पर, नाभियाँ X -अक्ष पर।

हल चूँकि नाभियाँ X -अक्ष पर स्थित हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

दिया है कि,

$$\begin{aligned} b &= 3, c = 4 \\ \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow (4)^2 &= a^2 - (3)^2 \\ \Rightarrow 16 &= a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \\ \Rightarrow a^2 &= 25 \end{aligned}$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 9$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 19. केंद्र $(0, 0)$ पर दीर्घ अक्ष Y -अक्ष पर और बिंदुओं $(3, 2)$ और $(1, 6)$ से जाता है।

हल चूँकि दीर्घ अक्ष Y -अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

दिया है कि समी (ii) बिंदुओं $(3, 2)$ तथा $(1, 6)$ से होकर जाती है अर्थात् ये बिंदु इसे संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore \frac{3^2}{b^2} + \frac{2^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{4}{a^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा } \frac{1^2}{b^2} + \frac{6^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{36}{a^2} = 1 \quad \dots(iii)$$

समी (ii) को 9 से गुणा करके, समी (iii) में से घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{80}{b^2} = 8 \Rightarrow b^2 = \frac{80}{8}$$

$$\Rightarrow b^2 = 10$$

$$\text{समी (ii) से, } \frac{9}{10} + \frac{4}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a^2} = 1 - \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{1}{10} \Rightarrow a^2 = 40$$

$a^2 = 40$ तथा $b^2 = 10$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$$

प्रश्न 20. दीर्घ अक्ष, X -अक्ष पर और बिंदुओं (4, 3) और (6, 2) से जाता है।

हल चूँकि दीर्घ अक्ष, X -अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

दिया है कि समी (i) बिंदुओं (4, 3) तथा (6, 2) से होकर जाती है अर्थात् ये समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore \frac{(4)^2}{a^2} + \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा} \quad \frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots(iii)$$

समी (ii) को 4 से तथा समी (iii) को 9 से गुणा करके घटाने पर, हम पाते हैं,

$$\frac{64}{a^2} - \frac{324}{a^2} = 4 - 9 \Rightarrow -\frac{260}{a^2} = -5$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{260}{5} \Rightarrow a^2 = 52$$

समी (ii) से,

$$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{52} \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{52 - 16}{52}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{36}{52} \Rightarrow b^2 = \frac{9 \times 52}{36} = 13$$

$a^2 = 52$ तथा $b^2 = 13$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

Exercise 10.4

निर्देश (प्र. सं. 1 - 6) निम्नलिखित प्रश्नों में अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक,

उत्केन्द्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

हल दी गई समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ को $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 16 \text{ तथा } b^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \text{ तथा } b = 3 \\ \text{अब, } c^2 &= a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \\ \Rightarrow c &= 5 \quad (\because c \text{ धनात्मक जरूरी है}) \end{aligned}$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में x^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\begin{aligned} \text{नाभि} &= (\pm c, 0) = (\pm 5, 0) \\ \text{शीर्ष} &= (\pm a, 0) = (\pm 4, 0) \\ \text{उत्केंद्रता } e &= \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \\ \text{नाभिलंब} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

प्रश्न 2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

हल दी गई समीकरण $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ की $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\Rightarrow \begin{aligned} a^2 &= 9 \text{ तथा } b^2 = 27 \\ a &= 3 \text{ तथा } b = 3\sqrt{3} \quad (\because a, b > 0) \\ \therefore c^2 &= a^2 + b^2 = 9 + 27 = 36 \\ \Rightarrow c &= 6 \quad (\because c \text{ धनात्मक है}) \end{aligned}$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

$$\begin{aligned} \text{नाभि} &= (0, \pm c) = (0, \pm 6) \\ \text{शीर्ष} &= (0, \pm a) = (0, \pm 3) \\ \text{उत्केंद्रता, } e &= \frac{c}{a} = \frac{6}{3} = 2 \\ \text{नाभिलंब} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 27}{3} = 18 \end{aligned}$$

नोट अतिपरवलय की समीकरण में, यदि x^2 का गुणांक धनात्मक है, तब इसका अनुप्रस्थ अक्ष X-अक्ष होता है तथा यदि y^2 का गुणांक धनात्मक है, तब इसका अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष होता है।

प्रश्न 3. $9y^2 - 4x^2 = 36$

हल दिया है कि समीकरण $9y^2 - 4x^2 = 36$ को 36 से दोनों पक्षों में भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{9y^2}{36} - \frac{4x^2}{36} &= \frac{36}{36} \\ \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

अब, समीकरण $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर हम पाते हैं,

$$a^2 = 4 \text{ तथा } b^2 = 9$$

$\Rightarrow$

$$a = 2 \text{ तथा } b = 3$$

$\therefore$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow$

$$c^2 = 4 + 9 = 13$$

$\Rightarrow$

$$c = \sqrt{13}$$

($\because c$ घनात्मक है)

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक घनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{13})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 2)$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{2} = 9$$

प्रश्न 4. $16x^2 - 9y^2 = 576$

हल दी गई समीकरण $16x^2 - 9y^2 = 576$ को 576 द्वारा भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{16x^2}{576} - \frac{9y^2}{576} = \frac{576}{576} \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

अब, समीकरण $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ की तुलना $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर, हम पाते हैं

$$a^2 = 36 \text{ तथा } b^2 = 64$$

$\Rightarrow$

$$a = 6 \text{ तथा } b = 8$$

$\therefore$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$$

$\Rightarrow$

$$c = 10$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में x^2 का गुणांक घनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (\pm c, 0) = (\pm 10, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 6, 0)$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 64}{6} = \frac{64}{3}$$

प्रश्न 5. $5y^2 - 9x^2 = 36$

हल दी गई समीकरण $5y^2 - 9x^2 = 36$ को 36 के द्वारा भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

समीकरण $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर,

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{5} \text{ तथा } b^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{5}} \text{ तथा } b = 2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = \frac{36}{5} + 4$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{36 + 20}{5} = \frac{56}{5}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक घनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = \left(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = \left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{8\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

प्रश्न 6. $49y^2 - 16x^2 = 784$

हल दी गई समीकरण $49y^2 - 16x^2 = 784$, को 784 द्वारा भाग देने पर, हम पाते हैं,

$$\frac{49y^2}{784} - \frac{16x^2}{784} = \frac{784}{784}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

समीकरण $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर,

$$a^2 = 16 \text{ तथा } b^2 = 49$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ तथा } b = 7$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{65} \quad (\because c > 0)$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक घनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{65})$$

$$\begin{aligned}\text{शीर्ष} &= (0, \pm a) = (0, \pm 4) \\ \text{उत्केन्द्रता, } e &= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4} \\ \text{नाभिलंब} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 49}{4} = \frac{49}{2}\end{aligned}$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 15) निम्नलिखित प्रश्नों तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. शीर्ष $(\pm 2, 0)$, नाभियाँ $(\pm 3, 0)$

हल चूँकि शीर्ष $(\pm 2, 0)$ तथा नाभि $(\pm 3, 0)$ X-अक्ष पर स्थित है, जैसा कि इनका y -निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, दिया है कि

$$\begin{aligned}a &= 2 \quad \text{तथा} \quad c = 3 \\ \therefore c^2 &= a^2 + b^2 \\ \Rightarrow 9 &= 4 + b^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 5\end{aligned}$$

समी (i) में $a^2 = 4$ तथा $b^2 = 5$ के मान रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

प्रश्न 8. शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$

हल चूँकि शीर्ष $(0, \pm 5)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 8)$ Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका x -निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

जहाँ, दिया है कि $(0, \pm a) = (0, \pm 5)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm c) = (0, \pm 8)$

$$\begin{aligned}a &= 5 \quad \text{तथा} \quad c = 8 \\ \therefore c^2 &= a^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 25 + b^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 64 - 25 \\ \Rightarrow b^2 &= 39\end{aligned}$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 39$ का मान समी (ii) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$$

प्रश्न 9. शीर्ष $(0, \pm 3)$ तथा नाभियों $(0, \pm 5)$

हल चूंकि शीर्ष $(0, \pm 3)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ Y -अक्ष पर स्थित हैं, चूंकि इनका x -निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि शीर्ष $(0, \pm 3) = (0, \pm a)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5) = (0, \pm c)$

$$a = 3 \quad \text{तथा} \quad c = 5$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$a^2 = 9$ तथा $b^2 = 16$ सभी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

प्रश्न 10. नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 8 है।

हल चूंकि नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ X -अक्ष पर स्थित हैं, चूंकि इसका y -निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(\pm 5, 0) = (\pm c, 0)$ तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई $2b = 8$

$$c = 5 \quad \text{तथा} \quad 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 25 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow b^2 = 9$$

$a^2 = 16$ तथा $b^2 = 9$ सभी (ii) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 11. नाभियाँ $(0, \pm 13)$ तथा संयुग्मी अक्ष की लंबाई 24 है।

हल चूंकि नाभियाँ $(0, \pm 13)$ Y -अक्ष पर स्थित हैं, चूंकि इसका x -निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \dots(iii)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(0, \pm 13) = (0, \pm c)$ तथा संयुग्मी अक्ष की लंबाई $2b = 24$

$$c = 13 \quad \text{तथा} \quad b = 12$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore 169 = a^2 + 144 \Rightarrow a^2 = 169 - 144 \Rightarrow a^2 = 25$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 144$ सभी (iii) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

प्रश्न 12. नाभियों $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$ नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 है।

हल: चूंकि नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूंकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।
अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0) = (\pm c, 0)$

$$c = 3\sqrt{5}$$

तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई

$$\frac{2b^2}{a} = 8$$

$$\Rightarrow b^2 = 4a$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore (3\sqrt{5})^2 = a^2 + 4a$$

$$\Rightarrow 9 \times 5 = a^2 + 4a$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a - 45 = 0$$

मध्य पद को विभक्त करने पर,

$$\Rightarrow a^2 + 9a - 5a - 45 = 0$$

$$\Rightarrow a(a + 9) - 5(a + 9) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 5)(a + 9) = 0$$

$$\Rightarrow a - 5 = 0, a + 9 = 0$$

$$\Rightarrow a = 5, a = -9$$

$\therefore a$ ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

$$\therefore a = 5 \Rightarrow b^2 = 4 \times 5 = 20$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 20$ समी (i) में रखने पर हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$$

प्रश्न 13. नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 है।

हल: चूंकि नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूंकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(\pm 4, 0) = (\pm c, 0)$ तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a} = 12$

$$\therefore c = 4 \text{ तथा } b^2 = 6a \quad \dots (ii)$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 16 = a^2 + 6a$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a - 16 = 0$$

मध्य पद को विभक्त करने पर,

$$a^2 + 8a - 2a - 16 = 0$$

$$\Rightarrow a(a + 8) - 2(a + 8) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 8) = 0$$

$$\Rightarrow a - 2 = 0, a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2, -8$$

$\therefore a$ ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

$$\therefore a = 2$$

$$\Rightarrow b^2 = 6a = 6 \times 2 = 12$$

$a^2 = 4$ तथा $b^2 = 12$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

प्रश्न 14. शीर्ष $(\pm 7, 0)$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{4}{3}$ है।

हल चूँकि शीर्ष $(\pm 7, 0)$ X-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि शीर्ष $(\pm 7, 0) = (\pm a, 0)$

$$a = 7 \text{ तथा } e = \frac{4}{3}$$

$$\therefore c = ae$$

$$\Rightarrow c = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\text{तथा } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{784}{9} = 49 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{784}{9} - \frac{49}{1}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{784 - 441}{9}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{343}{9}$$

$a^2 = 49$ तथा $b^2 = \frac{343}{9}$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{\frac{343}{9}} = 1$$

$$\text{या } \frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$$

प्रश्न 15. नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10})$ है तथा $(2, 3)$ से होकर जाता है

हल चूँकि नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10})$ Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10}) = (0, \pm c) \Rightarrow c = \sqrt{10}$

तथा अतिपरवलय बिंदु $(2, 3)$ से होकर गुजरता है अर्थात् बिंदु समी (i) को संतुष्ट करेगा।

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \frac{(3)^2}{a^2} - \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \\ \Rightarrow & \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots(ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because & c = \sqrt{10} \\ \Rightarrow & c^2 = 10 \\ \Rightarrow & a^2 + b^2 = 10 \quad (\because c^2 = a^2 + b^2) \\ \Rightarrow & b^2 = 10 - a^2 \quad \dots(iii) \end{aligned}$$

समी (ii) से, $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{10 - a^2} = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{90 - 9a^2 - 4a^2}{a^2(10 - a^2)} = 1 \\ \Rightarrow & 90 - 13a^2 = 10a^2 - a^4 \\ \Rightarrow & a^4 - 23a^2 + 90 = 0 \\ \Rightarrow & a^4 - 18a^2 - 5a^2 + 90 = 0 \\ \Rightarrow & a^2(a^2 - 18) - 5(a^2 - 18) = 0 \\ \Rightarrow & (a^2 - 5)(a^2 - 18) = 0 \\ \Rightarrow & a^2 = 5 \text{ या } a^2 = 18 \end{aligned}$$

समी (iii) से, यदि $a^2 = 5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & b^2 = 10 - 5 = 5 \\ \text{यदि} & a^2 = 18 \\ \Rightarrow & b^2 = 10 - 18 = -8 \end{aligned}$$

जोकि संभव नहीं है।

अतः $a^2 = b^2 = 5$

$a^2 = b^2 = 5$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1 \\ \Rightarrow & y^2 - x^2 = 5 \end{aligned}$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. यदि एक परवलाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।

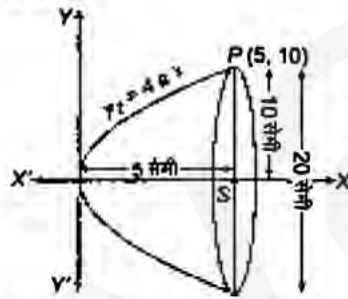
हल परवलाकार परावर्तक के शीर्ष को मूलबिंदु पर तथा X-अक्ष को परवलय के अक्ष के अनुदिश लेते हैं। परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$ है। दी गई गहराई 5 सेमी तथा व्यास 20 सेमी है।

∴ बिंदु $P(5, 10)$ परवलय पर स्थित है।

$$(10)^2 = 4a(5) \Rightarrow a = 5$$

स्पष्ट है कि नाभि दिए गए व्यास के मध्य-बिंदु पर है।

अर्थात् $S = (5, 0)$



प्रश्न 2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराब 10 मी ऊँचा है और आधार 5 मी चौड़ा है। यह परवलय के 2 मी की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

हल चूँकि अक्ष ऊर्ध्वाधर है, अतः माना मेहराब परवलय के रूप का है।

$$x^2 = 4ay \quad \dots (i)$$

दिया है, $OB = 10$ मी

तथा $AC = 5$ मी $\Rightarrow AB = \frac{5}{2}$ मी $(\because AC = 5)$

अतः $A = \left(\frac{5}{2}, 10\right)$ के निर्देशांक समी (i) को संतुष्ट करेंगे।

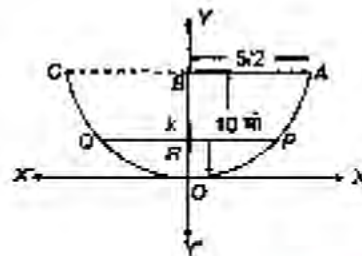
$$\text{अर्थात्} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25}{4} = 40a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{5}{32}$$

समी (i) से, $x^2 = 4 \times \frac{5}{32} y$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{5}{8} y$$



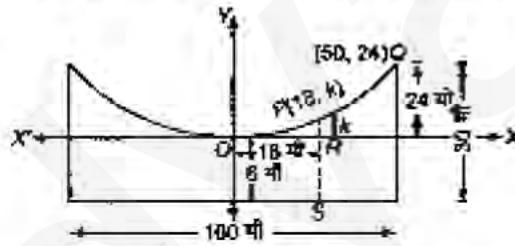
अब, माना $OR = 2$ तथा $PQ = k \Rightarrow RP = \frac{k}{2}$

इस प्रकार, $P = \left(\frac{k}{2}, 2\right)$ परवलय स्थित होंगे।

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{k}{2}\right)^2 &= \frac{5}{8} \times 2 & \left(\because x^2 = \frac{5}{8}y\right) \\ \Rightarrow \frac{k^2}{4} &= \frac{5}{4} \\ \Rightarrow k &= \sqrt{5} = 2.23 \text{ मी (लगभग)} \end{aligned}$$

प्रश्न 3. एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable) परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मी लंबा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लंबा तार 30 मी और सबसे छोटा तार 6 मी है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि तार ऊर्ध्वाधर है, माना परवलय की समीकरण निम्नलिखित रूप में है।



$$x^2 = 4ay \quad \dots(i)$$

नामि केबिल के मध्य में है तथा सबसे छोटे और सबसे लंबे ऊर्ध्वाधर समर्थक क्रमशः 6 मी तथा 30 मी के हैं, तथा सड़क पथ 100 मी लंबा है।

स्पष्ट है कि, $Q(50, 24)$ के निर्देशांक समी (i) को संतुष्ट करेंगे।

$$(50)^2 = 4a \times 24$$

$$\Rightarrow 2500 = 96a \Rightarrow a = \frac{2500}{96}$$

$$\text{अतः समी (i) से, } x^2 = 4 \times \frac{2500}{96} y$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2500}{24} y$$

$$\text{माना } PR = k \text{ मी}$$

$\therefore$ बिंदु $P(18, k)$ परवलय की समीकरण को संतुष्ट करेंगे अर्थात्

$$\text{समी (i) से, } (18)^2 = \frac{2500}{24} \times k$$

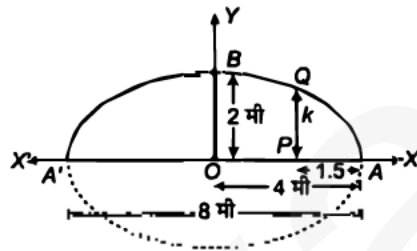
$$\Rightarrow 324 = \frac{2500}{24} k$$

$$\Rightarrow k = \frac{324 \times 24}{2500} = \frac{324 \times 6}{625} = \frac{1944}{625}$$

$$k = 3.11$$

$\therefore$ आवश्यक लंबाई = $6 + k = 6 + 3.11 = 9.11$ मी (लगभग)

प्रश्न 4. एक मेहराब अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मी चौड़ा और केंद्र से 2 मी ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मी दूर बिंदु पर मेहराब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
हल



स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप लेती है।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

यहाँ, यह दिया है कि $2a = 8$ तथा $b = 2 \Rightarrow a = 4, b = 2$

a तथा b के मानों को समी. (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

दिया है, $AP = 1.5$ मी

$$\Rightarrow OP = OA - AP = 4 - 1.5$$

$$\Rightarrow OP = 2.5 \text{ मी}$$

$$\text{माना } PQ = k$$

$\therefore Q$ के निर्देशांक $(2.5, k)$ दीर्घवृत्त की समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

$$\text{अर्थात् } \frac{(2.5)^2}{16} + \frac{k^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6.25}{16} + \frac{k^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} = 1 - \frac{6.25}{16} = \frac{16 - 6.25}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} = \frac{9.75}{16}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{9.75}{4}$$

$$\Rightarrow k^2 = 2.4375$$

$$\Rightarrow k = 1.56 \text{ मी (लगभग)}$$

प्रश्न 5. एक 12 सेमी लंबी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांशों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो x -अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

हल माना AB , 12 सेमी लंबाई की छड़ है।

माना $OA = a$ तथा $OB = b$

$\triangle OAB$ में पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,
(आधार)² + (लंब)² = (कर्ण)²

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (12)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 144 \quad \dots(i)$$

माना $AP = 3$ सेमी $\Rightarrow PB = AB - AP = 12 - 3 = 9$ सेमी

$$\Rightarrow AP : PB = 3 : 9 = 1 : 3$$

माना $P = (h, k)$ जिसके लिए बिंदुपथ ज्ञात करना है।

$\therefore$ यदि बिंदु $P(h, k)$ बिंदुओं A तथा B को मिलाने वाले रेखाखंड को अनुपात $m : n$ में अंतः विभाजित करते हैं, तब

$$h = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, k = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\therefore h = \frac{1 \times 0 + 3 \times a}{1+3}$$

$$h = \frac{3a}{4}$$

$$a = \frac{4h}{3}$$

$$\text{तथा } k = \frac{1 \times b + 3 \times 0}{1+3}$$

$$k = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4k$$

समी (i) में $a = \frac{4h}{3}$ तथा $b = 4k$ के मानों को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\left(\frac{4h}{3}\right)^2 + (4k)^2 = 144$$

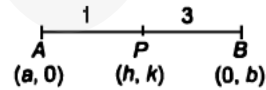
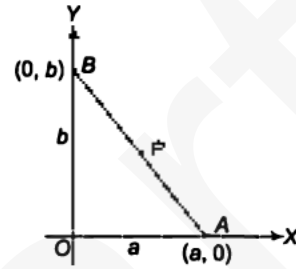
$$\Rightarrow \frac{16h^2}{9} + 16k^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{9} + k^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{9} = 1$$

अतः बिंदु $P(h, k)$ का बिंदुपथ है

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$$



नोट किसी बिंदु (h, k) के लिए बिंदुपथ में, दिए गए प्रतिबंध की सहायता से हम एक संबंध बनाते हैं तथा अंतिम में h को x से तथा k को y से बदल देते हैं, इस प्रकार हमें आवश्यक परिणाम प्राप्त हो जाता है।

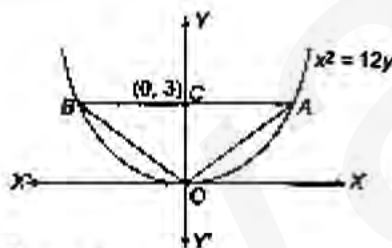
प्रश्न 6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरे को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।

हल स्पष्ट है कि नाभिलंब एक रेखा है जो अक्ष पर लंब है तथा नाभि से होकर जाती है, जिसकी लंबाई $4a$ है।

दिया है कि $x^2 = 12y$, जो $x^2 = 4ay$ के रूप का है।

$$\Rightarrow 4a = 12 = ACB \text{ की लंबाई}$$

$$\therefore \text{नाभि } C = (0, 3)$$



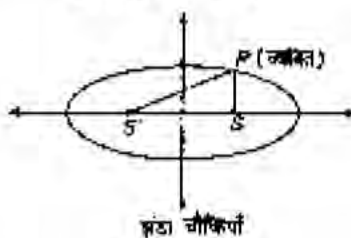
$$\begin{aligned} \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times AB \times OC \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 3 \\ &= 6 \times 3 \\ &= 18 \text{ वर्ग इकाई} \end{aligned}$$

प्रश्न 7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए अंकित करता है कि उससे दो झंड़ा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मी रहता है। और झंड़ा चौकियों के बीच की दूरी 8 मी है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्ट है कि व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए दीर्घवृत्त निरूपित करेगा।

$$\text{दिया है, } SP + S'P = 10$$

$$\text{अर्थात् } 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$



चूँकि S तथा S' के निर्देशांक $(a, 0)$ तथा $(-c, 0)$ हैं। इस प्रकार, S तथा S' के बीच की दूरी है

$$\begin{aligned} 2c &= 8 \\ \Rightarrow c &= 4 \\ \therefore c^2 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow 16 &= 25 - b^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 25 - 16 \\ \Rightarrow b^2 &= 9 \\ \Rightarrow b &= 3 \end{aligned}$$

अतः पथ (दीर्घवृत्त) की समीकरण है

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1 \quad (\because a=5, b=3) \end{aligned}$$

प्रश्न 8. परवलय $y^2 = 4ax$ के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम X -अक्ष की धन दिशा में एक परवलय खींचते हैं तथा इसके भीतर एक समबाहु $\triangle OAB$ बनाते हैं।

माना $OB = l = OA = AB$

$$\therefore \angle BOA = 60^\circ \Rightarrow \angle BOP = 30^\circ$$

$$\triangle BOP \text{ में, } \sin 30^\circ = \frac{PB}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{PB}{l} \Rightarrow PB = \frac{l}{2}$$

$$\text{तथा } \cos 30^\circ = \frac{OP}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OP}{l}$$

$$\Rightarrow OP = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore B \text{ के निर्देशांक} = (OP, PB) = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}\right), y^2 = 4ax \text{ को संतुष्ट करेंगे अर्थात्}$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{4a \times l\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{4} = \frac{4al\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow l = 8\sqrt{3}a$$

अतः त्रिभुज की भुजा की लंबाई $8\sqrt{3}a$ है।

