
Chapter 13
सांख्यिकी
Statistics

Exercise 13.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 2) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य

विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

(प्र. सं. 1 - 2) माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन की गणना सूत्र $\frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$, द्वारा की जाती है। जहाँ, $\bar{x}$ = दिए हुए प्रेक्षणों का माध्य

हल दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 17}{8} = 10$$

1.

x_i	$ x_i - \bar{x} $
4	$ 4 - 10 = 6$
7	$ 7 - 10 = 3$
8	$ 8 - 10 = 2$
9	$ 9 - 10 = 1$
10	$ 10 - 10 = 0$
12	$ 12 - 10 = 2$
13	$ 13 - 10 = 3$
17	$ 17 - 10 = 7$
$\sum x_i = 80$	$\sum x_i - \bar{x} = 24$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{24}{8} = 3$$

2. दिए गए आँकड़ों का माध्य $\bar{x} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{\sum x_i}{n}$
 $= \frac{38 + 70 + 48 + 40 + 42 + 55 + 63 + 46 + 54 + 44}{10} = 50$

x_i	$ x_i - \bar{x} $
38	$ 38 - 50 = 12$
70	$ 70 - 50 = 20$
48	$ 48 - 50 = 02$
40	$ 40 - 50 = 10$
42	$ 42 - 50 = 08$
55	$ 55 - 50 = 05$
63	$ 63 - 50 = 13$
46	$ 46 - 50 = 04$
54	$ 54 - 50 = 04$
44	$ 44 - 50 = 06$
$\sum x_i = 500$	$\sum x_i - \bar{x} = 84$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{84}{10} = 8.4$$

निर्देश (प्र. सं. 3-4) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए ओंकेओं के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

सर्वप्रथम दिए गए प्रेक्षणों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करते हैं और तब माध्यिका (M_d) ज्ञात करते हैं। इसके बाद माध्य के सापेक्ष माध्य माध्य विचलन की गणना सूत्र

$$\frac{\sum |x - M_d|}{n} \text{ द्वारा की जाती है। जहाँ, } n = \text{पदों की संख्या।}$$

हल (प्र. सं. 3-4)

3. दिए गए ओंके निम्न हैं, 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17
बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करने पर,

10, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 16, 16, 17, 17, 18

प्रेक्षणों की संख्या = 12 (सम)

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका } M_d &= \frac{\frac{N}{2} \text{ वीं प्रेक्षण} + \left(\frac{N}{2} + 1\right) \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} = \frac{\left(\frac{12}{2}\right) \text{ वीं प्रेक्षण} + \left(\frac{12}{2} + 1\right) \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} \\ &= \frac{6 \text{ वीं प्रेक्षण} + 7 \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_d = 13.5$$

x_i	$ x_i - M $
10	$ 10 - 13.5 = 3.5$
11	$ 11 - 13.5 = 2.5$
11	$ 12 - 13.5 = 2.5$
12	$ 12 - 13.5 = 1.5$
13	$ 13 - 13.5 = 0.5$
13	$ 13 - 13.5 = 0.5$
14	$ 14 - 13.5 = 0.5$
16	$ 16 - 13.5 = 2.5$
16	$ 16 - 13.5 = 2.5$
17	$ 17 - 13.5 = 3.5$
17	$ 17 - 13.5 = 3.5$
18	$ 18 - 13.5 = 4.5$
	$\Sigma x_i - M = 28$

$$\therefore \text{माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\sum |x_i - M_d|}{n} = \frac{28}{12} = 2.33$$

4. दिए गए आँकड़ें निम्न हैं, 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49
दिए गए आँकड़ों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित करने पर,
36, 42, 45, 46, 46, 49, 51, 53, 60, 72
प्रेक्षणों की संख्या = 10 (सम)

$$\begin{aligned} \text{माधिका } M_d &= \frac{\frac{N}{2} \text{ वॉ प्रेक्षण} + \left(\frac{N}{2} + 1\right) \text{ वॉ प्रेक्षण}}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{10}{2}\right) \text{ वॉ प्रेक्षण} + \left(\frac{10}{2} + 1\right) \text{ वॉ प्रेक्षण}}{2} \\ &= \frac{5 \text{ वॉ प्रेक्षण} + 6 \text{ वॉ प्रेक्षण}}{2} = \frac{46 + 49}{2} = 47.5 \end{aligned}$$

x_i	$ x_i - M $
36	$ 36 - 47.5 = 11.5$
42	$ 42 - 47.5 = 5.5$
45	$ 45 - 47.5 = 2.5$
46	$ 46 - 47.5 = 1.5$
46	$ 46 - 47.5 = 1.5$
49	$ 49 - 47.5 = 1.5$
51	$ 51 - 47.5 = 3.5$
53	$ 53 - 47.5 = 5.5$
60	$ 60 - 47.5 = 12.5$
72	$ 72 - 47.5 = 24.5$
	$\Sigma x_i - M = 70$

$$\therefore \text{माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma |x_i - M_d|}{n} = \frac{70}{10} = 7$$

निर्देश (प्र. सं. 5 - 6) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम सूत्र $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ द्वारा

माध्य ज्ञात करते हैं और तब माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना, सूत्र $\frac{\Sigma (f_i |x_i - \bar{x}|)}{\Sigma f_i}$

द्वारा की जाती है

प्रश्न 5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

हल (प्र. सं. 5-6)

5.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
5	7	35	$ 5 - 14 = 9$	63
10	4	40	$ 10 - 14 = 4$	16
15	6	90	$ 15 - 14 = 1$	06
20	3	60	$ 20 - 14 = 6$	18
25	5	125	$ 25 - 14 = 11$	55
	$\Sigma f_i = 25$	$\Sigma f_i x_i = 350$		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} = 158$

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{350}{25} = 14$$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{158}{25} = 6.32$$

6.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
10	4	40	$ 10 - 50 = 40$	160
30	24	720	$ 30 - 50 = 20$	480
50	28	1400	$ 50 - 50 = 00$	000
70	16	1120	$ 70 - 50 = 20$	320
90	8	720	$ 90 - 50 = 40$	320
	$\Sigma f_i = 80$	$\Sigma f_i x_i = 4000$		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} = 1280$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{4000}{80} = 50$$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{1280}{80} = 16$$

निर्देश (प्र. सं. 7-8) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, सर्वप्रथम हम माध्यिका ज्ञात करते हैं और तब माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना, सूत्र $\frac{\Sigma f_i (x_i - M_o)}{\Sigma f_i}$

द्वारा की जाती है।

हल (प्र. सं. 7-8)

7.	x_i	f_i	CF	$ x_i - M $	$f_i x_i - M $
	5	8	8	$ 5 - 7 = 2$	16
	7	6	14	$ 7 - 7 = 0$	00
	9	2	16	$ 9 - 7 = 2$	04
	10	2	18	$ 10 - 7 = 3$	06
	12	2	20	$ 12 - 7 = 5$	10
	15	6	26	$ 15 - 7 = 8$	48
	$\Sigma f_i = 26$				$\Sigma f_i x_i - M = 84$

यहाँ, $N = \Sigma f_i = 26$ (सम)

$$\begin{aligned}
 \text{माध्यिका } M_d &= \frac{\frac{N}{2} \text{ वीं प्रेक्षण} + \left(\frac{N}{2} + 1\right) \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} \\
 &= \frac{\frac{26}{2} \text{ वीं प्रेक्षण} + \left(\frac{26}{2} + 1\right) \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} \\
 &= \frac{13 \text{ वीं प्रेक्षण} + 14 \text{ वीं प्रेक्षण}}{2} \\
 &= \frac{7 + 7}{2} = \frac{14}{2} = 7
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{84}{26} = 3.23$$

8.	x_i	f_i	CF	$ x_i - M $	$f_i x_i - M $
	15	3	3	$ 15 - 30 = 15$	45
	21	5	8	$ 21 - 30 = 9$	45
	27	6	14	$ 27 - 30 = 3$	18
	30	7	21	$ 30 - 30 = 0$	0
	35	8	29	$ 35 - 30 = 5$	40
	$\Sigma f_i = 29$				$\Sigma f_i x_i - M_d = 148$

यहाँ, $N = \Sigma f_i = 29$ (विषम)

$$\therefore \text{माध्यिका } M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वीं प्रेक्षण} = \left(\frac{29+1}{2}\right) \text{ वीं मान} = 15 \text{ वीं}$$

$$\Rightarrow M = 30$$

$$\therefore \text{माध्यिका के सापेक्ष माध्य माध्य माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - M_d|}{\Sigma f_i} = \frac{148}{29} = 5.1$$

निर्देश (प्र. सं. 9 - 10) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माप विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9.

आय प्रतिदिन	व्यक्तियों की संख्या
0-100	4
100-200	8
200-300	9
300-400	10
400-500	7
500-600	5
600-700	4
700-800	3

10.

ऊँचाई (सेमी में)	लड़कों की संख्या
95-105	9
105-115	13
115-125	26
125-135	30
135-145	12
145-155	10

हल (प्र. सं. 9 - 10)

प्र. सं.	वर्ग	f_i	माध्य-मान (x_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$ $A = 350, h = 100$	$f_i d_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
	0-100	4	50	-3	-12	308	1232
	100-200	8	150	-2	-16	208	1664
	200-300	9	250	-1	-9	108	972
	300-400	10	350	0	0	8	80
	400-500	7	450	1	7	92	644
	500-600	5	550	2	10	192	960
	600-700	4	650	3	12	292	1168
	700-800	3	750	4	12	392	1176
		Σf_i = 50			$\Sigma f_i d_i$ = 4		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} $ = 7896

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 350 + \frac{4}{50} \times 100 = 350 + 8$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 358$$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{7896}{50} = 157.92$$

10.	वर्ग	f_i	मध्य-मान (x_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$ $A = 130, h = 10$	$f_i d_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
	95-105	9	100	-3	-27	25.3	227.7
	105-115	13	110	-2	-26	15.3	198.9
	115-125	26	120	-1	-26	5.3	137.8
	125-135	30	130	0	0	4.7	141.0
	135-145	12	140	1	12	14.7	176.4
	145-155	10	150	2	20	24.7	247.0
	कुल	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i d_i = -47$		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} = 1128.8$

$$\begin{aligned}\text{माध्य } \bar{x} &= A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 130 + \frac{(-47)}{100} \times 10 \\ &= 130 - 4.7 \\ &= 125.3\end{aligned}$$

$$\text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{1128.8}{100} = 11.288$$

प्रश्न 11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
नड़कियों की संख्या	6	8	14	16	4	2

हमें माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करनी है। इसलिए सर्वप्रथम हम माध्यिका निकालेंगे। दिय गए आँकड़े सतत् है अतः माध्यिका की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{अर्थात् माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

हल

वर्ग	f_i	CF	मध्य-मान x_i	$ x_i - M_d $	$f_i x_i - M_d $
0-10	6	6	5	$ 5 - 27.86 = 22.86$	137.16
10-20	8	(14)C	15	$ 15 - 27.86 = 12.86$	102.88
(20-30)	(14)	28	25	$ 25 - 27.86 = 2.86$	40.04
30-40	16	44	35	$ 35 - 27.86 = 7.14$	114.24
40-50	4	48	45	$ 45 - 27.86 = 17.14$	68.56
50-60	2	50	55	$ 55 - 27.86 = 27.14$	54.28
	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma f_i x_i - \bar{x} = 517.16$

$$\begin{aligned}\frac{N}{2} &= \frac{50}{2} = 25 \\ \Rightarrow C &= 14, f = 14, l = 20, h = 10 \\ \text{माधिका, } M_d &= l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h = 20 + \frac{25 - 14}{14} \times 10 = 20 + \frac{11 \times 10}{14} \\ &= 20 + 7.86 = 27.86 \\ \therefore \text{माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - M_d|}{\sum f_i} = \frac{517.16}{50} = 10.34\end{aligned}$$

प्रश्न 12. नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन के लिए माधिका सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए।

आयु	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

सर्वप्रथम एकसमान लंबाई का वर्ग अंतराल बनाते हैं और तब निम्न सूत्र द्वारा

$$\text{माधिका ज्ञात करते हैं } M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

हल

वर्ग	f_i	CF	मध्यमान x_i	$ x_i - M_d $	$f_i x_i - M_d $
15.5-20.5	5	5	18	$ 18 - 38 = 20$	100
20.5-25.5	6	11	23	$ 23 - 38 = 15$	90
25.5-30.5	12	23	28	$ 28 - 38 = 10$	120
30.5-35.5	14	37	33	$ 33 - 38 = 5$	70
35.5-40.5	26	63	38	$ 38 - 38 = 0$	0
40.5-45.5	12	75	43	$ 43 - 38 = 5$	60
45.5-50.5	16	91	48	$ 48 - 38 = 10$	160
50.5-55.5	9	100	53	$ 53 - 38 = 15$	135
	$\sum f_i = 100$				$\sum f_i x_i - \bar{x} = 735$

यहाँ,

$$N = 100$$

$\therefore$

$$\frac{N}{2} = 50$$

$\therefore$ माधिका वर्ग 35.5-40.5 है।

$\Rightarrow$

$$l = 35.5, C = 37, f = 26, h = 5$$

अब,

$$M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

$$\therefore M_d = 35.5 + \frac{50 - 37}{26} \times 5 = 35.5 + \frac{13}{26} \times 5$$

$$= 35.5 + 2.5 = 38$$

$$\therefore \text{माध्यिका के सापेक्ष माध्य माध्य माध्य विचलन} = \frac{\sum f_i |x_i - M_d|}{\sum f_i} = \frac{735}{100} = 7.35$$

Exercise 13.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ

3. तीन के प्रथम 10 गुणज

4.	x_i	6	10	14	18	24	28	30
	f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.	x_i	92	93	97	98	102	104	109
	f_i	3	2	3	2	6	3	3

माध्य तथा प्रसरण की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{माध्य} = \frac{\sum x_i}{n}, \text{ प्रसरण} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2$$

हल (प्र. सं. 1 - 5)

1.	x_i	x_i^2
	6	36
	7	49
	10	100
	12	144
	13	169
	4	16
	8	64
	12	144
	$\sum x_i = 72$	$\sum x_i^2 = 722$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\text{तथा प्रसरण} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2 = \frac{722}{8} - \left(\frac{72}{8} \right)^2 = 90.25 - 81 = 9.25$$

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ निम्न हैं, $1, 2, 3, 4, \dots, n$

x_i	x_i^2
1	1^2
2	2^2
3	3^2
4	4^2
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
n	n^2
$\Sigma x_i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\Sigma x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{तथा प्रसरण} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left[\frac{n(n+1)}{2n} \right]^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{(n+1)^2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{6} = \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{n-1}{6} \right) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. 3 के प्रथम 10 गुणज निम्न हैं $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$

x_i	x_i^2
3	9
6	36
9	81
12	144
15	225
18	324
21	441
24	576
27	729
30	900
$\Sigma x_i = 165$	$\Sigma x_i^2 = 3465$

$$\text{माध्य } x_i = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{165}{10} = 16.5$$

$$\begin{aligned} \text{तथा प्रसरण} &= \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2 = \frac{3465}{10} - \left(\frac{165}{10} \right)^2 \\ &= 346.5 - (16.5)^2 = 346.5 - 272.25 = 74.25 \end{aligned}$$

4.

x_i	f_i	x_i^2	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
6	2	36	12	72
10	4	100	40	400
14	7	196	98	1372
18	12	324	216	3888
24	8	576	192	4608
28	4	784	112	3136
30	3	900	90	2700
$\Sigma x_i = 130$	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 760$	$\Sigma f_i x_i^2 = 16176$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{760}{40} = 19$$

$$\begin{aligned} \text{तथा प्रसरण} &= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \right)^2 = \frac{16176}{40} - \left(\frac{760}{40} \right)^2 \\ &= 404.4 - (19)^2 = 404.4 - 361 = 43.4 \end{aligned}$$

5.

x_i	f_i	x_i^2	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
92	3	8464	276	25392
93	2	8649	186	17298
97	3	9409	291	28227
98	2	9604	196	19208
102	6	10404	612	62424
104	3	10816	312	32448
109	3	11881	327	35643
	$\Sigma f_i = 22$		$\Sigma f_i x_i = 2200$	$\Sigma f_i x_i^2 = 220640$

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{2200}{22} = 100$$

$$\begin{aligned} \text{तथा प्रसरण} &= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \right)^2 = \frac{220640}{22} - (100)^2 \\ &= 10029.09 - 10000 \\ &= 29.09 \end{aligned}$$

प्रश्न 6. समुचित विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

हल

x_i	बारंबारता f_i	माध्य से विचलन $d_i = x_i - A$ $A = 64$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
60	2	-4	16	-8	32
61	1	-3	9	-3	9
62	12	-2	4	-24	48
63	29	-1	1	-29	29
64	25	0	0	00	00
65	12	1	1	12	12
66	10	2	4	20	40
67	4	3	9	12	36
68	5	4	16	20	80
कुल	$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i = 0$	$\Sigma f_i d_i^2 = 286$

$$\text{माध्य} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$\bar{x} = 64 + \frac{0}{100} = 64$$

$$\begin{aligned} \text{मानक विचलन } \sigma &= \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{286}{100} - \left(\frac{0}{100} \right)^2} = \sqrt{2.86} = 1.69 \end{aligned}$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 8) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

8.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	5	8	15	16	6

हल (प्र. सं. 7 - 8)

7.

वर्ग	वारंवारता (f_i)	माध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - A}{h}, A = 105,$ $h = 300$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-30	2	15	-3	9	-6	18
30-60	3	45	-2	4	-6	12
60-90	5	75	-1	1	-5	5
90-120	10	105	0	0	0	0
120-150	3	(135)	1	1	3	3
150-180	5	165	2	4	10	20
180-210	2	195	3	9	6	18
	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i d_i = 2$	$\Sigma f_i d_i^2 = 76$

$$\text{माध्य} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h$$

$$= 105 + \frac{2}{30} \times 30 \quad (\because h = 300)$$

$$= 105 + 2 = 107$$

$$\text{प्रसरण} = \left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \right)^2 \right] \times h^2 = \left[\frac{76}{30} - \left(\frac{2}{30} \right)^2 \right] \times (300)^2$$

$$= \left(\frac{76}{30} - \frac{4}{30 \times 30} \right) \times 900 = \left(\frac{76 \times 30 - 4}{900} \right) \times 900$$

$$= \left(\frac{2280 - 4}{900} \right) \times 900 = \frac{2276}{900} \times 900 = 2276$$

8.

वर्ग	वारंवारता f_i	माध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 25}{10}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	5	-2	4	-10	20
10-20	8	15	-1	1	-8	8
20-30	15	25	0	0	0	0
30-40	16	35	1	1	16	16
40-50	6	45	2	4	12	24
	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma f_i d_i = 10$	$\Sigma f_i d_i^2 = 68$

$$\begin{aligned}
 \text{माध्य } (\bar{x}) &= A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times h = 25 + \frac{10}{50} \times 10 \\
 &= 25 + \frac{100}{50} = 25 + 2 = 27 \\
 \text{प्रसरण} &= \left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \right)^2 \right] \times h^2 \\
 &= \left[\frac{68}{50} - \left(\frac{10}{50} \right)^2 \right] \times (10)^2 = \frac{(68 \times 50 - 100)}{50 \times 50} \times 100 \\
 &= \frac{(3400 - 100)}{50} \times 2 = \frac{3300 \times 2}{50} = \frac{6600}{50} = 132
 \end{aligned}$$

प्रश्न 9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	बच्चों की संख्या
70-75	3
75-80	4
80-85	7
85-90	7
90-95	15
95-100	9
100-105	6
105-110	6
110-115	3

हल

श्रेणी	वारंवारता f_i	मध्य-बिंदु x_i	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 92.5}{5}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
70-75	3	72.5	-4	16	-12	48
75-80	4	77.5	-3	9	-12	36
80-85	7	82.5	-2	4	-14	28
85-90	7	87.5	-1	1	-7	7
90-95	15	92.5	0	0	0	0
95-100	9	97.5	1	1	9	9
100-105	6	102.5	2	4	12	24
105-110	6	107.5	3	9	18	54
110-115	3	112.5	4	16	12	48
	$\Sigma f_i = 60$				$\Sigma f_i d_i = 6$	$\Sigma f_i d_i^2 = 254$

माना कल्पित माध्य $A = 92.5$, $h = 5$

$$\begin{aligned}\text{माध्य } (\bar{x}) &= A + \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \times h = 92.5 + \frac{6}{60} \times 5 \\ &= 92.5 + \frac{30}{60} = 92.5 + 0.5 = 93\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रसरण} &= \left[\frac{\sum f_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right)^2 \right] \times h^2 \\ &= \left[\frac{254}{60} - \left(\frac{6}{60} \right)^2 \right] \times (5)^2 \\ &= \left[\frac{254 \times 60 - 36}{60 \times 60} \right] \times 25 = \frac{(15240 - 36)}{60 \times 12} \times 5 \\ &= \frac{15204 \times 5}{720} = 105.58\end{aligned}$$

$$\text{मानक विचलन } \sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{105.58} = 10.27$$

प्रश्न 10. एक द्विज्वादन में बनाए वृत्तों के व्यास (मिमी में) नीचे दिए गए हैं।

व्यास (सेमी में)	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन व माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

दिए हुए आँकड़े असतत हैं, इसलिए सर्वप्रथम वर्ग-अंतराल को सतत रूप में बनाकर इसे पूर्ववत् प्रश्न की भाँति ही हल करते हैं

हल

वर्ग	f_i	मध्य बिन्दु (x_i)	माध्य से विचलन $d_i = \frac{x_i - 42.5}{4}$ $A = 42.5, h = 4$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
32.5 - 36.5	15	34.5	-2	4	-30	60
36.5 - 40.5	17	38.5	-1	1	-17	17
40.5 - 44.5	21	42.5	0	0	0	0
44.5 - 48.5	22	46.5	1	1	22	22
48.5 - 52.5	25	50.5	2	4	50	100
	$\sum f_i = 100$				$\sum f_i d_i = 25$	$\sum f_i d_i^2 = 199$

$$\begin{aligned}\text{माध्य } \bar{x} &= A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times h = 42.5 + \frac{25}{100} \times 4 \\ &= 42.5 + 1 = 43.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{मानक विचलन } \sigma &= \sqrt{\frac{\sum p_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum p_i}{\sum f_i}\right)^2} \times h = \sqrt{\frac{199}{100} - \left(\frac{25}{100}\right)^2} \times 4 \\
 &= \sqrt{\frac{199 \times 100 - 625}{100 \times 100}} \times 4 = \frac{4}{100} \sqrt{19900 - 625} \\
 &= \frac{1}{25} \times \sqrt{19275} = \frac{138.83}{25} = 5.55
 \end{aligned}$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. आठ प्रेक्षकों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 और 9.25, है। यदि इनमें से छः प्रेक्षक 6, 7, 10, 12, 12 और 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षक ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षक a और b हैं।

दिया है, $\bar{x} = 9$ और $\sigma^2 = 9.25$

$\therefore \bar{x} = 9$

$$\Rightarrow \frac{\text{सभी प्रेक्षकों का योग}}{\text{प्रेक्षकों की संख्या}} = 9$$

$$\Rightarrow \text{सभी प्रेक्षकों का योग} = 9 \times 8$$

$$\Rightarrow 6 + 7 + 10 + 12 + 12 + 13 + a + b = 72$$

$$\Rightarrow 60 + a + b = 72$$

$$\Rightarrow a + b = 72 - 60$$

$$\Rightarrow a + b = 12$$

— (i)

$$\begin{aligned}
 \text{पुनः } \sigma^2 &= \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2 \quad \text{या} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \\
 \Rightarrow 9.25 &= \frac{36 + 49 + 100 + 144 + 144 + 169 + a^2 + b^2}{8} - (9)^2 \\
 \Rightarrow 9.25 &= \frac{642 + a^2 + b^2}{8} - 81 \\
 \Rightarrow 9.25 + 81 &= \frac{642 + a^2 + b^2}{8} \\
 \Rightarrow 90.25 \times 8 &= 642 + a^2 + b^2 \\
 \Rightarrow a^2 + b^2 &= 722 - 642 \\
 \Rightarrow a^2 + b^2 &= 80 \quad \dots(ii)
 \end{aligned}$$

समी (i) से $b = 12 - a$ समी (ii) में रखने पर,

$$\begin{aligned}
 a^2 + (12 - a)^2 &= 80 \\
 \Rightarrow a^2 + 144 + a^2 - 24a &= 80 \\
 \Rightarrow 2a^2 - 24a + 144 - 80 &= 0 \\
 2a^2 - 24a + 64 &= 0 \\
 a^2 - 12a + 32 &= 0 \\
 a^2 - 8a - 4a + 32 &= 0 \\
 a(a - 8) - 4(a - 8) &= 0 \\
 (a - 4)(a - 8) &= 0 \\
 \Rightarrow a = 4 \quad \text{या} \quad a = 8
 \end{aligned}$$

समी (i) से, $b = 8$ या $b = 4$

अतः प्रेक्षण 4 तथा 8 हैं।

प्रश्न 2. सात प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 तथा 16 है। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण a तथा b हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{दिया है, } \bar{x} &= 8 \quad \text{और} \quad \sigma^2 = 16 \\
 \therefore \bar{x} &= 8 \\
 \Rightarrow \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} &= 8 \\
 \Rightarrow \frac{2 + 4 + 10 + 12 + 14 + a + b}{7} &= 8 \\
 \Rightarrow 42 + a + b &= 56 \\
 \Rightarrow a + b &= 14 \quad \dots(i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पुनः } \sigma^2 &= \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \\
 \Rightarrow 16 &= \frac{4 + 16 + 100 + 144 + 196 + a^2 + b^2}{n} - (8)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 16 + 64 &= \frac{460 + a^2 + b^2}{7} \\
\Rightarrow 7 \times (80) &= 460 + a^2 + b^2 \\
\Rightarrow a^2 + b^2 &= 560 - 460 \\
\Rightarrow a^2 + b^2 &= 100 \quad \dots(ii)
\end{aligned}$$

अब, समी (i) से $b = 14 - a$ समी (ii) में रखने पर,

$$\begin{aligned}
a^2 + (14 - a)^2 &= 100 \\
\Rightarrow a^2 + 196 + a^2 - 28a &= 100 \\
\Rightarrow 2a^2 - 28a + 196 - 100 &= 0 \\
\Rightarrow 2a^2 - 28a + 96 &= 0 \\
\Rightarrow a^2 - 14a + 48 &= 0 \\
\Rightarrow a^2 - 8a - 6a + 48 &= 0 \\
\Rightarrow a(a - 8) - 6(a - 8) &= 0 \\
\Rightarrow (a - 6)(a - 8) &= 0 \\
\Rightarrow a &= 6 \text{ या } 8
\end{aligned}$$

समी (i) से,

$$b = 8 \text{ या } 6$$

अतः प्रेक्षण 6 तथा 8 है।

प्रश्न 3. छः प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 और 4 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए, तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\bar{x} = 8$, $\sigma^2 = 4$ तथा $n = 6$

माना दिए हुए प्रेक्षण निम्न हैं, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ तब,

$$\text{माध्य } \bar{x} = 8$$

$$\text{माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 8$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 48$$

अब, यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए तब माध्य निम्न होगा है।

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 48 \times 3$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i = 144$$

$$\text{अब, नया माध्य } \bar{x} = \frac{144}{6} = 24$$

दिया है प्रसरण $= 4^2$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{6} - (8)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{6} = 16 + 64$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i^2 = 80 \times 6$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i^2 = 480 \quad \dots(i)$$

$$\begin{aligned}\text{अब, नया } \Sigma x^2 &= (3x_1)^2 + (3x_2)^2 + (3x_3)^2 + (3x_4)^2 + (3x_5)^2 + (3x_6)^2 \\ &= 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \\ &= 9 \times 480\end{aligned}$$

[समी (i) से]

$$\Rightarrow \Sigma x^2 = 4320$$

$$\therefore \text{नया प्रसरण} = \frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{4320}{6} - (24)^2 = 720 - 576 = 144$$

$$\therefore \text{नया मानक विचलन} = \sqrt{\text{नया प्रसरण}} = \sqrt{144} = 12$$

नोट माध्य मूल बिंदु एवं पैमाने में परिवर्तन पर निर्भर करता है। मानक विचलन मूलबिंदु परिवर्तन पर निर्भर नहीं करता परन्तु यह पैमाने में परिवर्तन पर निर्भर करता है।

प्रश्न 4. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, \dots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 है तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ और $a^2\sigma^2$ ($a \neq 0$) है।

$$\begin{aligned}\text{हल } ax_1, ax_2, \dots, ax_n \text{ का माध्य} &= \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{n} \\ &= a \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \right) \\ &= a\bar{x} \quad \left(\because \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \\ ax_1, ax_2, \dots, ax_n \text{ का प्रसरण} &= \frac{\Sigma (ax_i - a\bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(ax_1 - a\bar{x})^2 + (ax_2 - a\bar{x})^2 + \dots + (ax_n - a\bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{[a^2 (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}{n} \\ &= a^2 \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} = a^2 \sigma^2 \quad \left[\because \sigma^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]\end{aligned}$$

प्रश्न 5. बीस प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 है। जाँच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि

(i) गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

(ii) उसे 12 से बदल दिया जाए।

हल (i) दिया है, $\bar{x} = 10$ और $\sigma = 2, n = 20$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x_i}{20} = 10$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i = 20 \times 10$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i = 200$$

यदि प्रेक्षण 8 हटा दिया जाए, तब

$$\Sigma x_i = 200 - 8 = 192$$

अब, बचे हुए प्रमाणों की संख्या $n = 19$

$$\therefore \text{सही माध्य} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{192}{19} = 10.10$$

$$\text{पुनः} \quad \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{20} - (10)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = (4 + 100) \times 20 = 104 \times 20 = 2080$$

यदि प्रमाण 8 हटा दिया जाए तब

$$\sum x_i^2 = 2080 - 64 = 2016$$

$$\begin{aligned} \text{अब, सही मानक विचलन } \sigma &= \sqrt{\frac{2016}{19} - \left(\frac{192}{19}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2016 \times 19 - (192)^2}{19 \times 19}} \\ &= \frac{1}{19} \sqrt{38304 - 36864} \\ &= \frac{1}{19} \sqrt{1440} = \frac{37.95}{19} = 1.99 \end{aligned}$$

(ii) दिया है, $\bar{x} = 10, \sigma = 2, n = 20$

$$\Rightarrow \frac{\sum x}{20} = 10 \Rightarrow \sum x = 200$$

यदि प्रमाण 8, को 12 से बदल दिया जाए, तब

$$\sum x = 200 - 8 + 12 = 192 + 12 = 204$$

$$\text{सही माध्य} = \frac{204}{20} = \frac{102}{10} = 10.2$$

$$\text{पुनः} \quad \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x^2}{20} - (10)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \sum x^2 = 2080$$

यदि प्रमाण 8, को 12 से बदल दिया जाए, तब

$$\begin{aligned} \sum x^2 &= 2080 - (8)^2 + (12)^2 \\ &= 2080 - 64 + 144 \\ &= 2224 - 64 \\ &= 2160 \end{aligned}$$

अब, सही मानक विचलन

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{2160}{20} - \left(\frac{204}{20}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2160 \times 20 - (204)^2}{20 \times 20}} = \frac{1}{20} \sqrt{43200 - 41616} \\ &= \frac{1}{20} \sqrt{1584} = \frac{39.79}{20} = 1.98\end{aligned}$$

Ques 6

100 प्रेक्षकों का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 है। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षक 21, 21 और 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षकों को हटा दिया जाए, तो माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $n = 100$, $\bar{x} = 20$, $\sigma = 3$

$$\begin{aligned}\therefore \quad & \bar{x} = 20 \\ \Rightarrow & \frac{\sum x}{100} = 20 \\ \rightarrow & \sum x_i = 100 \times 20 \\ \rightarrow & \sum x = 2000\end{aligned}$$

यदि गलत प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 हटा दिए जाते हैं, तब सही योग निम्न है,

$$\begin{aligned}\Sigma x_i &= 2000 - 21 - 21 - 18 = 2000 - 60 \\ &= 1940\end{aligned}$$

शेष 97 प्रेक्षणों का सही माध्य $\bar{x} = \frac{1940}{97} = 20$

$$\text{पुनः } \sigma = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} = 3 \Rightarrow \frac{\Sigma x_i^2}{100} - (20)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{100} = 9 + 400 = 409 \times 100 = 40900$$

अब, सही Σx^2 निम्न है।

$$\begin{aligned}\Sigma x^2 &= 40900 - (21)^2 - (21)^2 - (18)^2 \\ &= 40900 - 441 - 441 - 324 \\ &= 40900 - 1206 = 39694\end{aligned}$$

शेष 97 प्रेक्षणों के लिए सही मानक विचलन,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{39694}{97} - \left(\frac{1940}{97}\right)^2} = \sqrt{409.2 - (20)^2} \\ &= \sqrt{409.2 - 400} = \sqrt{9.2} = 3.03\end{aligned}$$