Chapter 7

द्विपद प्रमेय

Binomial Theorem

Exercise 7.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिए।

(प्र.सं. 1 - 5) दिए गए व्यंजक का प्रसार करने के लिए

$$(x+y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_ny^n$$

तथा $(x-y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - \ldots + (-1)^n {}^nC_ny^n$

तथा परिणामों

$${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = n, {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}, {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ आदि}$$

का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 1. $(1-2x)^5$

हल $(1-2x)^5 = {}^5C_0(1)^5 - {}^5C_1(1)^4 2x + {}^5C_2(1)^3(2x)^2$

$$- {}^5C_3(1)^2(2x)^3 + {}^5C_4(1)(2x)^4 - {}^5C_5(2x)^5$$

$$= {}^5C_0 - {}^5C_1 2x + {}^5C_2 4x^2 - {}^5C_2 8x^3 + {}^5C_1 16x^4 - {}^5C_0 32x^5$$

$$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= 1 - 5\times 2x + \frac{5\times 4}{2}\times 4x^2 - \frac{5\times 4}{2}\times 8x^3 + 5\times 16\times x^4 - 32x^5$$

$$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$$

प्रश्न 2. $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$

हल $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5 = {}^5C_0\left(\frac{2}{x}\right)^5 - {}^5C_1\left(\frac{2}{x}\right)^4\frac{x}{2} + {}^5C_2\left(\frac{2}{x}\right)^3\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$- {}^5C_3\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^5C_4\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^4 - {}^5C_5\left(\frac{x}{2}\right)^5$$

$$= {}^5C_0\frac{32}{x^5} - {}^5C_1\frac{16}{x^4}\times\frac{x}{2} + {}^5C_2\frac{8}{x^3}\times\frac{x^2}{4} - {}^5C_2\frac{4}{x^2}\times\frac{x^3}{8}$$

$$+ {}^5C_1\frac{2}{x}\times\frac{x^4}{16} - {}^5C_0\frac{x^5}{32} \qquad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

https://www.evidyarthi.in/

$$= \frac{32}{x^5} - \frac{5 \times 16 \times x}{2x^4} + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{8}{x^3} \times \frac{x^2}{4} - \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4}{x^2} \times \frac{x^3}{8} + 5 \times \frac{2}{x} \times \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32}$$

$$= \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5x^3}{8} - \frac{x^5}{32}$$

प्रश्न 3. $(2x-3)^6$

हल $(2x-3)^6 = {}^6C_0 (2x)^6 - {}^6C_1 (2x)^5 \times 3 + {}^6C_2 (2x)^4 (3)^2 - {}^6C_3 (2x)^3 (3)^3 + {}^6{}_4(2x)^2 (3)^4 - {}^6{}_5(2x) 3^5 + {}^6{}_6 3^6$

$= {}^6C_0\, 64x^6 - {}^6C_1\, 32x^5 \times 3 + {}^6C_2\, 16x^4 \times 9 - {}^6C_3\, 8x^3 \times 27 + {}^6C_2\, 4x^2 \times 81 - {}^6C_1\, 2x \times 243 + {}^6C_0\, 729 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= 64x^6 - 6 \times 32 \times 3 \times x^5 + \frac{6 \times 5}{2} \times 16x^4 \times 9 - \frac{6 \times 5 \times 4 \times 8x^3 \times 27}{6} + \frac{6 \times 5}{2} \times 4x^2 \times 81 - 6 \times 2x \times 243 + 729$

$= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

प्रश्न 4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

हल $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5 = {}^5C_0 \left(\frac{x}{3}\right)^5 + {}^5C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^5C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^5C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^5C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5$

$= {}^5C_0 \frac{x^5}{243} + {}^5C_1 \frac{x^4}{81} \times \frac{1}{x} + {}^5C_2 \times \frac{x^3}{27} \times \frac{1}{x^2} + {}^5C_2 \frac{x^2}{9} \times \frac{1}{x^3} + {}^5C_1 \frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + {}^5C_0 \times \frac{1}{x^5} \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= \frac{x^5}{243} + \frac{5}{81} \times x^3 + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{1}{27} \times x + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{x} + 5 \times \frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$

$= \frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10x}{27} + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5}$

प्रश्न 5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

हल $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^6C_2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6C_3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6{}_4C^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5 (x) \left(\frac{1}{x}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\frac{1}{x}\right)^6$

https://www.evidyarthi.in/

$$= {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^4 + {}^6C_2 \frac{x^4}{x^2} + {}^6C_3 x^3 \times \frac{1}{x^3}$$
$$+ {}^6C_2 x^2 \times \frac{1}{x^4} + {}^6C_1 x \times \frac{1}{x^5} + {}^6C_6 \frac{1}{x^6} \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$
$$= x^6 + 6x^4 + \frac{6 \times 5}{2} x^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times 1 + \frac{6 \times 5}{2} \frac{1}{x^2} + 6 \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$
$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 6 - 9) किसी संख्या की घात का मान द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके ज्ञात करने के लिए हम नंबर (संख्या) को दो भागों में इस प्रकार से तोड़ते हैं, जैसे $96 = 100 - 4$, $102 = 100 + 2$, $101 = 100 + 1$ तथा $99 = 100 - 1$, कि हम इसमें द्विपद प्रमेय लागू कर सकें। तत्पश्चात् $(x + y)^n$ तथा $(x - y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 6. $(96)^3$

हल $(96)^3 = (100 - 4)^3 = {}^3C_0 (100)^3 - {}^3C_1 (100)^2 4 + {}^3C_2 (100)(4)^2 - {}^3C_3 (4)^3$
$= {}^3C_0 (10^6) - {}^3C_1 (10)^4 \times 4 + {}^3C_1 (10^2) \times 16 - {}^3C_0 64 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$
$= 10^6 - 3 \times 10^4 \times 4 + 3 \times 10^2 \times 16 - 64$
$= 10^6 - 12 \times 10^4 + 48 \times 10^2 - 64 = (10^6 + 48 \times 10^2) - (12 \times 10^4 + 64)$
$= (10^6 + 4800) - (120000 + 64) = 1004800 - 120064 = 884736$

नोट: जब भी किसी दी हुई संख्या को हल करने के लिए द्विपद प्रमेय को लागू करते हैं, तब हम संख्या को दो भागों में इस प्रकार विभक्त करते हैं कि उनमें से एक 10 का गुणक हो, जिससे गणना आसान हो जाती है।

प्रश्न 7. $(102)^5$

हल $(102)^5 = (100 + 2)^5$
$= {}^5C_0 (100)^5 + {}^5C_1 (100)^4 (2)^1 + {}^5C_2 (100)^3 (2)^2$
$+ {}^5C_3 (100)^2 (2)^3 + {}^5C_4 (100) (2)^4 + {}^5C_5 (2)^5$
$= {}^5C_0 (10)^{10} + {}^5C_1 (10^8) 2 + {}^5C_2 (10^6) \times 4 + {}^5C_2 (10^4) \times 8$
$+ {}^5C_1 (10)^2 \times 16 + {}^5C_0 \times 32 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$
$= 1 \times 10^{10} + 5 \times 10^8 \times 2 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^6 \times 4 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^4 \times 8$
$+ 5 \times 100 \times 16 + 32$
$= 10000000000 + 1000000000 + 40000000 + 800000 + 8000 + 32$
$= 11040808032$

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 8. $(101)^4$

हल $(101)^4 = (100 + 1)^4 = {}^4C_0 (100)^4 + {}^4C_1(100)^3 (1) + {}^4C_2(100)^2 \cdot (1)^2$

$$+ {}^4C_3 100 \cdot (1)^3 + {}^4C_4 \cdot (1)^4$$

$= {}^4C_0 10^8 + {}^4C_1 10^6 + {}^4C_2 10^4 + {}^4C_1 (10)^2 + {}^4C_0$ $\quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= 10^8 + 4 \times 10^6 + \frac{4 \times 3}{2} \times 10^4 + 4 \times 10^2 + 1$

$= 100000000 + 4000000 + 60000 + 400 + 1 = 104060401$

प्रश्न 9. $(99)^5$

हल $(99)^5 = (100 - 1)^5 = {}^5C_0 (100)^5 - {}^5C_1 (100)^4 \times 1 + {}^5C_2 (100)^3 \times (1)^2$

$$- {}^5C_3 (100)^2 \times 1^3 + {}^5C_4 100 \times 1^4 - {}^5C_5 \times 1^5$$

$= {}^5C_0 (10)^{10} - {}^5C_1(10)^8 + {}^5C_2(10)^6 - {}^5C_2(10)^4 + {}^5C_1 \times (10)^2 - {}^5C_0$

$$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$= 10000000000 - 5 \times 100000000$

$$+ \frac{5 \times 4}{2} \times 1000000 - \frac{5 \times 4}{2} \times 10000 + 5 \times 100 - 1$$

$= (10000000000 + 10000000 + 500) - (500000000 + 100000 + 1)$

$= 10010000500 - 500100001 = 9509900499$

प्रश्न 10. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है

$(1.1)^{10000}$ या 1000 ?

$(1.1)^{10000}$ में द्विपद प्रमेय का प्रयोग करेंगे अर्थात् संख्या (1.1) को (1 + 0.1) में विभक्त करेंगे।

हल $(1.1)^{10000} = (1 + 0.1)^{10000}$

$= {}^{10000}C_0 (1)^{10000} + {}^{10000}C_1 (1)^{9999} (0.1) + \ldots +$ अन्य पद

$= 1 \times 1 + 10000 \times 0.1 + \ldots +$ अन्य पद $\quad (\because {}^nC_0 = 1, {}^nC_1 = n)$

$= 1 + 1000 +$ अन्य पद

$= (1001 +$ अन्य पद$) > 1000 \Rightarrow (1.1)^{10000} > 1000$

प्रश्न 11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 11 - 12)

प्रसार $(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y^n + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + {}^nC_n y^n$

तथा $(x - y)^n = {}^nC_0 y^n - {}^nC_1 x^{n-1} y^n + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - \ldots + (-1)^n {}^nC_n y^n$

का प्रयोग करके सरल करेंगे।

https://www.evidyarthi.in/

हल अब, $(a+b)^4 = {}^4C_0\,a^4 + {}^4C_1\,a^3b + {}^4C_2\,a^2b^2 + {}^4C_3\,ab^3 + {}^4C_4\,b^4$

$= {}^4C_0a^4 + {}^4C_1\,a^3b + {}^4C_2a^2b^2 + {}^4C_1ab^3 + {}^4C_0\,b^4$ $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$= 1 \times a^4 + 4\,a^3b + \frac{4\times 3}{2}a^2b^2 + 4ab^3 + 1\times b^4$

$\Rightarrow \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ...(i)

इसी प्रकार, $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ ...(ii)

समी (ii) से समी (i) को घटाने पर,

$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab\,(a^2+b^2)$

अब, $a = \sqrt{3}$ तथा $b = \sqrt{2}$ रखने पर,

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}\sqrt{2}\,[(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2]$

$= 8\sqrt{6}\,(3+2) = 8\sqrt{6}\times 5 = 40\sqrt{6}$

प्रश्न 12. $(x+1)^6 + (x-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल अब, $(x+1)^6 = {}^6C_0\,x^6 + {}^6C_1x^5\times 1 + {}^6C_2x^4\times(1)^2 + {}^6C_3\,x^3\times(1)^3 + {}^6C_4x^2\times(1)^4 + {}^6C_5\,x\times(1)^5 + {}^6C_6(1)^6$

$\Rightarrow \quad (x+1)^6 = {}^6C_0\,x^6 + {}^6C_1x^5 + {}^6C_2x^4 + {}^6C_3\,x^3 + {}^6C_2x^2 + {}^6C_1x + {}^6C_0$

$(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$\Rightarrow \quad (x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + \frac{6\times 5}{2}x^4 + \frac{6\times 5\times 4}{6}x^3 + \frac{6\times 5}{2}x^2 + 6x + 1$

$\Rightarrow \quad (x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$ ...(i)

इसी प्रकार, $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ ...(ii)

अब, समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$

अब, $x = \sqrt{2}$ रखने पर

$\Rightarrow \quad (\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6 = 2[(\sqrt{2})^6 + 15(\sqrt{2})^4 + 15(\sqrt{2})^2 + 1]$

$= 2\,(2^3 + 15\times 2^2 + 15\times 2 + 1)$

$= 2\,(8 + 15\times 4 + 30 + 1) = 2\,(8 + 60 + 30 + 1)$

$= 2\,(99) = 198$

प्रश्न 13. दिखाइए कि $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 से विभाज्य है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

यहाँ, 9^{n+1} को $9^n \times 9$ लिख सकते हैं तथा 9^n को $(1+8)^n$ लिख सकते हैं, तत्पश्चात् $(x+y)^n$ का प्रसार उपयोग करेंगे।

हल $9^{n+1} - 8n - 9 = 9^n \times 9 - 8n - 9$

$= (1+8)^n \times 9 - 8n - 9$

$= ({}^nC_0 + {}^nC_1 8 + {}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \ldots + {}^nC_n 8^n)\,9 - 8n - 9$

https://www.evidyarthi.in/

$= (1 + 8n + {}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \ldots + {}^nC_n 8^n) 9 - 8n - 9$

$= 9 + 72n + ({}^nC_2 8^2 + {}^nC_3 8^3 + \ldots + {}^nC_n 8^n) 9 - 8n - 9$

$= (72n - 8n) + 8^2 ({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \ldots + {}^nC_n 8^{n-2}) 9$

$= 64n + 64({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \ldots + {}^nC_n 8^{n-2}) 9$

$= 64 [n + ({}^nC_2 + {}^nC_3 8 + \ldots + {}^nC_n 8^{n-2}) 9]$

= 64 × कुछ अचर संख्याएँ = 64 से गाज्य संख्या

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} 3^r \, {}^nC_r = 4^n$

यहाँ $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots + {}^nC_n x^n$ ...(i)

का प्रयोग करेंगे।

हल $\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \times 3^r = {}^nC_0 3^0 + {}^nC_1 3 + {}^nC_2 3^2 + {}^nC_3 3^3 + \ldots + {}^nC_n 3^n$

$= {}^nC_0 + {}^nC_1 3 + {}^nC_2 3^2 + {}^nC_3 3^3 + \ldots + {}^nC_n 3^n$

$= (1 + 3)^n = 4^n$

https://www.evidyarthi.in/

Ques 1

यदि a और b भिन्न-भिन्न पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n - b^n)$ का एक गुणनखंड $(a - b)$ है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

[संकेत $a^n = (a - b + b)^n$ लिखकर प्रसार कीजिए।]

$(x + y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करेंगे

$$(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + \ldots + {}^nC_n y^n$$

हल a^n को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $a^n = (a - b + b)^n$

$$= {}^nC_0 (a - b)^n + {}^nC_1 (a - b)^{n-1} b + {}^nC_2 (a - b)^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_n b^n$$

$\Rightarrow a^n = (a - b)[{}^nC_0 (a - b)^{n-1} + {}^nC_1 (a - b)^{n-2} b + {}^nC_2 (a - b)^{n-3} b^2 + \ldots] + b^n$

$\Rightarrow a^n - b^n = (a - b)[{}^nC_0 (a - b)^{n-1} + {}^nC_1 (a - b)^{n-2} b + \ldots]$

$\Rightarrow (a - b)$ $(a^n - b^n)$ का गुणनखंड है।

Ques 2 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 5 - 6) निम्न प्रसारों का प्रयोग करेंगे

$$(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + {}^nC_n y^n$$

तथा $(x - y)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - \ldots + (-1)^n {}^nC_n y^n$

हल हम जानते हैं कि $(x + y)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 y + {}^6C_2 x^4 y^2 + {}^6C_3 x^3 y^3 + {}^6C_4 x^2 y^4 + {}^6C_5 xy^5 + {}^6C_6 y^6$

$$= {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 y + {}^6C_2 x^4 y^2 + {}^6C_3 x^3 y^3 + {}^6C_2 x^2 y^4 + {}^6C_1 xy^5 + {}^6C_0 y^6 \quad (\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$$

$$= x^6 + 6x^5 y + \frac{6 \times 5}{2} x^4 y^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} x^3 y^3 + \frac{6 \times 5}{2} x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$\Rightarrow (x + y)^6 = x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6 \quad \ldots(i)$

इसी प्रकार, $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5 y + 15x^4 y^2 - 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 - 6xy^5 + y^6 \quad \ldots(ii)$

https://www.evidyarthi.in/

समी (i) से समी (ii) को घटाने पर,

$$(x+y)^6-(x-y)^6=12x^5y+40x^3y^3+12xy^5=4xy[3x^4+10x^2y^2+3y^4]$$

$x=\sqrt{3}$ तथा $y=\sqrt{2}$ रखने पर,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$$

$$=4\sqrt{3}\sqrt{2}\,[3(\sqrt{3})^4+10(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})^4]$$

$$=4\sqrt{6}\,[3\times3^2+10\times3\times2+3\times2^2]=4\sqrt{6}\,[3\times9+60+3\times4]$$

$$=4\sqrt{6}\,[27+60+12]=4\sqrt{6}\times(39+60)=4\sqrt{6}\times99=396\sqrt{6}$$

Ques 3 $(a^2+\sqrt{a^2-1})^4+(a^2-\sqrt{a^2-1})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना $a^2=x$ तथा $\sqrt{a^2-1}=y$

अब, $(x+y)^4={}^4C_0x^4+{}^4C_1x^3y+{}^4C_2x^2y^2+{}^4C_3xy^3+{}^4C_4y^4$

$={}^4C_0x^4+{}^4C_1x^3y+{}^4C_2x^2y^2+{}^4C_1xy^3+{}^4C_0y^4$ $\quad(\because {}^nC_r={}^nC_{n-r})$

$$=x^4+4x^3y+\frac{4\times3}{2}x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$\Rightarrow\quad (x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \qquad \ldots(i)$$

इसी प्रकार, $\quad (x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+12x^2y^2+2y^4=2\,[x^4+6x^2y^2+y^4]$$

x तथा y का मान अर्थात् $x=a^2$ तथा $y=\sqrt{a^2-1}$ रखने पर,

$$(a^2+\sqrt{a^2-1})^4+(a^2-\sqrt{a^2-1})^4$$

$$=2\,[(a^2)^4+6(a^2)^2(\sqrt{a^2-1})^2+(\sqrt{a^2-1})^4]$$

$$=2\,[a^8+6a^4(a^2-1)+(a^2-1)^2]=2(a^8+6a^6-6a^4+a^4+1-2a^2)$$

$$=2(a^8+6a^6-5a^4-2a^2+1)=2a^8+12a^6-10a^4-4a^2+2$$

Ques 4 $(0.99)^5$ के प्रसार के पहले तीन पदों का प्रयोग करते हुए इसका निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

0.99 = (1 − 0.01) लिखेंगे। तब, $(0.99)^5$ के प्रसार में वहाँ पर 6 पद होंगे परन्तु आपको केवल शुरुआती तीन पद ही लेने हैं।

$(1-x)^n={}^nC_0-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-{}^nC_3x^3+{}^nC_4x^4+\ldots+(-1)^n\,{}^nC_nx^n$

प्रयोग करने पर,

हल $(0.99)^5=(1-0.01)^5$

$={}^5C_0(1)^5-{}^5C_1(1)^4(0.01)+{}^5C_2(1)^3(0.01)^2$ (अन्य पदों को छोड़ने पर)

$$=1-5\times1\times0.01+\frac{5\times4}{2}\times1\times0.01\times0.01$$

$$=1-0.05+10\times0.0001=1-0.05+0.001$$

$$=1.001-0.05=0.951$$

https://www.evidyarthi.in/

Ques 5 $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार ज्ञात कीजिए।

(प्र.सं. 9 - 10) प्रथम दो पदों को x तथा अंतिम पद को y मानने पर $(x-y)^n$ के प्रसार का प्रयोग करेंगे।

हल $\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{x}\right]^4 = {}^4C_0\left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - {}^4C_1\left(1+\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{2}{x}\right)$

$+ {}^4C_2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - {}^4C_3\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{2}{x}\right)^4$

https://www.evidyarthi.in/

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - 4\left(1+\frac{x}{2}\right)^3 \frac{2}{x} + \frac{4\times 3}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \frac{4}{x^2} - 4\left(1+\frac{x}{2}\right)\times\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{8}{x}\left(1+\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{24}{x^2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{32}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

अब, $\left(1+\frac{x}{2}\right)^4, \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$ का प्रसार खोलने पर,

$$\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4 = \left(1+4\cdot\frac{x}{2}+6\cdot\frac{x^2}{4}+4\cdot\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}\right) - 8\cdot\frac{1}{x}\left(1+3\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}\right)$$
$$+ 24\cdot\frac{1}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right) - 32\times\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}\right) - \left(\frac{8}{x}+12+6x+x^2\right)$$
$$+ \left(\frac{24}{x^2}+\frac{24}{x}+6\right) - \left(\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + x^2\left(\frac{3}{2}-1\right) + x(2-6) + (1-12+6)$$
$$+ (24-8)\frac{1}{x} + (24-16)\frac{1}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 5 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

Ques 6 $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3 = [3(x^2+a^2) - 2ax]^3$

$$= {}^3C_0\{3(x^2+a^2)\}^3 - {}^3C_1\{3(x^2+a^2)\}^2 2ax$$
$$+ {}^3C_2\{3(x^2+a^2)\}(2ax)^2 - {}^3C_3(2ax)^3$$

$$= 27(x^2+a^2)^3 - 3\times 9(x^2+a^2)^2\times 2ax$$
$$+ 3\times 3(x^2+a^2)4a^2x^2 - 8a^3x^3$$

अब, $(x^2+a^2)^3, (x^2+a^2)^2$ का प्रसार खोलने पर, हम पाते हैं

$$= 27[{}^3C_0(x^2)^3 + {}^3C_1(x^2)^2a^2 + {}^3C_2x^2(a^2)^2 + {}^3C_3(a^2)^3]$$
$$- 27[{}^2C_0(x^2)^2 + {}^2C_1x^2a^2 + {}^2C_2(a^2)^2]\times 2ax$$
$$+ 9(x^2+a^2)4a^2x^2 - 8a^3x^3$$

$$= 27[x^6 + 3x^4a^2 + 3x^2a^4 + a^6] - 27[x^4 + 2x^2a^2 + a^4]2ax$$
$$+ 36a^2x^2(x^2+a^2) - 8a^3x^3$$

$$= 27x^6 + 81x^4a^2 + 81x^2a^4 + 27a^6 - 54ax(x^4 + 2x^2a^2 + a^4)$$
$$+ 36a^2x^4 + 36a^4x^2 - 8a^3x^3$$

$$= 27x^6 + 117x^4a^2 + 117a^4x^2 + 27a^6 - 54ax^5 - 108a^3x^3 - 54a^5x - 8a^3x^3$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$$

https://www.evidyarthi.in/