Chapter 4

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

Complex Numbers and Quadratic Equations

प्रश्नावली
4.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(प्र.सं.1 - 3) निम्नलिखित प्रश्नों में $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ का प्रयोग करेंगे।

यदि 2 या 4 से अलग i की घात अधिक है, तब हम i की घात को 2 या 4 के गुणक के रूप में परिवर्तन करने का प्रयास करेंगे।

प्रश्न 1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$

हल $5\left(-\frac{3}{5}\right)i^2 = (-3)(-1) = 3 = 3 + 0i$ $\quad (\because i^2 = -1)$

प्रश्न 2. $i^9 + i^{19}$

हल $i^9 + i^{19} = i^9 (1 + i^{10}) = i^9 [1 + (i^2)^5]$ (i^9 उभयनिष्ठ लेने पर)

$= i^9 [1 + (-1)^5] = i^9 [1 - 1] = 0 = 0 + 0i$

प्रश्न 3. i^{-39}

हल $i^{-39} = \frac{1}{i^{39}}$

अंश तथा हर में i से गुणा करने पर,

$= \frac{i}{i^{40}} = \frac{i}{(i^4)^{10}}$ (हर में i की घात 4 का गुणक है)

$= \frac{i}{(1)^{10}} = \frac{i}{1} = i = 0 + i$ $\quad (\because i^4 = 1)$

प्रश्न 4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

(प्र.सं.4 - 7) प्रत्येक प्रश्न में सर्वप्रथम सम्मिश्र संख्या में से वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पृथक करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $3(7+i7)+i(7+i7) = 21+21i+7i+i^2 7 = 21+28i-7$ $\quad (\because i^2=-1)$
$= 14+28i$

> **नोट** *विद्यार्थी हमेशा याद रखें कि सापेक्षिक, वास्तविक तथा काल्पनिक भाग ही जुड़ते या घटते हैं।*

प्रश्न 5. $(1-i)-(-1+6i)$

हल $1-i+1-6i = (1+1)-(i+6i) = 2-7i$

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$

हल $\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}-4-i\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{5}-\frac{4}{1}\right)+i\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1-20}{5}\right)+i\left(\frac{4-25}{10}\right) = -\frac{19}{5}-\frac{21i}{10}$

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

हल $\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}+4+i\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}-i$

$$= \left(\frac{1}{3}+4+\frac{4}{3}\right)+i\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-1\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{1}+\frac{4}{3}\right)+i\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{(1+12+4)}{3}+i\left(\frac{7+1-3}{3}\right) = \frac{17}{3}+i\frac{5}{3}$$

प्रश्न 8. $(1-i)^4$

हल $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1+i^2-2i)^2$ [$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ का प्रयोग करने पर]

$$= (1-1-2i)^2 \quad (\because i^2=-1)$$
$$= (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4+0i$$

प्रश्न 9. $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$

यहाँ पर हम, सूत्र $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3+(3i)^3+3\times\frac{1}{3}\times 3i\left(\frac{1}{3}+3i\right)$

$$= \frac{1}{27}+27i^3+3i\left(\frac{1}{3}+3i\right)$$
$$= \frac{1}{27}-27i+3i\times\frac{1}{3}+3i\times 3i \quad (\because i^3=-i)$$
$$= \frac{1}{27}-27i+i+9i^2$$
$$= \frac{1}{27}-27i+i-9 \quad (\because i^2=-1)$$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{9}{1}\right) - i\,(27 - 1) = \left(\frac{1 - 243}{27}\right) - 26i$$

$$= \frac{-242}{27} - 26i$$

प्रश्न 10. $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$

सर्वप्रथम ऋणात्मक चिन्ह को उभयनिष्ठ लेंगे तत्पश्चात् सूत्र
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का प्रयोग करके हल करेंगे।

हल $(-1)^3\left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 = -\left[(2)^3 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3}i\left(2 + \frac{1}{3}i\right)\right]$

$$= -\left[8 + \frac{1}{27}i^3 + 2i\left(2 + \frac{1}{3}i\right)\right]$$

$$= -\left[8 - \frac{1}{27}i + 4i + \frac{2}{3}i^2\right] \qquad (\because i^3 = -i)$$

$$= -\left[8 - \frac{1}{27}i + 4i - \frac{2}{3}\right] \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= -\left[\left(\frac{8}{1} - \frac{2}{3}\right) + i\left(\frac{4}{1} - \frac{1}{27}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{24 - 2}{3}\right) + i\left(\frac{108 - 1}{27}\right)\right] = -\left[\frac{22}{3} + i\frac{107}{27}\right]$$

निर्देश (प्र. सं. 11 - 13) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(प्र.सं. 11 - 13) यदि सम्मिश्र संख्या z है, तब उसका गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ होगा। अब $\frac{1}{z}$ में z के संयुग्मी $(\bar{z})$ से अंश तथा हर में गुणा करेंगे, इसे हम तब तक हल करेंगे जब तक $\frac{1}{z}$ $(a + ib)$ के रूप में परिवर्तित नहीं होता है।

प्रश्न 11. $4 - 3i$

हल माना $z = 4 - 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4 - 3i}$$

$$= \frac{1}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{4 + 3i}{16 - 9i^2}$$

$[(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग करने पर$]$

$$= \frac{4 + 3i}{16 + 9} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

प्रश्न 12. $\sqrt{5} + 3i$

हल माना $z = \sqrt{5} + 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} \times \frac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{5}-3i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9i^2} \qquad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ का प्रयोग करने पर}]$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5+9} = \frac{\sqrt{5}-3i}{14} = \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3i}{14} \qquad (\because i^2 = -1)$$

प्रश्न 13. $-i$

हल माना $z = -i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= 0 + i$$

प्रश्न 14. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए

$$\frac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}\, i) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})}$$

हल माना $z = \dfrac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})} = \dfrac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3} + i\sqrt{2} - \sqrt{3} + i\sqrt{2}}$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{9 - i^2\, 5}{2\sqrt{2}\, i} = \frac{9+5}{2\sqrt{2}\, i} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{2}\, i} = \frac{7}{\sqrt{2}\, i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}\, i^2} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} = 0 - i\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम इसे हल करने के लिए, हम i की घात को 2 या 4 के गुणक रूप में बदलेंगे तथा $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$ का प्रयोग करके इसे हल करेंगे। तत्पश्चात् सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3=\left[(i^2)^9+\frac{1}{i^{25}}\right]^3=\left[(i^2)^9+\frac{1}{i\cdot i^{24}}\right]^3$

$=\left[(-1)^9+\frac{1}{i\,(i^4)^6}\right]^3 \qquad (\because i^2=-1)$

$=\left[-1+\frac{1}{i}\right]^3 \qquad (\because i^4=1)$

$=\left[-1+\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}\right]^3=\left[-1+\frac{i}{i^2}\right]^3$

$=[-1-i]^3 \qquad (\because i^2=-1)$

$=(-1)^3\,[1+i]^3$

$=-[(1)^3+i^3+3\times1\times i\,(1+i)] \qquad [\because (a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)]$

$=-(1-i+3i+3i^2) \qquad (\because i^3=-i)$

$=-(1-i+3i-3) \qquad (\because i^2=-1)$

$=-(-2+2i)=2-2i$

> **नोट** विद्यार्थियों से आग्रह किया जाता है कि व्यंजक का शुरुआत में घन न करें अर्थात् शुरुआत में सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$ का प्रयोग न करें, ऐसा करने से गणना जटिल हो जाती है।

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए

$$\text{Re}\,(z_1z_2)=\text{Re}\,(z_1)\,\text{Re}\,(z_2)-\text{Im}\,(z_1)\,\text{Im}(z_2)$$

हल माना $z_1=a+ib$

$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_1)=a$ तथा $\text{Im}\,(z_1)=b \qquad \ldots(i)$

तथा $\quad z_2=c+id \qquad \ldots(ii)$

$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_2)=c$ तथा $\text{Im}\,(z_2)=d$

अब, $\quad z_1z_2=(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd$

$=ac+i\,(ad+bc)-bd \qquad (\because i^2=-1)$

$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_1 z_2) = ac - bd$

$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\,(z_1)\,\text{Re}\,(z_2) - \text{Im}\,(z_1)\,\text{Im}\,(z_2)$ [समी (i) तथा (ii) से]

यहाँ Re वास्तविक भाग तथा Im काल्पनिक भाग को निरूपित करता है।

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यंजक का लघुत्तम समापवर्तक लेंगे तत्पश्चात् व्यंजक के हर को शुद्ध वास्तविक संख्या के रूप में परिवर्तित करेंगे।

हल $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right) = \frac{\{1+i-2\,(1-4i)\}}{(1-4i)(1+i)} \times \left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$

$$= \frac{1+i-2+8i}{1+i-4i-4i^2} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$= \frac{(1-2)+i\,(1+8)}{1+i\,(1-4)-4(-1)} \times \frac{3-4i}{5+i} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{-1+9i}{5-3i} \times \frac{3-4i}{5+i} = \frac{-3+4i+27i-36i^2}{25+5i-15i-3i^2}$$

$$= \frac{-3+i\,(4+27)-36\,(-1)}{25+(5-15)\,i-3\,(-1)} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{-3+31i+36}{25-10i+3} = \frac{33+31i}{28-10i} \times \frac{28+10i}{28+10i}$$

$$= \frac{924+330i+868i+310i^2}{784-100i^2} \qquad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$= \frac{924+(330+868)i-310}{784+100} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{614+1198i}{884} = \frac{307+i599}{442}$$

प्रश्न 4. यदि $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2+y^2) = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

आवश्यक व्यंजक को सिद्ध करने के लिए, सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् निम्न गुण का प्रयोग करेंगे

$$|z|^n = |z^n| \quad \text{तथा} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

हल दिया है, $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$

$\Rightarrow \quad x + i\,(-y) = \left(\frac{a-ib}{c-id}\right)^{1/2}$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|x + i(-y)| = \left|\left(\frac{a - ib}{c - id}\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ तथा } |z^n| = |z|^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{|a - ib|}{|c - id|} \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \qquad \left(\because |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

नोट *कृपया सावधानी रखें कि, दिए हुए व्यंजक में दोनों पक्षों का वर्ग करके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग तुलना के द्वारा x व y के पृथक-पृथक मानों को ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व समय लेने वाली है, इसलिए विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग करें।*

Ques 5

यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$, तब $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक में, z_1 तथा z_2 के मान रखेंगे, तत्पश्चात् व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे तथा आवश्यक मापांक के गुणों का प्रयोग करके इसे हल करेंगे।

हल $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right| = \left|\dfrac{2 - i + 1 + i + 1}{2 - i - (1 + i) + 1}\right|$ $\quad (\because z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i)$

$$= \left|\frac{4}{2 - i - 1 - i + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{4}{2 - 2i}\right| = \left|\frac{2}{1 - i}\right| = \frac{2}{|1 - i|} \qquad \left[\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \qquad (\because |z| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

यदि $a + ib = \dfrac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$

Ques 6

हल दिया है, $a + ib = \dfrac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$

दोनों ओर मापांक लेने पर,

$$|a + ib| = \left|\frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|(x + i)^2|}{|2x^2 + 1|} = \frac{|x + i|^2}{2x^2 + 1}$$

$$\left[\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z^n| = |z|^n \text{ तथा } \text{Re}|(z)| = \text{Re}(z)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2}{2x^2 + 1}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

नोट *विद्यार्थी कृपया ध्यान रखें कि दिए हुए व्यंजक के दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना के द्वारा x व y के पृथक-पृथक मान ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व लंबी होगी तथा इसमें बहुत समय व्यर्थ होगा अतः विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग कम-से-कम करें।*

Ques 7

माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए।

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

(i) सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक में z_1 व z_2 तथा z_1 के संयुग्मी का मान रखकर इसे $a + ib$ के रूप में सरल करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का वास्तविक भाग ज्ञात करेंगे।

(ii) सर्वप्रथम हम मापांक के गुण $z\bar{z} = |z|^2$ का प्रयोग करके व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् $a + ib$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करेंगे।

हल

(i) $\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} = \dfrac{(2-i)(-2+i)}{\overline{(2-i)}} = \dfrac{-(2-i)(2-i)}{(2+i)}$ $\quad (\because z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i)$

$(\because z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib)$

$= \dfrac{-(2-i)^2}{2+i} = \dfrac{-(4+i^2-4i)}{2+i} = \dfrac{-(4-1-4i)}{2+i}$ $\quad [\because i^2 = -1]$

$= \dfrac{-(3-4i)}{2+i} \times \dfrac{2-i}{2-i}$

$= \dfrac{-(6-3i-8i+4i^2)}{(2)^2-(i)^2}$ $\quad [\because (a+b)(a-b) = (a^2-b^2)]$

$= \dfrac{-(6-11i-4)}{4-i^2}$ $\quad (\because i^2 = -1)$

$= \dfrac{-(2-11i)}{4+1}$ $\quad (\because i^2 = -1)$

$= -\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{11i}{5}\right) = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$

$\therefore \text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) = -\dfrac{2}{5}$

(ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

$\because \quad z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2$

$\Rightarrow \quad z_1\bar{z}_1 = |-2+i|^2 = (\sqrt{4+1})^2 = 5 + 0i$

$\therefore \quad \dfrac{1}{z_1\bar{z}_1} = \dfrac{1}{5} + 0i$

$\Rightarrow \quad \text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_2}\right) = 0$

यदि $(x - iy)(3 + 5i)$, $(-6 - 24i)$ की संयुग्मी है, तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

Ques 8 व्यंजक $(x - iy)(3 + 5i)$ तथा $(-6 - 24i)$ के संयुग्मी में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करके, हम x तथा y के मान ज्ञात करेंगे।

हल $(x - iy)(3 + 5i) = 3x + 5xi - 3yi - 5yi^2$

$$= 3x + (5x - 3y)i + 5y \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= (3x + 5y) + (5x - 3y)i \qquad \text{(i)}$$

दिया है, $(x - iy)(3 + 5i) = \overline{(-6 - 24i)}$

$\Rightarrow$ $(3x + 5y) + i(5x - 3y) = -6 + 24i$

[समी (i) तथा $z = (a + ib) \Rightarrow \bar{z} = (a - ib)$ का प्रयोग करने पर]

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$3x + 5y = -6$$

तथा $$5x - 3y = 24$$

अब, प्रतिस्थापन या विलोपन विधि के द्वारा उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$x = 3 \text{ तथा } y = -3$$

Ques 9

$\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक को इसके मानक रूप $a+ib$ में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् हम इसका मापांक ज्ञात करेंगे।

हल माना $z=\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(1+i^2+2i)-(1+i^2-2i)}{1-i^2}$

$=\dfrac{4i}{2}=2i=0+2i$ $\left[\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \text{ तथा } (a-b)^2=a^2+b^2-2ab\right]$

$\therefore$ $|z|=\sqrt{0^2+2^2}=2$

यदि $(x+iy)^3=u+iv$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=4(x^2-y^2)$

Ques 10

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष में सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करेंगे।

हल $(x+iy)^3=u+iv \Rightarrow x^3+(iy)^3+3xiy(x+iy)=u+iv$

$\Rightarrow x^3+i^3y^3+3x^2yi+3xy^2i^2=u+iv$

$\Rightarrow x^3-iy^3+3x^2yi-3xy^2=u+iv$ $(\because i^3=-i, i^2=-1)$

$\Rightarrow (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=u+iv$

अब, वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x^3-3xy^2=u$ तथा $3x^2y-y^3=v$

$\therefore$ $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=\dfrac{x^3-3xy^2}{x}+\dfrac{3x^2y-y^3}{y}$

$=x^2-3y^2+3x^2-y^2=4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)$ इति सिद्धम्

यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ $|\beta|=1$, तब $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात

Ques 11

कीजिए।

हल $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=\left|\dfrac{(\beta-\alpha)\bar{\beta}}{(1-\bar{\alpha}\beta)\bar{\beta}}\right|=\left|\dfrac{(\beta-\alpha)\bar{\beta}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}}\right|$ (अंश तथा हर में $\bar{\beta}$ से गुणा करने पर)

$=\left|\dfrac{(\beta-\alpha)\bar{\beta}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}\right|$ $(\because \beta\bar{\beta}=|\beta|^2=|1|^2=1)$

$=\dfrac{|(\beta-\alpha)\bar{\beta}|}{|\bar{\beta}-\bar{\alpha}|}$ $\left(\because \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right)$

$=\dfrac{|\beta-\alpha||\bar{\beta}|}{|\beta-\alpha|}$ $(\because |z_1z_2|=|z_1||z_2|$ तथा $|\bar{z_1}-\bar{z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|)$

$=\dfrac{|\beta-\alpha||\beta|}{|\beta-\alpha|}$ $(\because |\bar{z}|=|z|)$

$=|\beta|=1$

नोट *विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि यहाँ पर व्यंजक में α तथा β के मान सम्मिश्र संख्या के रूप में मानकर न रखें क्योंकि यह विधि बहुत लंबी व जटिल तथा अधिक समय लगने वाली होगी।*

Ques 12 **समीकरण $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येतर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में घातों की तुलना करेंगे।

हल दिया है, $|1-i|^x = 2^x$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{(1)^2+(-1)^2})^x = 2^x \qquad (\because |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2})$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{1+1})^x = 2^x$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$

दोनों पक्षों में 2 की घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0$

$x = 0$

परंतु हमें अशून्य हल की आवश्यकता है। अतः हलों की संख्या शून्य है।

नोट *यहाँ, $x = 0$ एक हल को निरूपित करता है। विद्यार्थियों को यहाँ शब्द 'हल' तथा 'हलों की संख्या' के मध्य अंतर समझना अनिवार्य है।*

Ques 13 **यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$, तब सिद्ध कीजिए**

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$$

दिए गए व्यंजक में सर्वप्रथम हम दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् मापांक के गुण का प्रयोग करेंगे।

हल $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$|(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)| = |A+iB|$

$\Rightarrow \quad |a+ib||c+id||e+if||g+ih| = |A+iB|$

$(\because |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\dots|z_n|)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{e^2+f^2}\sqrt{g^2+h^2} = \sqrt{A^2+B^2}$

$(\because$ यदि $z = a+ib$ तब $|z| = \sqrt{a^2+b^2})$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$$

Ques 14

यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तब m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यंजक के बाएँ पक्ष को इसके मानक रूप अर्थात् $a + ib$ में बदलेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में यदि आधार समान है, तब उनकी घातों की तुलना करेंगे।

हल $\quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right]^m = 1$

$\Rightarrow \quad \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right]^m = 1$

$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ तथा $i^2 = -1]$

$\Rightarrow \quad \left[\frac{1-1+2i}{2}\right]^m = 1$

$\Rightarrow \quad i^m = 1$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{-1})^m = 1 \qquad (\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1})$

$\Rightarrow \quad (-1)^{\frac{m}{2}} = (-1)^2$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर, $\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4$

अतः m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान 4 है।

> नोट 1 को हम $(-1)^2, (-1)^4, (-1)^6, \ldots$ आदि के रूप में लिख सकते हैं परंतु न्यूनतम मान हेतु हम $(-1)^2$ लेंगे।