# अनुक्रम तथा श्रेणी

# Sequences and Series

# Chapter 8

## Exercise 8.1

**निर्देश** (प्र. सं. 1 - 8) प्रत्येक प्रश्न के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, जिनका $n$ वाँ पद दिया गया है।

**प्रश्न 1.** $a_n = n(n + 2)$

**हल** दिया है, $a_n = n(n + 2)$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = 1(1 + 2) = 3$

$n = 2$ पर, $a_2 = 2(2 + 2) = 8$

$n = 3$ पर, $a_3 = 3(3 + 2) = 15$

$n = 4$ पर, $a_4 = 4(4 + 2) = 24$

$n = 5$ पर, $a_5 = 5(5 + 2) = 35$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$

**हल** दिया है, $a_n = \frac{n}{n+1}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$n = 2$ पर, $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

$n = 3$ पर, $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$n = 4$ पर, $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

$n = 5$ पर, $a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$

**प्रश्न 3.** $a_n = 2^n$

**हल** दिया है, $a_n = 2^n$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = 2^1 = 2$

$n = 2$ पर, $a_2 = 2^2 = 4$

$n = 3$ पर, $a_3 = 2^3 = 8$

$n = 4$ पर, $a_4 = 2^4 = 16$

$n = 5$ पर, $a_5 = 2^5 = 32$

**प्रश्न 4.** $a_n = \frac{2n-3}{6}$

**हल** दिया है, $a_n = \frac{2n-3}{6}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = \frac{2\times1-3}{6} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$

$n = 2$ पर, $a_2 = \frac{2\times2-3}{6} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

$n = 3$ पर, $a_3 = \frac{2\times3-3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$n = 4$ पर, $a_4 = \frac{2\times4-3}{6} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}$

$n = 5$ पर, $a_5 = \frac{2\times5-3}{6} = \frac{10-3}{6} = \frac{7}{6}$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$

**हल** दिया है, $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $\quad a_1 = (-1)^{1-1} 5^{1+1} = (-1)^0 5^2 = 25$

$n = 2$ पर, $\quad a_2 = (-1)^{2-1} 5^{2+1} = (-1)^1 5^3 = -125$

$n = 3$ पर, $\quad a_3 = (-1)^{3-1} 5^{3+1} = (-1)^2 5^4 = 625$

$n = 4$ पर, $\quad a_4 = (-1)^{4-1} 5^{4+1} = (-1)^3 5^5 = -3125$

$n = 5$ पर, $\quad a_5 = (-1)^{5-1} 5^{5+1} = (-1)^4 5^6 = 15625$

**प्रश्न 6.** $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

**हल** दिया है, $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $\quad a_1 = \frac{1(1^2+5)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$n = 2$ पर, $\quad a_2 = \frac{2(2^2+5)}{4} = \frac{2(4+5)}{4} = \frac{9}{2}$

$n = 3$ पर, $\quad a_3 = \frac{3(3^2+5)}{4} = \frac{3(9+5)}{4} = \frac{21}{2}$

$n = 4$ पर, $\quad a_4 = \frac{4(4^2+5)}{4} = \frac{4(16+5)}{4} = 21$

$n = 5$ पर, $\quad a_5 = \frac{5(5^2+5)}{4} = \frac{5(25+5)}{4} = \frac{75}{2}$

**निर्देश** (प्र. सं. 7 - 10) प्रत्येक प्रश्न के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए। जिनका $n$वाँ पद दिया गया है।

**प्रश्न 7.** $a_n = 4n - 3$, $a_{17}$, $a_{24}$

**हल** दिया है, $a_n = 4n - 3$

$n = 17$ रखने पर, $\quad a_{17} = 4 \times 17 - 3 = 68 - 3 = 65$

$n = 24$ रखने पर, $\quad a_{24} = 4 \times 24 - 3 = 96 - 3 = 93$

**प्रश्न 8.** $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $a_7$

**हल** दिया है, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$n = 7$ रखने पर, $\quad a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 9.** $a_n = (-1)^{n-1} n^3$, $a_9$

**हल** दिया है, $a_n = (-1)^{n-1} n^3$

$n=9$ रखने पर,

$$a_9 = (-1)^{9-1} 9^3 = (-1)^8 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$$

**प्रश्न 10.** $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$, $a_{20}$

**हल** दिया है, $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$

$n=20$ रखने पर, $a_{20} = \frac{20(20-2)}{20+3}$

$$a_{20} = \frac{20 \times 18}{23} = \frac{360}{23}$$

**निर्देश** (प्र. सं. 11 - 13) प्रत्येक प्रश्न के प्रत्येक अनुक्रम के चौथ पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए।

**प्रश्न 11.** $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$ सभी $n > 1$ के लिए

**हल** दिया है, $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$, सभी $n > 1$ के लिए

$n = 2$ रखने पर, $a_2 = 3a_{2-1} + 2$

$\Rightarrow$ $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times (3) + 2 = 9 + 2 = 11$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = 3a_{3-1} + 2 = 3a_2 + 2 = 3(11) + 2 = 33 + 2 = 35$

$n = 4$ रखने पर, $a_4 = 3a_{4-1} + 2 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2 = 105 + 2 = 107$

$n = 5$ रखने पर, $a_5 = 3 \times a_{5-1} + 2 = 3a_4 + 2 = 3 \times 107 + 2 = 321 + 2 = 323$

$\therefore$ श्रेणी है, $3 + 11 + 35 + 107 + 323 \ldots$

**प्रश्न 12.** $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$

**हल** दिया है, $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

$n = 2$ रखने पर, $a_2 = \frac{a_{2-1}}{2} = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = \frac{a_{3-1}}{3} = \frac{a_2}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$

$n = 4$ रखने पर, $a_4 = \frac{a_{4-1}}{4} = \frac{a_3}{4} = \frac{-\frac{1}{6}}{4} = -\frac{1}{24}$



https://www.evidyarthi.in/

$n = 5$ रखने पर, $a_5 = \frac{a_{5-1}}{5} = \frac{a_4}{5} = \frac{-\frac{1}{24}}{5} = -\frac{1}{120}$

$\therefore$ श्रेणी है, $(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{1}{120}\right) + \ldots -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \ldots$

**प्रश्न 13.** $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

**हल** दिया है, $a_1 = a_2 = 2$

तथा $a_n = a_{n-1} - 1\ n > 2$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = a_{3-1} - 1 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$n = 4$ रखने पर, $a_4 = a_{4-1} - 1$

$= a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$n = 5$ रखने पर, $a_5 = a_{5-1} - 1 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$

$\therefore$ श्रेणी है, $2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \ldots$

**प्रश्न 14.** फाइबोनेकी (Fibonacci) अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है $1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$, तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 6$

**हल** यहाँ, $1 = a_1 = a_2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

$n = 3, 4, 5, 6$ रखने पर,

$n = 3$ पर, $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2}$

$= a_2 + a_1$

$= 1 + 1 = 2$

$n = 4$ पर, $a_4 = a_{4-1} + a_{4-2}$

$= a_3 + a_2$

$= 2 + 1 = 3$

$n = 5$ पर, $a_5 = a_{5-1} + a_{5-2}$

$= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$n = 6$ पर, $a_6 = a_{6-1} + a_{6-2}$

$= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

अब, $\frac{a_{n+1}}{a_n}, n = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए,

$n = 1$ पर, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$



https://www.evidyarthi.in/

$n = 2$ पर, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$

$n = 3$ पर, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$n = 4$ पर, $\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$

$n = 5$ पर, $\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$

अतः पद $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ तथा $\frac{8}{5}$ हैं।



https://www.evidyarthi.in/

## Exercise 8.2

**प्रश्न 1.** गुणोत्तर श्रेढ़ी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ का 20वाँ तथा $n$वाँ पद ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 1 4) गुणोत्तर श्रेढ़ी के $n$ वें पद का सूत्र $T_n = ar^{n-1}$ का प्रयोग करेंगे।

**हल** दी हुई श्रेणी है, $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

यहाँ, $a$= प्रथम पद $= \frac{5}{2}$ तथा सार्वानुपात $(r) = \frac{5/4}{5/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



https://www.evidyarthi.in/

अब, $T_n = ar^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad T_{20} = ar^{20-1} = \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2^{19}} = \frac{5}{2^{20}}$$

पुनः $$T_n = ar^{n-1} = \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{2^{1+n-1}} = \frac{5}{2^n}$$

**प्रश्न 2.** उस गुणोत्तर श्रेढ़ी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्वानुपात 2 है।

**हल** दिया है, 8वाँ पद $T_8 = 192$

तथा सार्वानुपात $r = 2$

$$\Rightarrow \quad ar^{8-1} = 192 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad a \times (2)^7 = 192$$

$$\Rightarrow \quad a \times 128 = 192$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{192}{128} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$$

अब, $$T_{12} = ar^{12-1} = \frac{3}{2} \times (2)^{11} = \frac{3}{2} \times 2^{11} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

**प्रश्न 3.** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमशः $p, q$ तथा $s$ हैं, तो दिखाइए कि $q^2 = ps$

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a$ तथा सार्वानुपात $r$ है।

$$T_5 = p \Rightarrow ar^4 = p \qquad \ldots(i)$$

$$T_8 = q \Rightarrow ar^7 = q \qquad \ldots(ii)$$

तथा $$T_{11} = s \Rightarrow ar^{10} = s \qquad \ldots(iii)$$

समी (i) तथा (iii) को गुणा करने पर,

$$ar^4 \times ar^{10} = ps$$

$$a^2 r^{14} = ps$$

$$\Rightarrow \quad [(ar)^7]^2 = ps \qquad \text{[समी (ii) से]}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = ps \qquad \text{इति सिद्धम्}$$

**प्रश्न 4.** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद – 3 है, तो 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a$ तथा सार्वानुपात $r$ है।

दिया है, $$T_4 = (T_2)^2 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad ar^3 = (ar)^2$$



https://www.evidyarthi.in/

$\Rightarrow \quad ar^3 = a^2r^2$

$\Rightarrow \quad r = a$

किंतु दिया है, $\quad a = -3$

$\Rightarrow \quad r = -3$

अब, $\quad T_7 = ar^6 = (-3)(-3)^6 = (-3)^7 = -2187$

**प्रश्न 5.** अनुक्रम का कौन-सा पद

(i) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$; 128 है? (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$; 729 है? (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$; $\frac{1}{19683}$ है?

गुणोत्तर श्रेढ़ी के $n$वें पद का सूत्र $T_n = ar^{n-1}$ का प्रयोग कर हम $n$का मान निकालेंगे।

**हल** (i) श्रेणी है, $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

यहाँ, $a = 2, r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

तथा $\quad T_n = 128$ (दिया है)

अब, $\quad T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 128 = 2(\sqrt{2})^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{n-1}{2}} = \frac{128}{2}$

$\Rightarrow \quad 2^{\frac{n-1}{2}} = 64 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

दोनों ओर 2 के घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad n = 12 + 1 \Rightarrow n = 13$

(ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$

यहाँ, $\quad a = \sqrt{3}, r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, T_n = 729$ (दिया है)

अब, $\quad T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 729 = \sqrt{3}(\sqrt{3})^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 729 = (\sqrt{3})^n \quad \Rightarrow \quad 3^{\frac{n}{2}} = 3^6$

दोनों ओर 3 के घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{n}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad n = 12$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

यहाँ, $\quad a = \frac{1}{3}, r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



https://www.evidyarthi.in/

$$T_n = \frac{1}{19683}$$ (दिया है)

अब, $T_n = ar^{n-1}$

$$\frac{1}{19683} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{6561} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$

दोनों ओर (1/3) के घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 8+1 \Rightarrow n = 9$$

**प्रश्न 6.** $x$ के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं?

हम जानते हैं कि यदि तीन संख्याएँ $a, b, c$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तब $b^2 = ac$

**हल** चूँकि $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तब

$$\Rightarrow x^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{2}{7} \times \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

**निर्देश** (प्र. सं. 7 - 10) निम्नलिखित प्रश्नों के प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पदों तक ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 7 - 10) यहाँ, हम सूत्र $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1$ या $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$ का प्रयोग कर सरल करेंगे।

**प्रश्न 7.** 0.15, 0.015, 0.0015, ..., 20 पदों तक

**हल** यहाँ, $a = 0.15$, $r = \frac{0.015}{0.15} = \frac{15}{1000} \times \frac{100}{15}$

$$r = \frac{1}{10} < 1 \text{ तथा } n = 20$$

अब, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{0.15\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0.15\left[1-\frac{1}{10^{20}}\right]}{\frac{10-1}{10}} = \frac{0.15 \times 10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{20}}\right)$$

$$= \frac{15 \times 10}{900}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right] = \frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 8.** $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ n पदों तक

**हल** यहाँ, $a = \sqrt{7}, r = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3} > 1$

$\because$ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $(\because r > 1)$

$\Rightarrow$ $S_n = \frac{\sqrt{7}\,[(\sqrt{3})^n - 1]}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{7}\,[(3^{1/2})^n - 1]}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$

$= \frac{\sqrt{7}\,(\sqrt{3} + 1)(3^{n/2} - 1)}{3 - 1}$ $[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$= \frac{\sqrt{7}}{2}(\sqrt{3} + 1)(3^{n/2} - 1)$

**प्रश्न 9.** $1 - a, a^2, -a^3 \ldots$, n पदों तक ( यदि $a \neq -1$)

**हल** यहाँ, $a = 1, r = -\frac{a}{1} = -a < 1$

$\therefore$ $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ $(\because r < 1)$

$S_n = \frac{1\{1 - (-a)^n\}}{1 - (-a)} = \frac{1 - (-a)^n}{1 + a}$

**प्रश्न 10.** $x^2, x^5, x^8, \ldots$, n पदों तक ( यदि $x \neq \pm 1$)

**हल** यहाँ, $a = x^2, r = \frac{x^5}{x^3} = x^2$

$\because$ $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ $(\because r < 1)$

$\therefore$ $S_n = \frac{x^2\,[1 - (x^2)^n]}{1 - x^2} = \frac{x^2\,(1 - x^{2n})}{1 - x^2}$

**प्रश्न 11.** मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11} (2 + 3^k)$

**हल.** $\sum_{k=1}^{11} 2 + \sum_{k=1}^{11} 3^k = 2 \times 11 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{11})$ $\left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$

$= 22 + \frac{3(3^{11} - 1)}{3 - 1} = 22 + \frac{3(3^{11} - 1)}{2}$

**प्रश्न 12.** एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है। सार्वानुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

यहाँ, हम गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}$, a, ar लेकर दी गई शर्त का प्रयोग करेंगे।



https://www.evidyarthi.in/

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी की तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}, a$ तथा $ar$ हैं।

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{39}{10}$ (i)

तथा $\left(\frac{a}{r}\right) \times (a) \times (ar) = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

समी (i) में $a = 1$ रखने पर, $\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10} \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{1} + \frac{r}{1} = \frac{39}{10}$

$\Rightarrow \frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{39}{10}$

$\Rightarrow 10 + 10r + 10r^2 = 39r$

$\Rightarrow 10r^2 + 10r - 39r + 10 = 0$

$\Rightarrow 10r^2 - 29r + 10 = 0$

अब, मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$\Rightarrow 10r^2 - 25r - 4r + 10 = 0$

$\Rightarrow 5r(2r - 5) - 2(2r - 5) = 0$

$\Rightarrow (5r - 2)(2r - 5) = 0$

$\Rightarrow 5r - 2 = 0$ तथा $2r - 5 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{2}{5}$ तथा $r = \frac{5}{2}$

जब $a = 1$ तथा $r = \frac{2}{5}$, तब संख्याएँ हैं

$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$, $a = 1$ तथा $ar = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$

जब $a = 1$ तथा $r = \frac{5}{2}$, तब संख्याएँ हैं

$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$, $a = 1$ तथा $ar = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$

**प्रश्न 13.** गुणोत्तर श्रेढ़ी $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं, ताकि उनका योगफल 120 हो जाए?

**हल** यहाँ, हम सूत्र $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$ का प्रयोग कर $n$ का मान निकालेंगे।



https://www.evidyarthi.in/

**हल** यहाँ, $a = 3, r = 3, S_n = 120$

अब, $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$

$\Rightarrow$ $$120 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$\Rightarrow$ $$120 = \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

$\Rightarrow$ $$120 \times 2 = 3(3^n - 1)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{240}{3} = 3^n - 1$$

$\Rightarrow$ $3^n - 1 = 80 \Rightarrow 3^n = 80 + 1$

$\Rightarrow$ $3^n = 81 \Rightarrow 3^n = 3^4$

दोनों ओर 3 के घातों की तुलना करने पर,

$\Rightarrow$ $n = 4$

**प्रश्न 14.** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले तीन पदों का योग 128 है, तो गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्वानुपात तथा $n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

दिया है, $$a + ar + ar^2 = 16 \quad \ldots(i)$$

तथा $$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 128 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर, $\frac{a + ar + ar^2}{ar^3 + ar^4 + ar^5} = \frac{16}{128}$

$\Rightarrow$ $$\frac{a(1 + r + r^2)}{ar^3(1 + r + r^2)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{r^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{r}\right)^3$$

दोनों ओर घात 3 के आधार की तुलना करने पर,

$\Rightarrow$ $r = 2$

$r = 2$ समी (i) में रखने पर,

$\Rightarrow$ $a + 2a + 4a = 16$

$\Rightarrow$ $7a = 16$

$\Rightarrow$ $a = \frac{16}{7}$

अब, $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\because r = 2 > 1)$$

$$= \frac{\frac{16}{7}(2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{16}{7}(2^n - 1) \quad (\because r > 1)$$



https://www.evidyarthi.in/

$\therefore$ $a = \frac{16}{7}$, $r = 2$

तथा $S_n = \frac{16}{7}(2^n - 1)$

**प्रश्न 15.** एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a = 729$ तथा 7वाँ पद 64 है, तो $S_7$ ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया है, $a = 729$, $T_7 = 64$

$\Rightarrow$ $ar^{7-1} = 64$

$\Rightarrow$ $729r^6 = 64$

$\Rightarrow$ $r^6 = \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

दोनों ओर घात 6 के आधार की तुलना करने पर,

$\Rightarrow$ $r = \frac{2}{3} < 1$

अब, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ $S_7 = \frac{729\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{729\left(1-\frac{2^7}{3^7}\right)}{\frac{1}{1}-\frac{2}{3}}$

$= \frac{729\left(\frac{1}{1}-\frac{128}{2187}\right)}{\frac{3-2}{3}} = \frac{729 \times 3}{1} \times \frac{2187-128}{2187}$

$= \frac{1}{1} \times 2059 = 2059$

**प्रश्न 16.** एक गुणोत्तर श्रेढ़ी को ज्ञात कीजिए। जिसके प्रथम दो पदों का योगफल $-4$ है तथा 5 वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

दिया है, $a + ar = -4$ ...(i)

तथा $T_5 = 4T_3$

$\Rightarrow$ $ar^{5-1} = 4ar^{3-1}$

$\Rightarrow$ $r^4 = 4r^2$

$\Rightarrow$ $r^2 = 4$

$\Rightarrow$ $r = \pm 2$



https://www.evidyarthi.in/

यदि $r = 2$, तब समी (i) से $\quad a + a(2) = -4$

$$3a = -4$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है $-\frac{4}{3}, \left(-\frac{4}{3}\right)(2), \left(-\frac{4}{3}\right)(2)^2 \ldots -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, \ldots$

यदि $r = -2$, तब समी (i) से,

$$a + a(-2) = -4$$

$$\Rightarrow \quad -a = -4$$

$$\Rightarrow \quad a = 4$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $4, 4(-2), 4(-2)^2, \ldots, 4, -8, 16, \ldots$

**प्रश्न 17.** यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 4वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमशः $x$, $y$ तथा $z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $x, y, z$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

**हल** दिया है, $\quad T_4 = x \Rightarrow ar^{4-1} = x \Rightarrow ar^3 = x \quad \ldots(i)$

$$T_{10} = y \Rightarrow ar^{10-1} = y \Rightarrow ar^9 = y \quad \ldots(ii)$$

$$T_{16} = z \Rightarrow ar^{16-1} = z \Rightarrow ar^{15} = z \quad \ldots(iii)$$

समी (i) को समी (iii) से गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \quad ar^3 \times ar^{15} = x \times z$$

$$\Rightarrow \quad a^2r^{3+15} = xz$$

$$\Rightarrow \quad a^2r^{18} = xz$$

$$\Rightarrow \quad (ar^9)^2 = xz$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = xz \quad \text{[समी (ii) से]}$$

अतः $x, y$ तथा $z$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं। इति सिद्धम्

**प्रश्न 18.** अनुक्रम 8, 88, 888, 8888,... के $n$ पदों का योग ज्ञात कीजिए।

निम्न प्रकार के प्रश्नों में (जैसे–5, 55, 555, ... तथा 7, 77, 777 ...) हम उभयनिष्ठ गुणनखंड को बाहर लेते हैं तथा इसके बाद प्रत्येक पद को 9 से गुणा तथा भाग कर गुणोत्तर श्रेढ़ी बना लेते हैं।

**हल** मान लीजिए $S = 8 + 88 + 888 + 8888 + \ldots + n$ पदों तक

$$\Rightarrow \quad S = 8(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots + n \text{ पदों तक}]$$



https://www.evidyarthi.in/

$$= \frac{8}{9}[(10 + 100 + 1000 + ... + n \text{ पदों तक}) - (1 + 1 + 1 + ... + n \text{ पदों तक})]$$

$$= \frac{8}{9}\left[10\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] \quad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right] = \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} \times (10^n - 1) - \frac{8}{9} \times n$$

$$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$$

**प्रश्न 19.** अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया हुआ अनुक्रम है, 2, 4, 8, 16, 32 ...(i)

तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ ...(ii)

सभी (i) तथा (ii) के संगत पदों को गुणा कर एक नया अनुक्रम बना लेते हैं।

256, 128, 64, 32, 16

मान लीजिए $S = 256 + 128 + 64 + 32 + 16$

यहाँ, $a = 256, r = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{ अभीष्ट योग } S = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 256 \times 2\left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \quad \left[\because S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r < 1\right]$$

$$= 512 \times \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 512\left(\frac{32 - 1}{32}\right)$$

$$= 16 \times 31 = 496$$

**प्रश्न 20.** दिखाइए कि अनुक्रम $a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$ तथा $A, AR, AR^2, ..., AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ी होती है तथा सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया हुआ अनुक्रम है, $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ ...(i)

तथा $A, AR, AR^2, ..., AR^{n-1}$ ...(ii)

सभी (i) तथा (ii) के संगत पदों को गुणा करने पर,

$$aA, arAR, ar^2AR^2, ..., ar^{n-1}AR^{n-1}$$

$$\therefore \text{ सार्वानुपात} = \frac{arAR}{aA} = rR$$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 21.** ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$

दिया है, तीसरा पद = पहला पद + 9

$$T_3 = a + 9 \Rightarrow \quad ar^2 = a + 9$$

$$ar^2 - a = 9 \qquad \ldots(i)$$

पुनः दूसरा पद = चौथा पद + 18

$$T_2 = T_4 + 18 \Rightarrow \quad ar = ar^3 + 18$$

$$\Rightarrow \quad ar - ar^3 = 18 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{ar^2 - a}{ar - ar^3} = \frac{9}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(r^2 - 1)}{ar(1 - r^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{r}\frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = -2$$

समी (ii) में $r = -2$ रखने पर,

$$a(-2) - a(-2)^3 = 18$$

$$\Rightarrow \quad -2a + 8a = 18$$

$$\Rightarrow \quad 6a = 18 \Rightarrow \quad a = 3$$

गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $3, 3(-2), 3(-2)^2, 3(-3)^3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad 3, -6, 12, -24, \ldots$$

**प्रश्न 22.** यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का $p$वाँ, $q$ वाँ तथा $r$वाँ पद क्रमशः $a, b$ तथा $c$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q} = 1$

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $A$ तथा सार्वानुपात $R$ है।

दिया है, $p$वाँ पद $= T_p = a \Rightarrow AR^{p-1} = a \qquad \ldots(i)$

$q$ वाँ पद $= T_q = b \Rightarrow AR^{q-1} = b \qquad \ldots(ii)$

$r$ वाँ पद $= T_r = c \Rightarrow AR^{r-1} = c \qquad \ldots(iii)$

अब, हमें सिद्ध करना है कि $a^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q} = 1$

बायाँ पक्ष $= A^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q}$



https://www.evidyarthi.in/

तनी (i), (ii) तथा (iii) से $a, b$ तथा $c$ का मान रखने पर,

बायाँ पक्ष $= (AR^{p-1})^{q-r} (AR^{r-1})^{p-q} (AR^{q-1})^{r-p}$

$= A^{q-r} R^{(p-1)(q-r)} A^{r-p} R^{(q-1)(r-p)} A^{p-q} R^{(r-1)(p-q)}$

$= A^{q-r+r-p+p-q} R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$= A^0 R^{pq-pr-q+r+qr-pq+r+p+pr-pq-p+q}$

$= A^0 R^0 = 1 \times 1 = 1 =$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

नोट *यहाँ पर गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद तथा सार्वानुपात क्रमशः A तथा R लेते हैं, क्योंकि a तथा r प्रश्न में दिया हुआ है।*

**प्रश्न 23.** यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम तथा $n$वाँ पद क्रमशः $a$ तथा $b$ है एवं $P$, $n$ पदों का गुणनफल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $A, AR, AR^2, AR^3, \ldots$

दिया है, पहला पद $A = a$ ...(i)

$n$वाँ पद $AR^{n-1} = b$ ...(ii)

अब, $P = n$ पदों का गुणनफल

$\Rightarrow$ $P = A \times AR^1 \times AR^2 \times AR^3 \times \ldots n$ पदों तक

$P = A^{1+1+1+\ldots n \text{ पदों तक}} R^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$

$P = A^n R^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\because \text{प्रथम } n \text{ प्राकृत संख्याओं का योग} = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$P^2 = A^{2n} R^{n(n-1)}$

$\Rightarrow$ $P^2 = A^n A^n R^{n(n-1)} = A^n (AR^{n-1})^n$

$\Rightarrow$ $P^2 = a^n b^n$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\Rightarrow$ $P^2 = (ab)^n$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 24.** दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम $n$ पदों का योगफल तथा $(n+1)$वें पद से $(2n)$वें पद तक के पदों के योगफल का अनुपात $\frac{1}{r^n}$

यहाँ, हम गुणोत्तर श्रेढ़ी को $2n$ पदों तक लेते हैं।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है

$$\underbrace{ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, \ldots, ar^{n-1}}_{n \text{ पदों तक}}, \quad \underbrace{ar^n, ar^{n+1}, \ldots, ar^{2n-1}}_{n \text{ पदों तक}}$$



https://www.evidyarthi.in/

अब, अभीष्ट अनुपात $= \dfrac{\text{प्रथम } n \text{ पदों का योग}}{(n+1)\text{वें पद से } (2n)\text{वें पदों का योग}}$

$$= \frac{\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}{\dfrac{ar^n(r^n-1)}{r-1}} = \frac{1}{r^n}$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 25.** यदि $a, b, c$ तथा $d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तो दिखाइए कि

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$$

**हल** $\because$ $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\therefore$ $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = r$ (मान लीजिए)

$\Rightarrow$ $b = ar, c = br, d = cr$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = (ar)r, d = (cr)r$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2, d = br^2$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2, d = (ar)r^2 = ar^3$ (i)

अब, हमें सिद्ध करना है कि

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$$

बायाँ पक्ष $= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= (a^2+a^2r^2+a^2r^4)(a^2r^2+a^2r^4+a^2r^6)$

$= a^2(1+r^2+r^4)\,a^2r^2(1+r^2+r^4)$

$= a^4r^2(1+r^2+r^4)^2$

$= [a^2r(1+r^2+r^4)]^2$

$= (a^2r+a^2r^3+a^2r^5)^2$

$= (a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot ar^3)^2$

$= (ab+bc+cd)^2$ [सभी (i) से]

$=$ दायाँ पक्ष

**प्रश्न 26.** ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाए।

दो दी हुई संख्याओं के बीच संख्याएँ रखने पर हम सूत्र $T_n$ का प्रयोग कर सर्वप्रथम निकालेंगे।

**हल** मान लीजिए दो संख्याएँ $a$ तथा $b$ हैं, तब $3, a, b, 81$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में होंगी।

$\because$ $n$वाँ पद $T_n = AR^{n-1}$



https://www.evidyarthi.in/

$$\therefore \quad 81 = 3R^{4-1}$$

$$\Rightarrow \quad R^3 = \frac{81}{3}$$

$$\Rightarrow \quad R^3 = 27 \Rightarrow R^3 = 3^3 \Rightarrow R = 3$$

दोनों ओर घात 3 के आधार की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad a = AR = 3 \times 3 = 9, \quad b = AR^2 = 3 \times 3^2 = 27$$

**प्रश्न 27.** $n$ का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, $a$ तथा $b$ के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

हम जानते हैं कि दो संख्याएँ $a$ तथा $b$ के बीच समांतर माध्य $\sqrt{ab}$ होता है, हम इसे दी गई गुणोत्तर माध्य के बराबर रखकर $n$ के लिए हल करेंगे। हल संबंध का प्रयोग कर इसे सरल करेंगे।

**हल** दिया है, $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+1} + b^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}) + (b^{n+1} - a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} [a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}] - b^{n+\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} = 0 \qquad \left(\because a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

दोनों ओर आधार $(a/b)$ के घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad n + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = -\frac{1}{2}$$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 28.** दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है, तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

दी हुई शर्त लेने के बाद हम योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करेंगे।

अर्थात् $\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

**हल** मान लीजिए संख्याएँ $a$ तथा $b$ हैं।

दिया है, $\quad a+b=6\sqrt{ab}$

$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{3}{1}$

अब, योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{3+1}{3-1}$

$\Rightarrow \quad \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}=\frac{4}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$

पुनः योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{2+1+2\sqrt{2}}{2+1-2\sqrt{2}}$ $\quad \left[\because \quad (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \text{ तथा } (a-b)^2=a^2+b^2-2ab\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad a:b=(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$



https://www.evidyarthi.in/

**प्रश्न 29.** यदि $A$ तथा $G$ दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमशः समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$

यदि द्विघात समीकरण के मूल दिए हुए हैं, तब द्विघात समीकरण

$x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलों का गुणनफल $= 0$

**हल** मान लीजिए संख्याएँ $\alpha$ तथा $\beta$ हैं।

दिया है, मूलों का योग, $\frac{\alpha+\beta}{2} = A$ (समांतर माध्य)

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 2A$

तथा मूलों का गुणनफल $\sqrt{\alpha\beta} = G$ (गुणोत्तर माध्य) $\Rightarrow \alpha\beta = G^2$

अब, द्विघात समीकरण जिनके मूल $\alpha$ तथा $\beta$ हैं,

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4 \times 1 \times G^2}}{2 \times 1} \quad \left(\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{2A \pm 2\sqrt{A^2 - G^2}}{2}$$

$$= A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)} \quad (\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

इति सिद्धम्

**प्रश्न 30.** यदि किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घंटे पश्चात् दोगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा $n$ वें घंटों बाद क्या होगी?

यहाँ, हम गुणोत्तर माध्य के सूत्र का प्रयोग करेंगे क्योंकि बैक्टीरिया प्रत्येक घंटे ज्यामितीय-गुणन में बढ़ती है।

**हल** कल्चर में उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का निर्माण करती है जिसका पहला पद $a = 30$ तथा सार्वानुपात $r = 2$

दूसरे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^2 = 30 \times (2)^2 = 120$ $(\because T_n = ar^{n-1})$

चौथे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^4 = 30 \times (2)^4 = 30 \times 16 = 480$

$n$वें घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^n = 30 \times 2^n = (30)\cdot(2^n)$

**प्रश्न 31.** ₹ 600 धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी, ज्ञात कीजिए?

**हल** मान लीजिए $A$ धनराशि, $P$ मूलधन, $r$ ब्याज की दर तथा $t$ समय काल वर्षों में दिया हुआ है। तब, धनराशि $A$ निम्न सूत्र से प्राप्त होता है। अर्थात्



https://www.evidyarthi.in/

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10}$$

$$= 500\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 500(1 + 0.1)^{10}$$

$$= 500 \times (1.1)^{10}$$

**प्रश्न 32.** यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 तथा 5 हैं, तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए।

यदि द्विघात समीकरण के दो मूल दिए हुए हों, तब द्विघात समीकरण होती है,

$x^2$ – (मूलों का योग) $x$ + मूलों का गुणनफल = 0

**हल** मान लीजिए द्विघात समीकरण के मूल $\alpha$ तथा $\beta$ हैं, तब

(समांतर माध्य) $\frac{\alpha + \beta}{2} = 8$ तथा (गुणोत्तर माध्य) $\sqrt{\alpha\beta} = 5$

$\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 16$ तथा $\alpha\beta = 25$

यदि द्विघात समीकरण के मूल $\alpha$ तथा $\beta$ दिए हुए हों, तब द्विघात समीकरण

$x^2$ – (मूलों का योग) $x$ + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow$ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 16x + 25 = 0$



https://www.evidyarthi.in/

# Vividh Prashnvali

**Ques 1** सभी $x, y \in N$ के लिए $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ को संतुष्ट करता हुआ $f$ एक ऐसा फलन है कि $f(1) = 3$ तथा $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, तो $n$ का मान ज्ञात कीजिए।

दिया हुआ फलन संबंध से सर्वप्रथम हम $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ इत्यादि का मान निकालेंगे तथा इन मानों को इनके योग अर्थात् 120 में रख देंगे।

**हल** दिया है $f(x + y) = f(x) f(y)$ ...(i)

सभी (i) में $x = y = 1$ रखने पर,

$$f(1 + 1) = f(1)f(1)$$

$$\Rightarrow f(2) = 3 \times 3 \quad [\because f(1) = 3]$$

$$\Rightarrow f(2) = 9$$

सभी (i) में $x = 2, y = 1$ रखने पर,

$$f(2 + 1) = f(2)f(1)$$

$$\Rightarrow f(3) = 9 \times 3 \quad [\because f(2) = 9, f(1) = 3]$$

$$\Rightarrow f(3) = 27$$

सभी (i) में $x = 3, y = 1$ रखने पर,

$$f(3 + 1) = f(3)f(1)$$

$$\Rightarrow f(4) = 27 \times 3 \quad [\because f(3) = 27]$$

$$\Rightarrow f(4) = 81$$

अब, $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$

$$\Rightarrow f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = 120$$

$$\Rightarrow 3 + 9 + 27 + \ldots + n \text{ पदों तक} = 120$$

यहाँ, $a = 3, r = \frac{9}{3} = 3$

$$\therefore \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = 120 \quad (\because r > 1)$$

$$\Rightarrow 3(3^n - 1) = 120 \times 2$$

$$\Rightarrow 3(3^n - 1) = 240$$

$$\Rightarrow 3^n - 1 = \frac{240}{3}$$

$$\Rightarrow 3^n - 1 = 80$$

$$\Rightarrow 3^n = 80 + 1$$

दोनों ओर 3 की घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow 3^n = 81$$

$$\Rightarrow 3^n = 3^4 \Rightarrow n = 4$$



https://www.evidyarthi.in/

**Ques 2** गुणोत्तर श्रेढ़ी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्वानुपात क्रमशः 5 तथा 2 है। अंतिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी के $n$ पद है। $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$

दिया है, $a = 5, r = 2$ तथा $S_n = 315$

$$\therefore \quad 315 = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow \frac{315}{5} = 2^n - 1 \qquad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2^n - 1 = 63 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 63 + 1 \Rightarrow 2^n = 64$$

दोनों ओर 2 की घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad 2^n = 2^6 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

पुनः अंतिम पद के लिए,

$$T_n = ar^{n-1} = 5 \times (2)^{6-1} = 5 \times 2^5 = 5 \times 32 = 160$$

**Ques 3** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो, तो गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है,

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

दिया है, $a = 1$ तथा $T_3 + T_5 = 90$

$$\therefore \quad ar^2 + ar^4 = 90 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + r^4 = 90 \qquad (\because a = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r^4 + r^2 - 90 = 0$$

अब, मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad r^4 + 10r^2 - 9r^2 - 90 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2(r^2 + 10) - 9(r^2 + 10) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0$$

$$\because \quad r^2 + 10 \neq 0 \Rightarrow r^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

**Ques 4** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाएँ, तो हमें एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ, $a, ar, ar^2$ हैं।

दिया है, $a + ar + ar^2 = 56$ ...(i)

पुनः $a - 1, ar - 7, ar^2 - 21$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$$\Rightarrow \quad 2(ar - 7) = (a - 1) + (ar^2 - 21) \qquad (\because \text{यदि } a, b, c \text{ समांतर श्रेढ़ी में हो, तब } 2b = a + c)$$

$$\Rightarrow \quad 2ar - 14 = a + ar^2 - 22$$



https://www.evidyarthi.in/

$\Rightarrow \quad a + ar^2 - 2ar = -14 + 22$

$\Rightarrow \quad a + ar^2 - 2ar = 8 \qquad \text{(ii)}$

सभी (i) को सभी (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{a + ar + ar^2}{a + ar^2 - 2ar} = \frac{56}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + r + r^2}{1 + r^2 - 2r} = \frac{7}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + r + r^2 = 7 + 7r^2 - 14r$$

$$\Rightarrow \quad 6r^2 - 15r + 6 = 0$$

3 से भाग देने पर,

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

अब मध्य पद विभक्त कर गुणखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - (4 + 1)r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - 4r - r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2r(r - 2) - (r - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r - 2)(2r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 2, \frac{1}{2}$$

यदि $r = 2$, तब सभी (i) से,

$$a + 2a + 4a = 56$$

$$\Rightarrow \quad 7a = 56$$

$$a = 8$$

तब संख्याएँ हैं,

$$a = 8$$

$$ar = 8 \times 2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad ar^2 = 8 \times 4 = 32$$

8, 16, 32

यदि $r = \frac{1}{2}$, तब सभी (i) से, $\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = 56$

$$\frac{4a + 2a + 1}{4} = 56$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7a}{4} = 56$$

$$\Rightarrow \quad a = 32$$

तब संख्याएँ हैं,

$$a = 32$$



https://www.evidyarthi.in/

$$ar = 32 \times \frac{1}{2} = 16$$

या $$ar^2 = 32 \times \frac{1}{4} = 8$$

अतः $$32, 16, 8$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ हैं, 8, 16, 32 या 32, 16, 8

**Ques 5** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान पर रखे पदों के योगफल का 5 गुना है, तो सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots ar^{2n-2}, ar^{2n-1}$

जहाँ $a, ar^2, ar^4, ar^6, \ldots$ विषम स्थान पर रखे हैं तथा $ar, ar^3, ar^5, ar^7, \ldots$ सम स्थान पर रखे हैं।

दिया है, सभी पदों का योग = 5 × विषम स्थान पर रखे पदों का योगफल

अर्थात् $$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{2n-1}$$

$$= 5 \times (a + ar^2 + ar^4 + \ldots + ar^{2n-2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{5a[(r^2)^n - 1]}{r^2 - 1} \qquad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^{2n} - 1}{r - 1} = \frac{5(r^{2n} - 1)}{(r - 1)(r + 1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{5}{r + 1} \Rightarrow r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4$$

> **नोट** *विद्यार्थी को ध्यान देना चाहिए कि यदि गुणोत्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या $2n$ है अर्थात् सम है, तब इनमें $n$ विषम पद तथा $n$ सम पद होंगे।*



https://www.evidyarthi.in/

**Ques 6** यदि $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$ $(x\neq 0)$ हो, तो दिखाइए कि $a, b, c$ तथा $d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

यहाँ, हम योगांतर विधि का प्रयोग करेंगे

अर्थात् $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

**हल** दिया है, $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$

योगांतर विधि का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a+bx+a-bx}{a+bx-(a-bx)}=\frac{b+cx+b-cx}{b+cx-(b-cx)}=\frac{c+dx+c-dx}{c+dx-(c-dx)}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{2bx}=\frac{2b}{2cx}=\frac{2c}{2dx}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bx}=\frac{b}{cx}=\frac{c}{dx}$$

प्रत्येक पद को $x$ से गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

इसलिए, $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

**Ques 7** किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी में $S$, $n$ पदों का योग, $P$ उनका गुणनफल तथा $R$ उनके व्युत्क्रमों का योग हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2R^n = S^n$

**हल** मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$

दिया है, $S = n$ पदों का योग $= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (\text{यदि } r > 1) \qquad \ldots(i)$$



https://www.evidyarthi.in/

तथा $n$ पदों के व्युत्क्रमों का योग

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \ldots + \frac{1}{ar^{n-1}} \left(\frac{1}{r} < 1\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{r^n}\right] \times \frac{1}{\frac{r-1}{r}}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{r^n - 1}{r^n}\right] \times \frac{r}{r-1}$$

$$\Rightarrow \qquad R = \frac{(r^n - 1)r}{ar^n(r-1)} \qquad \ldots(ii)$$

तथा $P = n$ पदों का गुणनफल $= a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \ldots \times ar^{n-1}$

$= a^{1+1+1+\ldots+n \text{ पदों तक}} r^{1+2+3+\ldots+(n-1) \text{ पदों तक}}$

$$= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad \left[\because \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad P^2 = a^{2n} r^{n(n-1)} \qquad \ldots(iii)$$

अब, हमें सिद्ध करना है, $P^2R^n = S^n$

या $\qquad P^2 = \frac{S^n}{R^n}$ या $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$

दायाँ पक्ष $= \left(\frac{S}{R}\right)^n = \left[\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \times \frac{ar^n(r-1)}{(r^n - 1)r}\right]^n$ [समी (i) तथा (ii) से]

$= [a^2 r^n r^{-1}]^n = [a^2 r^{n-1}]^n = [a^{2n} r^{n(n-1)}]$

$= P^2$ = बायाँ पक्ष [समी (iii) से]

इति सिद्धम्

**नोट** *विद्यार्थियों को ध्यान देना चाहिए कि यदि S में $r < 1$ लेते हैं, तब R में $r > 1$ लेंगे।*



https://www.evidyarthi.in/

**Ques 8** यदि $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

हम जानते हैं कि यदि तीन संख्याएँ $a, b, c$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तब $b^2 = ac$

इस परिणाम का प्रयोग कर सत्यापित करेंगे।

**हल** $\because$ $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2, d = ar^3$ ...(i)

अब, हमें सिद्ध करना है $a^n + b^n, b^n + c^n, c^n + d^n$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

$\Rightarrow$ $(b^n + c^n)^2 = (a^n + b^n)(c^n + d^n)$

दायाँ पक्ष $= (a^n + b^n)(c^n + d^n)$

$= (a^n + a^n r^n) \times (a^n r^{2n} + a^n r^{3n})$ [समी (i) से]

$= a^n(1 + r^n) a^n r^{2n}(1 + r^n)$

$= a^{2n} r^{2n} (1 + r^n)^2 = [a^n r^n (1 + r^n)]^2 = (a^n r^n + a^n r^{2n})^2$

$= [(ar)^n + (ar^2)^n]^2 = (b^n + c^n)^2$ [समी (i) से]

$=$ बायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

**Ques 9** यदि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल $a$ तथा $b$ हैं तथा $x^2 - 12x + q = 0$, के मूल $c$ तथा $d$ हैं, जहाँ $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में हैं। सिद्ध कीजिए कि $(q + p) : (q - p) = 17 : 15$

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\alpha$ तथा $\beta$ हैं।

तब, मूलों का योग $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

**हल** दिया है, समीकरण $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल $a$ तथा $b$ हैं।

$\therefore$ मूलों का योग, $a + b = -\frac{(-3)}{1} = 3$

$\Rightarrow$ $a + b = 3$ ...(i)

तथा मूलों का गुणनफल, $ab = p$ ...(ii)

पुनः दिया है, समीकरण $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल $c$ तथा $d$ हैं।

मूलों का योग, $c + d = -\frac{(-12)}{1} = 12$

$\Rightarrow$ $c + d = 12$ ...(iii)

तथा मूलों का गुणनफल, $cd = q$ ...(iv)

पुनः यह दिया हुआ है कि $a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2$ तथा $d = ar^3$



https://www.evidyarthi.in/

इन मानों को समी (i) तथा (ii) में रखकर समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{a+ar}{ar^3+ar^5}=\frac{3}{12} \Rightarrow \frac{a(1+r)}{ar^3(1+r)}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad r^2=4$$

$$\Rightarrow \quad r=\pm 2$$

पुनः समी (i) से,

$$a+ar=3 \Rightarrow a+2a=3 \qquad (\because r=2)$$

$$\Rightarrow \quad 3a=3 \Rightarrow a=1$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है

$$a=1, \quad b=ar=1\times 2=2, \quad c=ar^2=1\times 2^2=4, \quad d=ar^3=1\times 2^3=8$$

समी (ii) से, $p=ab=1\times 2=2$

समी (iv) से, $q=cd=4\times 8=32$

$$\therefore \quad \frac{q+p}{q-p}=\frac{32+2}{32-2}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$$

अतः $(q+p):(q-p)=17:15$

पुनः समी (i) से, $a+ar=3 \qquad (\because r=-2)$

$$\Rightarrow \quad a-2a=3 \Rightarrow a=-3$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है $a=-3, \quad b=ar=(-3)(-2)=6$

$$c=ar^2=(-3)(-2)^2=-12$$

$$d=ar^3=(-3)(-2)^3=24$$

समी (ii) से, $p=ab=(-3)\cdot(+6)=-18$

समी (iv) से, $q=cd=(-12)(24)=-288$

$$\therefore \quad \frac{q+p}{q-p}=\frac{-288-18}{-288+18}=\frac{-306}{-270}=\frac{17}{15}$$

अतः $(q+p):(q-p)=17:15$

**Ques 10** दो धनात्मक संख्याओं $a$ तथा $b$ के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का अनुपात $m:n$ है। दर्शाइए कि $a:b=(m+\sqrt{m^2-n^2}):(m-\sqrt{m^2-n^2})$

**हल** मान लीजिए संख्याएँ $a$ तथा $b$ के बीच समांतर माध्य $A$ है तथा $a$ तथा $b$ के बीच गुणोत्तर माध्य $G$ है।

तब, $A=\frac{a+b}{2}$ तथा $G=\sqrt{ab}$

दिया है, $A:G=m:n$



https://www.evidyarthi.in/

अर्थात्  $\frac{A}{G} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$

योगांतर विधि का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n} \Rightarrow \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{m+n}{m-n} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$$

पुनः योगांतर विधि का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

दोनों ओर का वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n})^2}{(\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n})^2} \quad \left[\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,\ (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab\right]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m+n+m-n+2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}{m+n+m-n-2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2m+2\sqrt{m^2-n^2}}{2m-2\sqrt{m^2-n^2}} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$\Rightarrow a : b = (m+\sqrt{m^2-n^2}) : (m-\sqrt{m^2-n^2})$$ इति सिद्धम्



https://www.evidyarthi.in/

**Ques 11**

निम्नलिखित श्रेणियों के $n$ पदों का योग ज्ञात कीजिए।

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots$

इस प्रकार के प्रश्नों में (जैसे–a, aa, aaa,....) हमेशा उभयनिष्ठ गुणनखंड बाहर लेकर गुणोत्तर श्रेढ़ी में बनाने के लिए प्रत्येक पद को 9 से गुणा तथा भाग करते हैं।

**हल** (i) मान लीजिए $S = 5 + 55 + 555 + \ldots + n$ पदों तक

$= 5(1 + 11 + 111 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}[(10 + 100 + 1000 + \ldots + n$ पदों तक)

$- (1 + 1 + 1 + \ldots + n$ पदों तक)]

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$ $\left[\because \text{गुणोत्तर श्रेढ़ी का योग} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$ $(\because \Sigma 1 = n)$

(ii) मान लीजिए $S = 0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots + n$ पदों तक

$S = 6(0.1 + 0.11 + 0.111 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{6}{9}(0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} + \ldots + n$ पदों तक$\right)$

$= \frac{2}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{100}\right) + \left(1 - \frac{1}{1000}\right) + \ldots + n$ पदों तक$\right]$



https://www.evidyarthi.in/

$$= \frac{2}{3}\left[(1+1+1+\ldots+n \text{ पदों तक}) - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+n \text{ पदों तक}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}\right] \qquad \left[\because \text{गुणोत्तर श्रेढ़ी का योग} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r<1\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{\frac{9}{10}}\right] = \frac{2}{3}\left[n - \frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\right]$$

**Ques 12** श्रेणी का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए

$$2\times4+4\times6+6\times8+\ldots+n \text{ पदों तक}$$

**हल** दी हुई श्रेणी है, $2\times4+4\times6+6\times8+\ldots+n$ पदों तक

यहाँ, हम दी हुई श्रेणी को दो भागों में विभक्त करते हैं जो 2, 4, 6,... तथा 4, 6, 8, .. हैं। दी हुई श्रेणी का $n$वाँ पद निकालने के लिए प्रत्येक भाग का $n$वाँ पद अलग-अलग निकालते हैं।

$T_n$ = (2, 4, 6 ... का $n$वाँ पद) × (4, 6, 8, ... का $n$वाँ पद)

$= [2+(n-1)2][4+(n-1)2]$ $\qquad [\because T_n = a+(n-1)d]$

$= (2+2n-2)(4+2n-2) = 2n(2n+2)$

$n = 20$ रखने पर, $T_{20} = 2\times20(2\times20+2) = 40(40+2) = 40\times42 = 1680$



https://www.evidyarthi.in/

**Ques 13।** कोई किसान एक पुराने ट्रैक्टर को ₹ 12000 में खरीदता है। वह ₹ 6000 का नकद भुगतान करता है और शेष राशि को ₹ 500 की वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 12% वार्षिक ब्याज भी देता है। किसान को ट्रैक्टर की कुल कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

यहाँ, हम प्रत्येक वर्ष सरल ब्याज का मान निम्न सूत्र

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

द्वारा निकालेंगे तथा इसके बाद हम ट्रैक्टर की कुल लागत सभी को जोड़कर निकालेंगे।

**हल** ट्रैक्टर की कीमत = ₹ 12000

नकद भुगतान = ₹ 6000

शेष राशि = ₹ 6000

पहली किस्त पर ब्याज = $\frac{6000 \times 12 \times 1}{100}$ $\left(\because I = \frac{P \times R \times T}{100}\right)$

= ₹ 720

अब, भुगतान न की गई राशि = 6000 − 500 = ₹ 5500

दूसरी किस्त पर ब्याज = $\frac{5500 \times 12 \times 1}{100}$ = ₹ 660

पुनः भुगतान न की गई राशि = 5500 − 500 = ₹ 5000

तीसरी किस्त पर ब्याज = $\frac{5000 \times 12 \times 1}{100}$ = ₹ 600

किसान द्वारा भुगतान किया गया कुल ब्याज = 720 + 660 + 600 + ... 12 पदों तक

जो समांतर श्रेढ़ी में है तथा $a$ = 720, $d$ = 660 − 720 = − 60

इसलिए, कुल ब्याज = $\frac{12}{2}[2 \times 720 + (12 - 1)(-60)]$

= 6 (1440 − 11 × 60) = 6 (1440 − 660) = 6 × 780 = ₹ 4680

अतः कुल राशि या वास्तविक राशि = 12000 + 4680 = ₹ 16680

**Ques 14** रामप्रसाद अली ₹ 22000 में एक स्कूटर खरीदता है। वह ₹ 4000 नकद देता है तथा शेष राशि को ₹ 1000 वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। उसे स्कूटर के लिए कितनी राशि चुकानी पड़ेगी?



https://www.evidyarthi.in/

हल स्कूटर की कीमत = ₹ 22000

नकद भुगतान = ₹ 4000, शेष भुगतान = ₹ 18000

अब, पहली किस्त पर ब्याज = $\frac{18000 \times 10 \times 1}{100}$ = ₹ 1800 $\left(\because I = \frac{P \times R \times T}{100}\right)$

भुगतान न की गई राशि = 18000 − 1000 = 17000

दूसरी किस्त पर ब्याज = $\frac{17000 \times 10 \times 1}{100}$ = ₹ 1700

भुगतान न की गई राशि = 17000 − 1000 = 16000

तीसरी किस्त पर ब्याज = $\frac{16000 \times 10 \times 1}{100}$ = ₹ 1600

.....

.....

∴ रामलाल द्वारा भुगतान किया गया कुल ब्याज = 1800 + 1700 + 1600 + ... + 18 पदों तक

जो एक समांतर श्रेढ़ी में है तथा $a = 1800, d = 1700 - 1800 = -100$

इसलिए कुल ब्याज = $\frac{18}{2}[2 \times 1800 + (18 - 1)(-100)]$

$\left[\because \text{समांतर श्रेढ़ी का योग} = S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)\right]$

$= 9(3600 - 1700) = 9 \times 1900 = 17100$

अतः कुल राशि या वास्तविक राशि = 22000 + 17100 = ₹ 39100

**Ques 15** एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने पर निर्देश देता है तथा उनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस शृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि शृंखला न टूटे, तो 8वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है।

हल सर्वप्रथम एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को चार पत्र भेजता है, तब उन चार व्यक्तियों द्वारा जो दूसरे व्यक्ति को प्रत्येक चार-चार पत्र भेजते हैं अर्थात् कुल 4×4 = 16 पत्र भेजते हैं।

इसी प्रकार, अगले चरण में, 4 × 4 × 4 = 64 पत्र भेजे जाते हैं।

इस प्रकार, एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बनेगी।

अर्थात् 4, 16, 64, 256, ...

जहाँ, $a = 4$ तथा $r = 4$

अब, 8वें पत्रों के समूह तक कुल संख्या

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{4(4^8 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{4}{3}(4^8 - 1) \quad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, r > 1\right]$$

एक पत्र का डाक खर्च = ₹ 0.50



https://www.evidyarthi.in/

अतः कुल खर्च $= \frac{4}{3}(4^8 - 1) \times 0.50 = \frac{4}{3} \times (65536 - 1) \times 0.50$

$= \frac{4}{3} \times 65535 \times 0.50 = ₹ 43690$

**Ques 16**

एक आदमी ने एक बैंक में ₹ 10000, 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर जमा किया। जब से रकम बैंक में जमा की गई तब से, 15वें वर्ष में उसके खाते में कितनी रकम हो गई तथा 20 वर्षों बाद कुल कितनी रकम हो गई, ज्ञात कीजिए?

हल 1 वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 1}{100}$ $\left(\because I = \frac{P \times R \times T}{100}\right)$

$= ₹ 500$

एक वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 500 = 10500$

अब, दो वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 2}{100} = ₹ 1000$

2 वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 1000 = ₹ 11000$

इसी प्रकार, तीन वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 3}{100} = 1500$

∴ तीन वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 1500 = ₹ 11500$

अतः आदमी के खाते में पहले, दूसरे तथा तीसरे वर्ष बचत की राशि क्रमशः ₹ 10000, 10500, 11000, ... हैं।

यह समांतर श्रेढ़ी में है जहाँ, $a = 10000$ तथा $d = 500$

15 वर्ष में जमा की गई राशि $= T_{15} = a + 14d = 10000 + 14 \times 500$

$= 10000 + 7000 = ₹ 17000$

20 वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 20 \times 500$

$= 10000 + 10000 = ₹ 20000$

**Ques 17**

एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका मूल्य ₹ 15625 है, हर वर्ष 20% की दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।

यदि किसी मशीन की कीमत $P$ है जो $r\%$ की दर से प्रतिवर्ष घट जाती है, तब $n$ वर्षों बाद मशीन की कीमत का सूत्र निम्न है अर्थात्

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

हल यहाँ, श्रेणी है $15625\left(1 - \frac{20}{100}\right), 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^2, 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^3, \ldots$

5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य $= T_5 = 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^5 = 15625 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^5$



https://www.evidyarthi.in/

$$= 15625 \times \left(\frac{5-1}{5}\right)^5$$

$$= 15625 \times \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= \frac{15625 \times 1024}{625 \times 5}$$

$$= \frac{25 \times 1024}{5} = 5 \times 1024$$

$$= 5120$$

**नोट** *ह्रास में, प्रत्येक वर्ष मूल्य का मान घटता है।*

**Ques 18** किसी कार्य को कुछ दिनों में पूरा करने के लिए 150 कर्मचारी लगाए गए। दूसरे दिन 4 कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया, तीसरे दिन 4 और कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया तथा इस प्रकार अन्य। अब कार्य पूर्ण करने में 8 दिन अधिक लगते हैं, तो दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें कार्य पूर्ण किया गया।

**हल** मान लीजिए दिनों की संख्या जिनमें कार्य पूर्ण किया जाता है $n$ है। अब प्रश्नानुसार, प्रत्येक दिन चार कर्मचारी कार्य छोड़ देते हैं अर्थात् कर्मचारियों की संख्या निम्न प्रकार है, 150, 146, 142, 138, ... स्पष्ट रूप से, दोनों स्थितियों में कार्य करना समान है।

[यदि कोई कर्मचारी कार्य नहीं छोड़ता है, तब प्रत्येक दिन 150 कर्मचारियों द्वारा $(n-8)$ दिनों में कार्य पूर्ण होगा। अतः कर्मचारियों की कुल संख्या $150(n-8)$ होगी जिन्होंने $n$ दिनों तक कार्य किया होगा।]

$$\Rightarrow \quad 150(n-8) = \frac{n}{2}[2 \times 150 + (n-1)(-4)] \qquad \left[\text{चूंकि } S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \text{ से}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 150n - 1200 = \frac{n}{2} \times 2(150 - 2n + 2)$$

$$\Rightarrow \quad 150n - 1200 = \frac{n}{2} \times 2(152 - 2n)$$

प्रत्येक पद को 2 से भाग करने पर,

$$75n - 600 = n(76 - n) \Rightarrow 75n - 600 = 76n - n^2$$

$$n^2 - 76n + 75n - 600 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 600 = 0$$

मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad n^2 - (25n - 24n) - 600 = 0 \Rightarrow n^2 - 25n + 24n - 600 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n(n-25) + 24(n-25) = 0 \Rightarrow (n-25)(n+24) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 25$$

तथा $\quad n \neq -24$ क्योंकि यह संभव नहीं है।

अतः 25 दिनों में कार्य पूर्ण होगा।



https://www.evidyarthi.in/