अध्याय 14

प्रायिकता

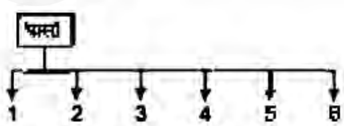
Probability

Exercise 14.1

प्रश्न 1. एक पासा फेंका जाता है। मान लीजिए घटना E 'पासे पर संख्या 4 दर्शाता' है और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है। क्या E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं?

परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए, $A \cap B = \phi$

हल नहीं,



माना E = पासे पर संख्या 4 दर्शाता है। = $\{4\}$

तथा F = पासे पर सम संख्या दर्शाता है।

$= \{2, 4, 6\}$

$\therefore \quad E \cap F = \{4\} \neq \phi$

अतः E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं।

प्रश्न 2. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए।

(i) A : संख्या 7 से कम है।

(ii) B : संख्या 7 से बड़ी है।

(iii) C : संख्या 3 का गुणज है।

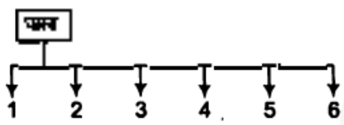
(iv) D : संख्या 4 से कम है।

(v) E : 4 से बड़ी सम संख्या है।

(vi) F : संख्या 3 से कम नहीं है।

साथ ही $A \cup B, A \cap B, B \cup C, E \cap F, D \cap E, A - C, D - E, E \cap F', F'$ भी ज्ञात कीजिए।

हल



(i) A : संख्या 7 से कम है। $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) B : संख्या 7 से बड़ी है। $= \{\ \} = \phi$

(चूँकि पासे पर अधिकतम 6 संख्याएँ होती हैं इसलिए पासे पर 7 से बड़ी संख्या नहीं हो सकती।)

(iii) C : संख्या 3 का गुणज है। $= \{3, 6\}$

(iv) D : संख्या 4 से कम है। $= \{1, 2, 3\}$

(v) E : 4 से बड़ी सम संख्या है। $= \{6\}$

(vi) F : संख्या 3 से कम नहीं है। $= \{3, 4, 5, 6\}$

अब, $A \cup B$ = अवयवों का समुच्चय जो या तो A में हो या B में हो

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \phi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B$ = अवयवों का समुच्चय जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हो

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \phi = \phi$

$B \cup C$ = अवयवों का समुच्चय जो या तो B में हो या C में हो

$= \{\ \} \cup \{3, 6\} = \{3, 6\}$

$E \cap F$ = अवयवों का समुच्चय जो E और F दोनों में उभयनिष्ठ है

$= \{6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{6\}$

$D \cap E$ = अवयवों का समुच्चय जो D और E दोनों में उभयनिष्ठ हो।

$= \{1, 2, 3\} \cap \{6\} = \phi$

$A - C$ = अवयवों का समुच्चय A मे हो किंतु C में नहीं हो

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 6\} = \{1, 2, 4, 5\}$

$D - E$ = अवयवों का समुच्चय जो D में हो किंतु E में नहीं हो।

$= \{1, 2, 3\} - \{6\} = \{1, 2, 3\}$

$E \cap F' = E \cap (U - F) = E \cap [\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4, 5, 6\}]$ $[\because U = (1, 2, 3, 4, 5, 6)]$

$= \{6\} \cap \{1, 2\} = \phi$

और $F' = (U - F) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\}$

प्रश्न 3. एक परीक्षण में पासे के एक जोड़े को फेंकते हैं और उन पर प्राप्त संख्याओं को लिखते हैं। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए।

A: प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

B: दोनों पासों में से किसी पर भी संख्या 2 प्राप्त होती है।

C: प्राप्त संख्याओं का योग कम-से- कम 7 है और 3 का गुणज है।

इन घटनाओं के कौन-कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

हल जब पासे के एक जोड़े को फेंकते हैं, तब 36 संभव परिणाम आते हैं।

$\downarrow \backslash \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

A = प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है

$= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

B = दोनों पासों में से किसी पर भी संख्या 2 प्राप्त होती है।

$= \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (4, 2),$
$(5, 2), (6, 2)\}$

C = प्राप्त संख्याओं का योग कम-से-कम 7 है और 3 का गुणज है।

$= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

$\therefore$ $A \cap B = \phi \Rightarrow A$ और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

$B \cap C = \phi \Rightarrow B$ और C परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

प्रश्न 4. तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। मान लीजिए कि घटना 'तीन चित दिखना' को A से, घटना 'दो चित और एक पट दिखना' को B से, घटना 'तीन पट दिखना' को C और घटना' पहले सिक्के पर चित दिखना' को D से निरूपित किया गया है। बताइए कि इनमें से कौन-सी घटनाएँ (i) परस्पर अपवजी हैं? (ii) सरल हैं? (iii) मिश्र हैं?

(i) परस्पर अपवर्जी घटना के लिए $A \cap B = \phi$

(ii) सरल घटना के लिए केवल एक प्रतिदर्श बिंदु होता है।

(iii) मिश्र घटना के लिए कम-से-कम दो प्रतिदर्श बिंदु होते हैं।

हल जब तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है, तब कुल $2^3 = 8$ संभव परिणाम आते हैं।

अर्थात् $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

A = तीन चित दिखना $= \{HHH\}$

B = दो चित और एक पट दिखना $= \{HHT, HTH, THH\}$

C = तीन पट दिखना $= \{TTT\}$

D = पहले सिक्के पर चित दिखना $= \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

(i) यहाँ, $A \cap B = \phi$

$A \cap C = \phi$

$B \cap C = \phi$

$C \cap D = \phi$

$A \cap B \cap C = \phi$

यहाँ, A तथा B, A तथा C, B तथा C, C तथा D और A, B और C परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) चूँकि घटनाओं A तथा C में केवल एक प्रतिदर्श बिंदु है।

अतः A तथा C सरल घटनाएँ हैं।

(iii) चूँकि घटनाओं B तथा D में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु है।

अतः B तथा D मिश्र घटनाएँ हैं।

प्रश्न 5. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। वर्णन कीजिए।

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।

(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं किंतु निःशेष नहीं हैं।

(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किंतु निःशेष नहीं हैं।

हल यदि तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं, तो संभव परिणाम निम्न हैं $= 2^3 = 8$

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

(i) माना घटना A तीन चित आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad A = \{HHH\}$

तथा घटना B तीन पट आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad B = \{TTT\} \quad \Rightarrow A \cap B = \phi$

अतः A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) माना घटना A कम-से-कम एक चित आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad A = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

तथा घटना B तीन पट आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad B = \{TTT\}$

अतः $\quad A \cap B = \phi$ और $A \cup B = S$

(दो घटनाएँ परस्पर निःशेष होती हैं यदि $A \cup B = S$)

अतः A तथा B परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं।

(iii) माना घटना A तीन चित आना प्रदर्शित करती है तथा घटना B कम-से-कम दो चित आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad A = \{HHH\}$

तथा $\quad B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

$\Rightarrow \quad A \cap B = \{HHH\} \neq \phi$

अतः दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(iv) उपरोक्त (iii) से A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं साथ ही $A \cup B \neq S$।

(v) माना घटना A तीन चित आना प्रदर्शित करती है।
घटना B दो चित आना प्रदर्शित करती है तथा घटना C तीन पट आना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow \quad A = \{HHH\}$

$\Rightarrow \quad B = \{HHT, HTH, THH\}$

तथा $\quad C = \{TTT\}$

$\Rightarrow \quad A \cap B \cap C = \phi$

तथा $\quad A \cup B \cup C \neq S$

$\Rightarrow A, B$ तथा C परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं है।

प्रश्न 6. दो पासे फेंके जाते हैं। घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित प्रकार से हैं

A : पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना।

B : पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

C : पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 5 होना।

निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए।

(i) A' (ii) B नहीं (iii) A या B (iv) A और B
(v) A किन्तु C नहीं (vi) B या C (vii) B और C (viii) $A \cap B' \cap C'$

हल यदि दो पासे फेंके जाते हैं, तो सभी परिणामों की कुल संख्या, $S = 6 \times 6 = 36$, जो निम्न प्रकार है

$\downarrow \backslash \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना

$= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$
$(4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3),$
$(3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

(i) A' = जो A में नहीं है। $A = B$ (यदि घटना A पहले पासे पर सम संख्या प्रदर्शित करती है, तब घटना A' पहले पासे पर विषम संख्या प्रदर्शित करेगी अर्थात् B)

(ii) B नहीं $= B'$ = जो B में नहीं है। (यदि घटना, B पहले पासे पर विषम संख्या प्रदर्शित करती है इसलिए B' घटना पहले पासे पर सम संख्या प्रदर्शित करेगी अर्थात्

(iii) A सम या $B = A \cup B$. $A \cup B$, A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित करता है अर्थात् यह दोनो घटनाएँ A तथा B को सम्मिलित करेगा अर्थात् घटना, जो पहले पासे पर सम संख्या प्रदर्शित करती है तथा घटना, जो पहले पासे पर विषम संख्या प्रदर्शित करती है। इसलिए $A \cup B$ में सभी संभावित घटनाएँ सम्मिलित होंगी। अर्थात् S (प्रतिदर्श समष्टि)

$$\therefore \quad A \cup B = S$$

(iv) A और $B = A \cap B$ अर्थात् अवयव, जो A तथा B दोनों में उभयनिष्ठ हो। A तथा B में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।

$\therefore A \cap B = \phi$ (रिक्त समुच्चय)

(v) A किंतु C नहीं $= A - C$ = अवयव, जो A में है किंतु C में नहीं है।

$= \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

(vi) B या $C = B \cup C$ अर्थात् अवयव, जो B में या C में या B तथा C दोनों में हो।

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2),$
$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5),$
$(5, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1)\}$

(vii) B और $C = B \cap C$ अर्थात् अवयव, जो B तथा C दोनों में उभयनिष्ठ हों।

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2)\}$

(viii) $A \cap B' \cap C' = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1),$
$(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

प्रश्न 7. उपरोक्त प्रश्न 6 को देखिए और निम्नलिखित में सत्य या असत्य बताइए (अपने उत्तर का कारण दीजिए।

(i) A और B परस्पर अपवर्जी हैं।
(ii) A और B परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।
(iii) $A = B'$

(iv) A और C परस्पर अपवर्जी हैं।

(v) A और B' परस्पर अपवर्जी हैं।

(vi) A', B' और C परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं।

हल (i) सत्य,

$\because$ A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना।

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

$\Rightarrow A \cap B = \phi$

$\therefore$ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) सत्य,

$\therefore A \cup B = S$ अर्थात् निःशेष तथा $A \cap B = \phi$

(iii) सत्य,

$\because$ B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

$\Rightarrow$ B' = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना = A

$\therefore \quad A = B'$

(iv) असत्य,

$\because A \cap C = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1)\} \neq \phi$, इसलिए A तथा C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(v) असत्य,

$$\because \quad B' = A$$

$$\therefore \quad A \cap B' = A \cap A = A \neq \phi \qquad (\because B' = A)$$

इसलिए A तथा B' परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(vi) असत्य,

$$\because \quad A' \cap B' = \phi$$

$$\therefore \quad A' \cap B' \cap C = \phi \text{ तथा } A' \cup B' \cup C = S$$

किंतु $A' \cap C = B \cap C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2)\} \neq \phi$ $\quad (\because A' = B)$

तथा $B' \cap C = A \cap C = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1)\} \neq \phi$ $\quad (\because B' = A)$

$\therefore$ A', B' तथा C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

Exercise 14.2

प्रश्न 1. प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7\}$ के परिणामों के लिए निम्नलिखित में से कौन-से प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं हैं।

परिणाम	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
(i)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(ii)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(iii)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(iv)	−0.1	0.2	0.3	0.4	−0.2	0.1	0.3
(v)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

वैध निर्धारण के लिए, प्रत्येक परिणाम के सभी प्रायिकताओं का योग 1 होगा।

हल

(i) सभी प्रायिकताओं का योग $= 0.1 + 0.01 + 0.05 + 0.03 + 0.01 + 0.2 + 0.6 = 1$ अतः निर्धारण वैध है क्योंकि योग 1 है।

(ii) वैध है क्योंकि योग 1 है (खंड (i) जैसा).

(iii) सभी प्रायिकताओं का योग
$= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 = 2.8$
अतः निर्धारण वैध नहीं है क्योंकि योग $2.8 > 1$ अर्थात् 1 से बड़ा है।

(iv) वैध नहीं है क्योंकि किसी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

(v) वैध नहीं है क्योंकि $\frac{15}{14} > 1$, जो कि संभव नहीं है।

> **नोट** *किसी घटना की प्रायिकता कभी भी न तो ऋणात्मक होती है और न कभी 1 से अधिक होती है।*

प्रश्न 2. एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। कम-से-कम एक पट प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

हल प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

माना घटना E कम-से-कम एक पट होना प्रदर्शित करती है।

$\therefore \quad E = \{HT, TH, TT\}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता, $P = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$

प्रश्न 3. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना।

(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना।

(iv) छः से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(v) छः से छोटी संख्या प्राप्त होना।

हल जब एक पासा फेंका जाता है, तब 1 से 6 तक कोई भी संख्या प्राप्त होगी। अतः पासे का प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(i) माना घटना E एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\therefore \quad E = \{2, 3, 5\}$

$\therefore$ अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता, P

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) माना E 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है

$\therefore \quad E = \{3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

$$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(iii) माना घटना E 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\therefore \quad E = \{1\}$

$\therefore$ 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

$$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

(iv) माना घटना E 6 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$E = \{\} = \phi$ (चूँकि पासे पर 6 से बड़ी संख्या नहीं होती है)

$\therefore$ 6 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

(v) माना घटना E 6 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ 5 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

$$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

प्रश्न 4. ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया है।

(i) प्रतिदर्श समष्टि में कितने बिंदु हैं?

(ii) पत्ते का हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता क्या है?

(iii) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्ता

(a) इक्का है।   (b) काले रंग का है।

हल

(i) हम जानते हैं कि ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं। इसलिए प्रतिदर्श समष्टि में कुल 52 अवयव होंगे।

(ii) चूँकि हुकुम का एक इक्का होता है।

$\Rightarrow \quad n(E) = 1$

$\therefore$ पत्ते का हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता $= \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{52}$

(iii) (a) चूँकि ताश का गड्डी में चार इक्के होते हैं।

$\Rightarrow \qquad n(E) = 4$

$\therefore$ एक इक्का होने की प्रायिकता, $P = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

(b) चूँकि ताश की गड्डी में 26 काले रंग के पत्ते होते हैं।

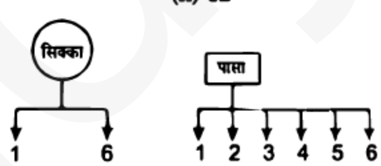
$\Rightarrow \qquad n(E) = 26$

$\therefore$ काले रंग के पत्ते के आने की प्रायिकता, $P = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

प्रश्न 5. एक अनभिनत (Unbiased) सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिनत पासा दोनों को उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त संख्याओं का योग है

(i) 3   (ii) 12

हल



सिक्के में कुल संभावित स्थितियों की संख्या = 2

पासे पर संभावित कुल स्थितियों की संख्या = 6

(i) एक सिक्का तथा एक पासा दोनों को उछालने पर प्राप्त संख्याओं का योग 3 होने की केवल एक संभावना (1, 2) है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित } \cancel{\text{परिणामों}} \text{ की संख्या}}$

$= \dfrac{1}{2 \times 6} = \dfrac{1}{12}$

(ii) एक सिक्का तथा एक पासा दोनों को उछालने पर प्राप्त संख्याओं का योग 12 होने की संभावना (6, 6) है।

$\therefore$ $$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{1}{2 \times 6} = \frac{1}{12}$$

प्रश्न 6. नगर परिषद् में चार पुरूष व छः स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक परिषद् सदस्य चुना गया है, तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी संभावना है?

हल माना घटना E स्त्री के चुने जाने को प्रदर्शित करती हैं।

$\therefore$ $$n(E) = 6$$

प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या, $n(S)$ = समिति में कुल सदस्यों की संख्या

$$= 4 + 6 = 10$$

$\therefore$ $$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

प्रश्न 7. एक अनभिनत सिक्के को चार बार उछाला जाता है और एक व्यक्ति प्रत्येक चित पर ₹ 1 जीतता है और प्रत्येक पट पर ₹ 1.50 हारता है। इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से ज्ञात कीजिए कि आप चार उछालों में कितनी विभिन्न राशियाँ प्राप्त कर सकते हैं। साथ ही इन राशियों में से प्रत्येक की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए?

हल यदि एक सिक्का चार बार उछाला जाता है, तब कुल संभावित परिणामों की संख्या

$$= 2^4 = 16$$

इस स्थितियों के लिए प्रतिदर्श समष्टि को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

प्रतिदर्श समष्टि	राशियाँ
HHHH	1 + 1 + 1 + 1 = 4
HH HT	1 + 1 + 1 − 1.50 = 3 − 1.50 = 1.50
HH TH	1 + 1 − 1.50 + 1 = 3 − 1.50 = 1.50
HHTT	1 + 1 − 1.50 − 1.50 = 2 − 3 = − 1.00
HTHH	1 − 1.50 + 1 + 1 = 3 − 1.50 = 1.50
HTHT	1 − 1.50 + 1 − 1.50 = 2 − 3 = − 1.00
HTTH	1 − 1.50 − 1.50 + 1 = 2 − 3 = − 1.00
HTTT	1 − 1.50 − 1.50 − 1.50 = 1 − 4.50 = − 3.50
THHH	− 1.50 + 1 + 1 + 1 = − 1.50 + 3 = 1.50
THHT	− 1.50 + 1 + 1 − 1.50 = 2 − 3.00 = − 1.00
THTH	− 1.50 + 1 − 1.50 + 1 = 2 − 3.00 = − 1.00
THTT	− 1.50 + 1 − 1.50 − 1.50 = 1 − 4.50 = − 3.50
TTHH	−1.50 − 1.50 + 1 + 1 = 2 − 3.00 = − 1.00
TTHT	− 1.50 − 1.50 + 1 − 1.50 = 1 − 4.50 = − 3.50
TTTH	− 1.50 − 1.50 − 1.50 + 1 = − 4.50 + 1 = − 3.50
TTTT	−1.50 − 1.50 − 1.50 − 1.50 = − 6.00

अतः उपरोक्त प्रतिदर्श समष्टि से पाँच प्रकार की विभिन्न राशियाँ प्राप्त होंगी। अर्थात् 4, 1.50, – 1.00, – 3.50, – 6. 00 अर्थात्

राशियाँ	संख्याओं की उपस्थिति संख्या
4.00	1
1.50	4
– 1.00	6
– 3.50	4
– 6.00	1
कुल	16

(ऋणात्मक चिन्ह हारे गये मूल्य को प्रदर्शित करता है)

$\Rightarrow$ P(₹ 4.00 जीतता है) $= \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow$ P(₹ 1.50 जीतता है) $= \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ P(₹ – 1.00 जीतता है) $= \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow$ P(₹ – 3.50 जीतता है) $= \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ P(₹ – 6.00 जीतता है) $= \dfrac{1}{16}$

प्रश्न 8. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) 3 चित प्राप्त होना।
(ii) 2 चित प्राप्त होना।
(iii) न्यूनतम 2 चित प्राप्त होना।
(iv) अधिकतम 2 चित प्राप्त होना।
(v) एक भी चित प्राप्त न होना।
(vi) 3 पट प्राप्त होना।
(vii) तथ्यतः 2 पट प्राप्त होना।
(viii) कोई भी पट न प्राप्त होना।
(ix) अधिकतम 2 पट प्राप्त होना।

हल यदि तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं, तब कुल संभावित परिणामों की संख्या $= 2^3 = 8$ हैं, जो निम्न हैं,

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

(i) यदि घटना E तीन चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E) = 1$

$\therefore$ तीन चित प्राप्त होने की प्रायिकता,

$$P = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

(ii) यदि घटना E दो चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\therefore$ $n(E) = 3$

$\therefore$ दो चित प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

(iii) यदि घटना E न्यूनतम 2 चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

(न्यूनतम 2 का अर्थ हम 2 या 2 से अधिक के रूप में लेते है)

$\Rightarrow$ $n(E)$ = 2 चित + 3 चित = 3 + 1 = 4

$\therefore$ न्यूनतम 2 चित प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv) यदि घटना E अधिकतम 2 चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E)$ = 2 चित + 1 चित + 0 चित

(अधिकतम 2 का अर्थ हम 2 से अधिक के रूप में नहीं लेते हैं) = 3 + 3 + 1 = 7

$\therefore$ अधिकतम 2 चित प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(v) यदि घटना E एक भी चित प्राप्त न होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E) = 1$

$\therefore$ एक भी चित प्राप्त न होने की प्रायिकता $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(vi) यदि घटना E 3 पट प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E) = 1$ $\therefore$ $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(vii) यदि घटना E तथ्यत: 2 पट प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E) = 3$

$\therefore$ 2 पट प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

(viii) यदि घटना E कोई भी पट न प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E) = 1$

$\Rightarrow$ कोई पट न प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(ix) यदि घटना E अधिकतम 2 पट प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

$\Rightarrow$ $n(E)$ = 2 पट + 1 पट + 0 पट = 3 + 3 + 1 = 7

$\therefore$ 2 पट प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

प्रश्न 9. यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ है, तो घटना 'A नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

संबंध $P(A) + P(A') = 1$ का प्रयोग करेंगे

हल यदि A कोई दी हुई घटना है, तब

$$P(A) = \frac{2}{11}$$

$$\therefore \quad P(A \text{ नहीं}) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$

नोट घटना A तथा इसके पूरक घटना A' का योग सदैव 1 होता है।

प्रश्न 10. शब्द 'ASSASSINATION' से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर (i) एक स्वर (vowel) है (ii) एक व्यंजन (consonant) है।

अंग्रेजी वर्णमाला में 26 अक्षर होते हैं, जिनमें 5 स्वर (a, e, i, o, u) तथा 21 व्यंजन हैं।

हल दिया गया शब्द निम्न है A S S A S S I N A T I O N

स्वरों की संख्या = 3(A) + 2(I) + 1(O) = 6

व्यंजनों की संख्या = 7

अक्षरों की कुल संख्या = 13

(i) P (स्वर) $= \frac{6}{13}$ (ii) P (व्यंजन) $= \frac{7}{13}$

प्रश्न 11. एक लॉटरी में एक व्यक्ति 1 से 20 तक की संख्याओं में से छः भिंन-भिंन संख्याएँ यादृच्छया चुनता है और यदि ये चुनी गई छः संख्याएँ उन छः संख्याओ से मेल खाती हैं, जिन्हें लॉटरी समिति ने पूर्वनिर्धारित कर रखा है, तो व्यक्ति इनाम जीत जाता है। लॉटरी के खेल में इनाम जीतने की प्रायिकता क्या है?[संख्याओं के प्राप्त होने का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।]

n विभिन्न वस्तुओं में से r विभिन्न वस्तुएँ निम्न सूत्र द्वारा चुनी जा सकती हैं। अर्थात्

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

हल 20 संख्याओं में से 6 संख्याएँ ${}^{20}C_6$ तरीके से चुनी जा सकती हैं जो केवल संख्याओं का एक संचय है, जोकि सत्य है।

माना इनाम जीतने की प्रायिकता E है।

अर्थात् $n(E) = 1$ (चूँकि केवल 1 इनाम जीता जा सकता है)

प्रतिदर्श समष्टि की संख्या, $n(S) = {}^{20}C_6$

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{1}{{}^{20}C_6} = \frac{1}{20!/(20-6)!\,6!}$$

$$= \frac{14!\,6!}{20!} \qquad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}\right]$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}$$

$$= \frac{1}{38760}$$

प्रश्न 12. जाँच कीजिए कि निम्न प्रायिकताएँ $P(A)$ और $P(B)$ युक्ति संगत (consistently) परिभाषित की गई हैं।

(i) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.6$
(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

यदि $P(A)$ तथा $P(B)$ युक्ति संगत है, तब $P(A \cap B)$ का मान $P(A)$ तथा $P(B)$ से कम अथवा समान होगा।

हल दिया है

(i) यहाँ, B, $P(A \cap B) \leq P(A)$

अतः दिए आँकड़े युक्ति संगत नहीं है।

(ii) यहाँ, $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad 0.8 = 0.5 + 0.4 - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.9 - 0.8 = 0.1 < P(A)$ तथा $P(B)$.

$\Rightarrow P(A)$ तथा $P(B)$ युक्ति संगत है।

प्रश्न 13. निम्न सारणी में खाली स्थान भरिए

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	...
(ii)	0.35	...	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	...	0.7

यहाँ सूत्र $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ का प्रयोग करके सरल करेंगे।

हल

(i) $\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5+3-1}{15} = \frac{8-1}{15} = \frac{7}{15}$

(ii) $0.6 = 0.35 + P(B) - 0.25 \quad [\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)]$

$\Rightarrow \quad 0.6 = 0.10 + P(B)$

$\Rightarrow \quad P(B) = 0.6 - 0.10 = 0.5$

(iii) $0.7 = 0.5 + 0.35 - P(A \cap B)$

$[\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$\Rightarrow \quad 0.7 = 0.85 - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.85 - 0.7 = 0.15$

प्रश्न 14. $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{1}{5}$ दिया गया है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो $P(A$ या $B)$ ज्ञात कीजिए।

(i) यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं, तब $P(A \cap B) = \phi$

(ii) सूत्र $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ का प्रयोग करेंगे।

हल दिया है, A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

$\Rightarrow \quad A \cap B = \phi$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0$

$\therefore \quad P(A \text{ या } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 15. यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ और $P(E$ और $F) = \frac{1}{8}$, तो ज्ञात कीजिए (i) $P(E$ या $F)$ (ii) $P(E$ नहीं और F नहीं)

हल दिया है, $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(E$ और $F) = \frac{1}{8}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{8}$

(i) $P(E \text{ या } F) = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ $(\because A$ या B का अर्थ है $A \cup B)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$$

(ii) $P(E$ नहीं और F नहीं$)$

$$= P(E' \cap F')$$ [$\because$ डिमॉर्गन विधि से, $E' \cap F' = (E \cup F)'$]

$$= P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

प्रश्न 16. घटनाएँ E और F इस प्रकार हैं कि $P(E$ नहीं और F नहीं$) = 0.25$, बताइए कि E और F परस्पर अपवर्जी है या नहीं?

हल दिया है, $P(E$ नहीं और F नहीं$) = 0.25$

$\Rightarrow \quad P(E' \cup F') = P(E \cap F)' = 0.25$ [($\because$ डिमॉर्गन विधि से, $E' \cup F' = (E \cap F)$]

$\because \quad P(E \cap F)' = 1 - P(E \cap F)$

$\Rightarrow \quad P(E \cap F) = 1 - P(E \cap F)'$

$\therefore \quad P(E \cap F) = 1 - 0.25 = 0.75 \neq 0$

अत: E तथा F परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

प्रश्न 17. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि

$$P(A) = 0.42,\ P(B) = 0.48,\ P(A \text{ और } B) = 0.16$$

ज्ञात कीजिए। (i) $P(A$ नहीं), (ii) $P(B$ नहीं) और (iii) $P(A$ या $B)$

यहाँ सूत्र $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ का प्रयोग करके सरल करेंगे।

हल दिया है, $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.48$

$P(A \text{ और } B) = P(A\cap B) = 0.16$

(i) $P(A \text{ नहीं}) = P(A') = 1 - P(A)$

(किसी घटना तथा उसके पूरक घटना का योग सदैव 1 होता है।)

$P(A) + P(A') = 1$

$= 1 - 0.42 = 0.58$

(ii) $P(B \text{ नहीं}) = P(B') = 1 - P(B)$ $[\because P(B)+P(B')=1]$

$= 1 - 0.48 = 0.52$

(iii) $P(A \text{ या } B) = P(A\cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0.42 + 0.48 - 0.16 = 0.90 - 0.16 = 0.74$

प्रश्न 18. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा।

सूत्र $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ का प्रयोग करके सरल करेंगे।

हल माना M तथा B क्रमशः गणित तथा जीव विज्ञान पढ़ने वाले विद्यार्थियों को प्रदर्शित करते हैं।

दिया है, $P(M) = 40\%$, $P(B) = 30\%$

तथा $P(M\cap B) = 10\%$

(चूँकि कक्षा के 10% विद्यार्थी दोनों विषय पढ़ते हैं अर्थात् वे दोनों विषयों में उभयनिष्ठ हैं।)

$\therefore$ $P(M \text{ या } B) = P(M\cup B)$

$= P(M) + P(B) - P(M\cap B)$

$= \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = 60\% = 0.6$

प्रश्न 19. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों (Tests) के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी के पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायकिता 0.8 है और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम-से-कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

(प्र.सं.19 - 21) कम-से-कम A तथा B के उत्तीर्ण करने की प्रायिकता को हम निम्न द्वारा ज्ञात करेंगे। सूत्र

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

हल दिया है, $P(\text{I}) = 0.8, P(\text{II}) = 0.7$

P (कम-से-कम I तथा II) $= P(\text{I} \cup \text{II}) = 0.95$

अब, $P(\text{I} \cup \text{II}) = P(\text{I}) + P(\text{II}) - P(\text{I} \cap \text{II})$

$\therefore \quad 0.95 = 0.8 + 0.7 - P(\text{I} \cap \text{II})$

$\Rightarrow \quad 0.95 = 1.5 - P(\text{I} \cap \text{II})$

$\Rightarrow \quad P(\text{I} \cap \text{II}) = 1.5 - 0.95 = 0.55$

प्रश्न 20. एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिंदी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 है, तो हिंदी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

हल माना H तथा E क्रमशः हिंदी तथा अंग्रेजी उत्तीर्ण करने वाले छात्रों को प्रदर्शित करते हैं।

यहाँ दिया है $\quad P(H \cap E) = 0.5$

$P(H' \cap E') = P(H \cup E)' = 0.1$

चूँकि हिंदी अथवा अंग्रेजी में पास होने की प्रायिकता $P(H \cup E)$ और हिंदी अथवा अंग्रेजी में पास नहीं होने की प्रायिकता $P(H \cup E)'$ के योग सदैव 1 के समान होगा।

$\therefore \quad P(H \cup E) = 1 - P(H \cup E)' = 1 - 0.1 = 0.9$

दिया है, $\quad P(E) = 0.75$

$\Rightarrow \quad P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E)$

$\Rightarrow \quad 0.9 = P(H) + 0.75 - 0.5$

$0.9 = P(H) + 0.25$

$\Rightarrow \quad P(H) = 0.9 - 0.25 = 0.65$

प्रश्न 21. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एनसीसी (NCC), 32 ने एनएसएस (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) विद्यार्थी ने एनसीसी या एनएसएस को चुना है।

(ii) विद्यार्थी ने न तो एनसीसी और न ही एनएसएस को चुना है

(iii) विद्यार्थी ने एनएसएस को चुना है किंतु एनसीसी को नहीं चुना है।

हल

(i) माना A तथा B क्रमशः एनसीसी तथा एनएसएस चुनने करने वाले छात्रों को प्रदर्शित करते हैं।

यहाँ, $\quad n(A) = 30, n(B) = 32$

तथा $\quad n(A \cap B) = 24$

(चूँकि 24 विद्यार्थियों ने एनसीसी तथा एनएसएस दोनों को चुना है इसलिए ये दोनों में उभयनिष्ठ हैं)

$\therefore \qquad P(A) = \frac{30}{60}$

$P(B) = \frac{32}{60}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{24}{60}$

P (विद्यार्थी ने एनसीसी या एनएसएस को चुना है)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\qquad [\because P(A \cup B) = P(A \text{ या } B)]$

$= \frac{30}{60} + \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{30 + 32 - 24}{60} = \frac{62 - 24}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30}$

(ii) P (विद्यार्थी ने न तो एनसीसी और न ही एनएसएस को चुना है)

$= 1 - P$ (विद्यार्थी ने एन सी सी या एनएसएस को चुना है)

$= 1 - \frac{19}{30} = \frac{30 - 19}{30} = \frac{11}{30}$

(iii) P (विद्यार्थी ने एनएसएस को चुना है किंतु एनसीसी को नहीं चुना है)

$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता क्या है, जब

(i) सभी गोलियाँ नीली हैं?

(ii) कम-से-कम एक गोली हरी है?

n विभिन्न वस्तुओं में से r विभिन्न वस्तुएँ निम्न संबंध द्वारा चुनी जाती हैं

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

हल

डिब्बा
10 लाल गोलियाँ
20 नीली गोलियाँ
30 हरी गोलियाँ

60 गोलियों में से 5 गोलियाँ चुनने के तरीके $= {}^{60}C_5$

(i) माना घटना E सभी गोलियाँ नीली है को प्रदर्शित करती हैं, तब

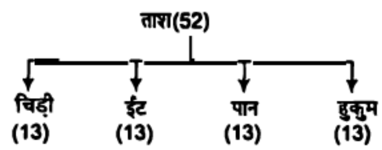
$n(E) = {}^{20}C_5$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5}$

(ii) P(कम-से-कम एक गोली हरी है) $= 1 - P$(कोई हरी नहीं है) $= 1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5}$

प्रश्न 2. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गए पत्तों में 3 ईंट और एक हुकुम का पत्ता है?

हल



52 पत्तों में से 4 पत्तों को चुनने के तरीकों की कुल संख्या = ${}^{52}C_4$

यदि घटना E, 3 ईंट और 1 हुकुम का पता निकालने को प्रदर्शित करती है, तब

$$n(E) = {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$$

$\therefore$ $$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$$

प्रश्न 3. एक पासे के दो फलकों में से प्रत्येक पर संख्या '1' अंकित है, तीन फलकों में से प्रत्येक पर संख्या '2' अंकित है और एक फलक पर संख्या '3' अंकित है। यदि पासा एक बार फेंका जाता है, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $P(2)$ (ii) $P(1 \text{ या } 3)$ (iii) $P(3 \text{ नहीं})$

हल (i) यदि घटना E संख्या 2 प्राप्त होना प्रदर्शित करती है, तब $n(E) = 3$

(चूँकि पासे पर तीन फलकों में से प्रत्येक पर संख्या '2' अंकित है)

$\therefore$ फलकों पर 2 आने की प्रायिकता, $P = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$

$$= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(चूँकि पासे में कुल परिणामों की संख्या 6 है)

(ii) यदि घटना E संख्या 1 या 3 के प्राप्त होना प्रदर्शित करती है, तब, $n(E) = 2 + 1 = 3$

(चूँकि दो फलकों पर संख्या 1 अंकित है तथा एक फलक पर संख्या 2 अंकित है)

$\therefore$ फलकों पर 1 या 3 आने की प्रायिकता, $P = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

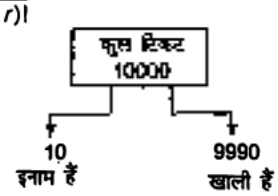
(iii) यदि घटना E संख्या 3 नहीं होना प्राप्त प्रदर्शित करती है, तब $n(E) = 2 + 3 = 5$ (3 नहीं का अर्थ पासे पर 3 नहीं आने से है अर्थात् 1 तथा 2 से है। दो फलकों पर संख्या 1 अंकित है तथा तीन फलकों पर संख्या 2 अंकित है।)

$\therefore$ फलकों पर 3 नहीं आने की प्रायिकता, $P = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{5}{6}$

प्रश्न 4. एक लॉटरी में 10000 टिकट बेचे गए जिनमें दस समान इनाम दिए जाने हैं। कोई भी ईनाम न मिलने की प्रायिकता क्या है यदि आप (i) एक टिकट खरीदते हैं (ii) दो टिकट खरीदते हैं (iii) 10 टिकट खरीदते हैं?

(प्र. सं. 4-5) n विभिन्न वस्तुओं में से r विभिन्न वस्तुएँ चुनने के तरीकों की संख्या के निम्न है $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

हल



(i) 10000 टिकटों में से 1 टिकट $^{10000}C_1$ तरीके से खरीदा जा सकता है।

बिना इनाम वाली 1 टिकट प्राप्त होने के तरीकों की संख्या = $^{9990}C_1$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट प्रायिकता, } P = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{^{9990}C_1}{^{10000}C_1} = \frac{9990}{10000} \qquad (\because {}^nC_1 = n)$$

$$= \frac{999}{1000}$$

(ii) 10000 टिकटों में में 2 टिकट $^{10000}C_2$ तरीके से खरीदे जा सकते हैं।

9990 टिकटों में से 2 बिना इनाम वाली टिकटें प्राप्त होने के तरीकों की संख्या

$$= {}^{9990}C_2$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता, $P = \frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$

(iii) 10000 टिकटों में 10 टिकटें चुनने के तरीकों की संख्या = $^{10000}C_{10}$

9990 टिकटों में से बिना इनाम वाली 10 टिकटें प्राप्त होने के तरीकों की संख्या

$$= {}^{9990}C_{10}$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

प्रश्न 5. 100 विद्यार्थियों में से 40 और 60 विद्यार्थियों के दो वर्ग बनाए गए हैं। यदि आप और आपका एक मित्र 100 विद्यार्थियों में हैं, तो प्रायिकता क्या है कि

(i) आप दोनों एक ही वर्ग में हों?

(ii) आप दोनों अलग-अलग वर्गों में हों?

हल माना दो वर्ग A तथा B में विद्यार्थियों की संख्या क्रमशः 40 तथा 60 हैं।

(i) जब दोनों एक ही वर्ग में हों

दो स्थितियाँ हैं

(a) या दोनों वर्ग A में हों

(b) या दोनों वर्ग B में हों।

स्थिति (a) यदि दोनों वर्ग A में हों, तब 100 विद्यार्थियों में से 40 विद्यार्थियों चुनने के तरीकों की संख्या = ${}^{100}C_{40}$

तथा 98 विद्यार्थियों में से 38 विद्यार्थी चुनने के तरीकों की संख्या = ${}^{98}C_{38}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता, $P = \dfrac{{}^{98}C_{38}}{{}^{100}C_{40}}$

$$= \frac{98!}{38!\,60!} \times \frac{40!\,60!}{100!} \qquad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right]$$

$$= \frac{98! \times 40 \times 39 \times 38!}{38! \times 100 \times 99 \times 98!}$$

$$= \frac{40 \times 39}{100 \times 99} = \frac{2}{5} \times \frac{13}{33} = \frac{26}{165} \qquad \ldots(i)$$

स्थिति (b) यदि दोनों वर्ग B में हों, तब 100 विद्यार्थियों में से 60 विद्यार्थी चुनने के तरीकों की संख्या = ${}^{100}C_{60}$

98 विद्यार्थियों में से 58 विद्यार्थी चुनने के तरीकों की संख्या = ${}^{98}C_{58}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^{98}C_{58}}{{}^{100}C_{60}} = \dfrac{98!}{58!\,40!} \times \dfrac{60!\,40!}{100!}$

$$= \frac{98! \times 60 \times 59 \times 58! \times 40!}{58! \times 40! \times 100 \times 99 \times 98!}$$

$$= \frac{60 \times 59}{100 \times 99} = \frac{3}{5} \times \frac{59}{99} = \frac{59}{5 \times 33} = \frac{59}{165} \qquad \ldots(ii)$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता जब विद्यार्थी या तो वर्ग A या वर्ग B में हो

$$= \frac{26}{165} + \frac{59}{165} \qquad \text{[समी (i) तथा (ii) से]}$$

$$= \frac{85}{165} = \frac{17}{33}$$

(ii) अभीष्ट प्रायिकता जब दोनों अलग-अलग वर्गों में हों

= 1 − प्रायिकता जब दोनों एक ही वर्ग में हों

$$= 1 - \frac{17}{33} = \frac{16}{33}$$

प्रश्न 6. तीन व्यक्तियों के लिए तीन पत्र लिखवाए गए हैं और प्रत्येक के लिए पता लिखा एक लिफाफा है। पत्रों को लिफाफों में यादृच्छया इस प्रकार डाला गया कि प्रत्येक लिफाफों में एक ही पत्र है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम-से-कम एक पत्र अपने सही लिफाफे में डाला गया है।

हल माना पत्रों को E_1, E_2, E_3 से प्रदर्शित किया गया है तथा इनके संगत अक्षरों को L_1, L_2, L_3 द्वारा प्रदर्शित किया गया है। सही लिफाफे में 1 पत्र तथा गलत लिफाफे में 2 पत्र निम्न प्रकार रखे जा सकते हैं

$$(E_1L_1, E_2L_3, E_3L_2), (E_1L_3, E_2L_2, E_3L_1) \text{ तथा } (E_1L_2, E_2L_1, E_3L_3)$$

सही लिफाफे में दो पत्र निम्न प्रकार रखे जा सकते हैं

अर्थात् (E_1L_1, E_2L_2, E_3L_3)

$\therefore$ स्थितियों की संख्या $= 3! = 6$

अनुकूल स्थितियों की संख्या $= 4$

कम-से-कम एक पत्र सही लिफाफे में डाले जाने की प्रायिकता $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

प्रश्न 7. A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि

$$P(A) = 0.54, P(B) = 0.69 \text{ और } P(A \cap B) = 0.35$$

ज्ञात कीजिए (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$

यहाँ हम निम्न सूत्रों का प्रयोग करेंगे

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(b) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

(c) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

हल (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.54 + 0.69 - 0.35 = 1.23 - 0.35 = 0.88$

(ii) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.88 = 0.12$

(iii) $P(A \cap B') = P(\text{केवल} A)$

$= P(A) - P(A \cap B)$

$= 0.54 - 0.35 = 0.19$

(iv) $P(B \cap A') = P(\text{केवल} B)$

$= P(B) - P(B \cap A)$

$= 0.69 - 0.35 = 0.34$

प्रश्न 8. एक संस्था के कर्मचारियों में से 5 कर्मचारियों का चयन प्रबंध समिति के लिए किया गया है। पाँच कर्मचारियों का ब्योरा निम्नलिखित है

क्रम	नाम	लिंग	आयु (वर्षों में)
1.	हरीश	M	30
2.	रोहन	M	33
3.	शीतल	F	46
4.	ऐलिस	F	28
5.	सलीम	M	41

इस समूह से प्रवक्ता पद के लिए यादृच्छया एक व्यक्ति का चयन किया गया। प्रवक्ता के पुरुष या 35 वर्ष से अधिक आयु का होने की क्या प्रायिकता है?

चयनित व्यक्ति A अथवा B की प्रायिकता सूत्र $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ का प्रयोग करके ज्ञात करेंगे।

हल माना घटना A चयनित व्यक्ति को प्रदर्शित करती है जो पुरुष है तथा घटना B चयनित व्यक्ति को प्रदर्शित करती है जो 35 वर्ष से अधिक है।

$$\therefore \quad P(A) = \frac{{}^3C_1}{{}^5C_1} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{{}^2C_1}{{}^5C_1} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 9. यदि 0, 1, 3, 5 और 7 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या का यादृच्छया निर्माण किया गया हो, तो पाँच से भाज्य संख्या के निर्माण की क्या प्रायिकता है, जब,

(i) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं की जाए।

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की जाए।

एक संख्या 5 से विभाज्य होती है जब उसके इकाई स्थान पर शून्य या 5 हो।

हल **स्थिति I** जब अंकों की पुनरावृत्ति हो।

0, 1, 3, 5, और 7 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या के लिये हजारवें स्थान पर संख्या 5 या 7 लेंगे और बचे हुए तीन स्थान के लिये पाँचों अंकों में से कोई अंक लेगें।

$$\boxed{5}\ \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} = 125$$

$$\boxed{7}\ \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} = 125$$

$\therefore$ इस प्रकार बनी चार अंकों वाली कुल संख्या $n(S) = 125 + 125 = 250$

चार अंकों वाली संख्या जो 5 से भाज्य हो अर्थात् इकाई के स्थान पर 0 या 5 और हजार वाले स्थान पर संख्या 5 से 7 तक कोई संख्या और बचे हुए दो स्थानों को पाँच संख्याओं में से किसी भी संख्या द्वारा भरा जा सकता है।

$$\boxed{5}\ \underline{5} \times \underline{5}\ \boxed{0} = 25$$

$$\boxed{}\ \underline{5} \times \underline{5}\ \boxed{} = 25$$

$$\boxed{5}\ \underline{5} \times \underline{5}\ \boxed{5} = 25$$

$$\boxed{7}\ \underline{5} \times \underline{5}\ \boxed{5} = 25$$

अनुकूल स्थितियों की संख्या $n(E) = 25 + 25 + 25 + 25 = 100$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{100}{250} = \dfrac{2}{5}$

स्थिति II जब अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

0, 1, 3, 7, तथा 5 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या के लिये हजारवें स्थान पर संख्या 5 या 7 लेंगे। चूँकि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं है, अतः बचे हुए स्थान क्रमशः 4, 3, 2 संख्याओं से भरे जाएँगे।

$$5 \quad \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 24$$
$$7 \quad \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 24$$

इस प्रकार बनी चार अंकों की कुल संख्याएँ $n(S) = 24 + 24 = 48$

चार अंकों की कुल संख्याएँ जो 5 से भाज्य हो निम्न हैं

$$\boxed{5}\ \underline{3} \times \underline{2}\ \boxed{0} = 6$$
$$\boxed{7}\ \underline{3} \times \underline{2}\ \boxed{0} = 6$$
$$\boxed{7}\ \underline{3} \times \underline{2}\ \boxed{5} = 6$$

अनुकूल स्थितियों की संख्या $n(E) = 6 + 6 + 6 = 18$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

प्रश्न 10. किसी अटैची के ताले में चार चक्र लगे हैं जिनमें प्रत्येक पर 0 से 9 तक 10 अंकित हैं। ताला चार अंकों के एक विशेष क्रम (अंकों की पुनरावृत्ति नहीं) द्वारा ही खुलता है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई व्यक्ति अटैची खोलने के लिए सही क्रम का पता लगा ले?

हल चूँकि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

प्रथम स्थान 10 तरीकों से भरा जा सकता है। दूसरा स्थान 9 तरीकों से भरा जा सकता है। तीसरा स्थान 8 तरीकों से भरा जा सकता है। तथा चौथा स्थान 7 तरीकों से भरा जा सकता है।

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

इसमे से किसी एक क्रम द्वारा ताला खोलने का पता लगाया जा सकता है।

$\therefore$ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{5040}$