Chapter 11

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

Introduction to Three Dimensional Geometry

Exercise 11.1

प्रश्न 1. **एक बिंदु x-अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या हैं?**

हल किसी बिंदु के x-अक्ष पर निर्देशांक $(x, 0, 0)$ होते हैं। (क्योंकि x-अक्ष पर y तथा z के निर्देशांक शून्य होते हैं) अतः इसके y तथा z-निर्देशांक 0 है।

प्रश्न 2. **एक बिंदु XZ-तल में है। इसके y-निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?**

हल किसी बिंदु के XZ-तल पर निर्देशांक $(x, 0, z)$ होंगे, तब इसका y-निर्देशांक 0 है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 3. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिंदु स्थित हैं।

(1, 2, 3), (4, −2, 3), (4, −2, −5), (4, 2, −5), (− 4, 2, −5),

(−4, 2, 5), (−3, −1, 6) (2, −4, − 7)

हल

बिंदु	अष्टक	नाम
(1, 2, 3)	प्रथम (सभी निर्देशांक धनात्मक हैं)	$XOYZ$
(4, −2, 3)	चतुर्थ (y- निर्देशांक ऋणात्मक है)	$XOY'Z$
(4, −2, − 5)	अष्टम् (y- तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$XOY'Z'$
(4, 2, − 5)	पंचम् (z-निर्देशांक ऋणात्मक है)	$XOYZ'$
(−4, 2, − 5)	षष्टम् (x तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OYZ'$
(−4, 2, 5)	द्वितीय (x-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OYZ$
(−3, − 1, 6)	तृतीय (x तथा y-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OY'Z$
(2, − 4, −7)	अष्टम् (y तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$XOY'Z'$

प्रश्न 4. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

(i) z-अक्ष और y-अक्ष दोनों एकसाथ मिलकर एक तल बनाते हैं, उस तल को .... कहते हैं।

(ii) XY-तल में एक बिंदु के निर्देशांक .... रूप के होते हैं।

(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को .... अष्टांश में विभाजित करते हैं।

हल (i) XY-तल (ii) $(x, y, 0)$ (iii) अष्टक

Exercise 11.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित बिंदु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए

(i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1) (ii) (−3, 7, 2) और (2, 4, − 1)

(iii) (−1, 3, − 4) और (1, − 3, 4) (iv) (2, − 1, 3) और (−2, 1, 3)

दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

हल (i) माना दिए गए बिंदु $A(2, 3, 5)$ और $B(4, 3, 1)$ हैं।

$\therefore$ $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ z_1 = 5$

$x_2 = 4,\ y_2 = 3,\ z_2 = 1$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\Rightarrow$ $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

(ii) माना दिए गए बिंदु $A(-3, 7, 2)$ तथा $B(2, 4, -1)$ हैं।

यहाँ, $x_1 = -3,\ y_1 = 7,\ z_1 = 2$

$x_2 = 2,\ y_2 = 4,\ z_2 = -1$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{[2-(-3)]^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}$

(iii) माना दिए गए बिंदु $A(-1, 3, -4)$ तथा $B(1, -3, 4)$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2}$

$= \sqrt{4 + 36 + 64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

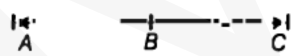
(iv) माना दिए गए बिंदु $A(2, -1, 3)$ तथा $B(-2, 1, 3)$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0}$

$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिंदु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$ संरेख हैं।

तीन बिंदु A, B, C संरेखीय कहलाएँगे, यदि $AB + BC = AC$



हल माना दिए गए बिंदु $A(-2, 3, 5)$; $B(1, 2, 3)$; $C(7, 0, -1)$ हैं।

A तथा B के बीच की दूरी, $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

B तथा C के बीच की दूरी, $BC = \sqrt{(1-7)^2 + (2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

तथा A और C के बीच की दूरी, $AC = \sqrt{(-2-7)^2 + (3-0)^2 + (5+1)^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{81 + 9 + 36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

स्पष्ट है, $AB + BC = AC$

अतः दिए गए बिंदु संरेखीय हैं।

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 3. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए

(i) (0, 7, – 10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) (0, 7, 10), (– 1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(iii) (– 1, 2, 1), (1, – 2, 5), (4, – 7, 8) और (2, – 3, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

एक त्रिभुज समद्विबाहु होता है यदि इसकी कोई दो भुजाएँ बराबर होती हैं।

अतः त्रिभुज को समहिबाहु सिद्ध करने के लिए हमें सिद्ध करना होता है कि इसकी दो भुजाओं की लम्बाई बराबर है।

एक त्रिभुज को समकोण त्रिभुज सिद्ध करने के लिए हमें सिद्ध करना होता है कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर होता है।

समांतर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए, हमे सिद्ध करना होता है कि इसके विकर्ण आपस में समद्विभाजित करते हैं।

हल (i) माना $A(0, 7, -10)$, $B(1, 6, -6)$ तथा $C(4, 9, -6)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं। तब,

भुजा, AB = A तथा B बिंदुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(0-1)^2 + (7-6)^2 + (-10+6)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

तथा भुजा, BC = B तथा C बिंदुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (6-9)^2 + (-6+6)^2}$$

$$= \sqrt{9+9+0}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

स्पष्टतः $AB = BC$

अतः त्रिभुज एक समाद्विबाहु त्रिभुज है।

(ii) माना $A(0, 7, 10)$, $B(-1, 6, 6)$ तथा $C(-4, 9, 6)$ त्रिभुज के शीर्ष है।

तब, $AB = \sqrt{(0+1)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2}$

$\Rightarrow$ $AB = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

तब $BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (6-9)^2 + (6-6)^2}$

$\Rightarrow$ $BC = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

तथा $CA = \sqrt{(-4-0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2}$

$\Rightarrow$ $CA = \sqrt{16+4+16}$

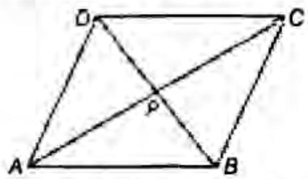
$= \sqrt{36} = 6$

अब, $AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6^2 = CA^2$

$\therefore$ ΔABC, B पर एक समकोण त्रिभुज है।

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

(iii) माना $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, 5)$, $C(4, -7, 8)$ तथा $D(2, -3, 4)$ समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।



तब, AC का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2-7}{2}, \frac{1+8}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

BD का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-2-3}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

दोनों विकर्णों के मध्य-बिंदु समान हैं (अर्थात् ये एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 4. ऐसे बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) और (3, 2, − 1) से समदूरस्थ हैं।

यदि तल में कोई बिंदु इस प्रकार है कि दिए हुए दो बिंदुओं से समान दूरी पर है, तब हम दो बिंदुओं के समदूरस्थ होने के लिए निम्न संबंध प्रयोग कर सकते हैं

$$AP = BP$$

हल माना A तथा B दो दिए गए बिंदु है। माना $P(x, y, z)$ एक ऐसा बिंदु है जो A तथा B से समदूरस्थ है।

$\therefore$ $PA = PB$ अर्थात्

P तथा A के बीच की दूरी $= P$ तथा B के बीच की दूरी

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$

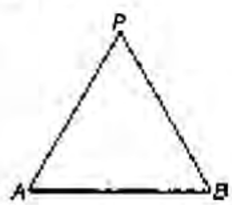
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

$= (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 9 - 6z$

$= x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 1 + 2z$

$\Rightarrow 4x - 8z = 0 \Rightarrow x - 2z = 0$



जोकि आवश्यक प्रतिबंध है।

प्रश्न 5. बिंदुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं $A(4, 0, 0)$ और $B(-4, 0, 0)$ से दूरियों का योगफल 10 है।

हल माना बिंदु $P(x, y, z)$ है, तब दिया है कि $PA + PB = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 10$

https://www.evidyarthi.in/

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 + z^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad x^2 + 16 - 8x = 100 + x^2 + 16 + 8x - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad -8x - 8x - 100 = -20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad -16x - 100 = -20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad 4x + 25 = 5\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर)

पुनः दोनों पक्षों में वर्ग करने पर,

$(4x + 25)^2 = 25[(x+4)^2 + y^2 + z^2]$

$\Rightarrow \quad 16x^2 + 625 + 200x = 25[(x+4)^2 + y^2 + z^2]$

$\Rightarrow \quad 16x^2 + 625 + 200x = 25[x^2 + 16 + 8x + y^2 + z^2]$

$\Rightarrow \quad 16x^2 + 625 + 200x = 25x^2 + 400 + 200x + 25y^2 + 25z^2$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

https://www.evidyarthi.in/

विविध प्रश्नावली

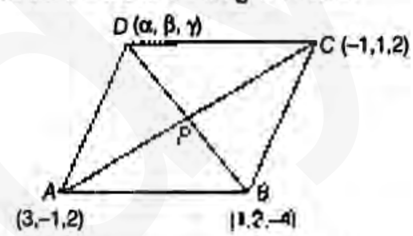
प्रश्न 1. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ व $C(-1, 1, 2)$ हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हम समांतर चतुर्भुज के गुण, कि समांतर चतुर्भुज के विकार्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, के प्रयोग के द्वारा इसका चौथा शीर्ष ज्ञात कर सकते हैं।

हल माना $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है तथा (α, β, γ) बिंदु के निर्देशांक हैं तथा विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज में विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ BD के मध्य-बिंदु के निर्देशांक = AC के मध्य-बिंदु के निर्देशांक



$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, 0, \frac{4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = (1, 0, 2)$$

सापेक्षिक निर्देशांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\alpha+1}{2} = 1, \quad \frac{\beta+2}{2} = 0, \quad \frac{\gamma-4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+1 = 2, \quad \beta+2 = 0, \quad \gamma-4 = 4$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 8$$

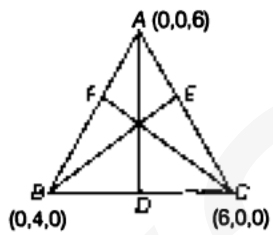
$\therefore$ बिंदु D के निर्देशांक $(1, -2, 8)$ हैं।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 2. एक ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ है। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हम माध्यिकाओं की लंबाई त्रिभुज के गुण, कि त्रिभुज की माध्यिका विपरित भुजा को समद्विभाजित करती है, के प्रयोग के द्वारा ज्ञात कर सकते है।

हल शीर्षों $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ के साथ माना ABC एक त्रिभुज है। माना बिंदु D, E तथा F भुजाओं BC, AC तथा AB के क्रमशः मध्य-बिंदु है। अतः AD, BE तथा CF त्रिभुज की माध्यिकाएँ होंगी।



$\Rightarrow$ बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 2, 0)$

बिंदु E के निर्देशांक $= \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (3, 0, 3)$

तथा बिंदु F के निर्देशांक $= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0, 2, 3)$

अब, AD माध्यिका की लंबाई $= A$ तथा D के बीच की दूरी

$$AD = \sqrt{(0-3)^2 + (0-2)^2 + (6-0)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

इसी प्रकार,
$$BE = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}$$

तथा
$$CF = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

प्रश्न 3. यदि ΔPQR का केंद्रक मूलबिंदु है और शीर्ष $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b, -10)$ और $R(8, 14, 2c)$ है, तो a, b और c मान ज्ञात कीजिए।

हल ΔPQR का केंद्रक $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{2a - 4 + 8}{3}, \frac{2 + 3b + 14}{3}, \frac{6 - 10 + 2c}{3}\right)$

मूलबिंदु केंद्रक है अर्थात् केंद्रक के निर्देशांक $(0, 0, 0)$ हैं, तब

https://www.evidyarthi.in/

$$\frac{2a-4+8}{3}=0$$

$\Rightarrow \quad 2a+4=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2$

तथा $\quad \frac{2+3b+14}{3}=0$

$\Rightarrow \quad 3b+16=0$

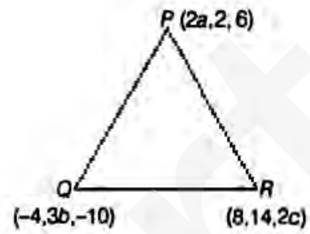
$\Rightarrow \quad b=-\frac{16}{3}$

तथा $\quad \frac{6-10+2c}{3}=0$

$\Rightarrow \quad 2c-4=0$

$\Rightarrow \quad c=2$

$\therefore \quad a=-2, b=\frac{16}{3}, c=2$



https://www.evidyarthi.in/

Ques 4 यदि A तथा B बिंदु के निर्देशांक (3, 4, 5) तथा (– 1, 3, – 7) क्रमशः हैं, तब बिंदु P के समुच्चयों की समीकरणों को इस प्रकार से ज्ञात करो कि

$(PA)^2 + (PB)^2 = K^2$, जहाँ K एक अचर है।

हल माना बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

दिया है, $(PA)^2 + (PB)^2 = K^2$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y + z^2 + 25 - 10z$$
$$+ x^2 + 1 + 2x + y^2 + 9 - 6y + z^2 + 49 + 14z = K^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z + 109 - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 109 - K^2 = 0$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

https://www.evidyarthi.in/