अध्याय 9

सरल रेखाएँ

Straight Lines

Exercise 9.1

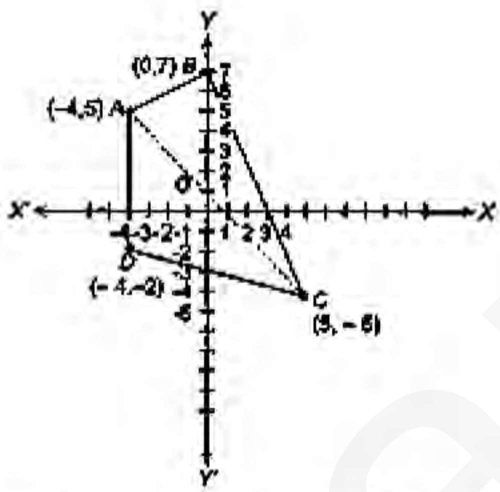
प्रश्न 1. कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) और (– 4, – 2) हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

(i) यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ एक त्रिभुज के शीर्ष हैं, तब

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]|$

(ii) चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta ADC$ का क्षेत्रफल

हल दिए गए शीर्ष $A(-4, 5)$, $B(0, 7)$, $C(5, -5)$ तथा $D(-4, -2)$ नीचे X-Y तल में दर्शाए गए हैं। सभी शीर्षों को मिलाने पर एक चतुर्भुज $ABCD$ निरूपित होता है।



चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = $\Delta\, ADC$ का क्षेत्रफल + $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल ...(i)

अब, ΔADC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|[-4(-2+5)-4(-5-5)+5(5+2)]|$

$$\left[\because \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]\right]$$

यहाँ, $(x_1, y_1) = (-4, 5)$, $(x_2, y_2) = (-4, -2)$, $(x_3, y_3) = (5, -5)$

$$= \frac{1}{2}|[-4\times 3-4(-10)+5\times 7]|$$

$$= \frac{1}{2}|[-12+40+35]| = \frac{1}{2}|[75-12]| = \frac{63}{2}$$

$\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|[-4(7+5)+0(-5-5)+5(5-7)]|$

[यहाँ, $(x_1, y_1) = (-4, 5)$, $(x_2, y_2) = (0, 7)$ तथा $(x_3, y_3) = (5, -5)$]

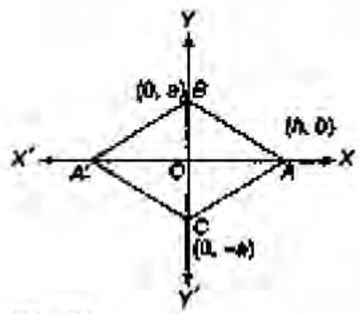
$$= \frac{1}{2}|[-4\times 12+0\times(-10)+5(-2)]| = \frac{1}{2}|-48-10| = \frac{|-58|}{2} = 29$$

$\therefore$ समी (i) से, चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{63}{2}+29 = \frac{63+58}{2} = \frac{121}{2}$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2. **$2a$ भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार Y-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य-बिंदु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।**

जैसे कि त्रिभुज की एक भुजा Y-अक्ष पर है, अतः तीसरी भुजा Y-अक्ष के बाईं या दाईं ओर होगी।

हल माना BC त्रिभुज का आधार है जो Y-अक्ष पर स्थित है तथा तीसरा शीर्ष $A(h, 0)$ या $A'(-h, 0)$ हो सकता है।



चूँकि ΔABC समबाहु है, तब $AB = BC$

$$AB^2 = BC^2$$

$\Rightarrow$ $$(h-0)^2 + (0-a)^2 = (2a)^2$$

बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी $= \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

AB दूरी के लिए, $(x_1, y_1) = (a, 0), (x_2, y_2) = (0, a)$

$\Rightarrow$ $h^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{3}a$ (वर्गमूल लेने पर)

अत; त्रिभुज के शीर्ष $(\sqrt{3}a, 0), (0, a), (0, -a)$

या $(-\sqrt{3}a, 0), (0, a), (0, -a)$ हैं।

प्रश्न 3. $P(x_1, y_1)$ **और** $Q(x_2, y_2)$ **के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब**

(i) PQ, **Y-अक्ष के समांतर है।**

(ii) PQ, **X-अक्ष के समांतर है।**

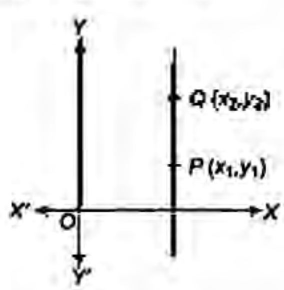
हल (i) जब PQ, Y-अक्ष के समांतर है इसका अर्थ है, कि P तथा Q बिंदुओं का X-निर्देशांक समान है अर्थात् $x_1 = x_2$

$\therefore$ बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा बिंदु $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\because x_1 = x_2)$$

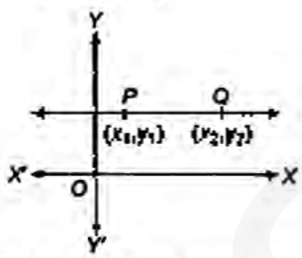
$$= \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$



(ii) जब PQ, X-अक्ष के समांतर है, इसका अर्थ है कि P तथा Q बिंदुओं का Y-निर्देशांक समान है अर्थात् $y_1 = y_2$

$\therefore$ बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा बिंदु $Q(x_2\ y_2)$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} \quad (\because y_1 = y_2)$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$



प्रश्न 4. X-अक्ष पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जो (7, 6) और (3, 4) बिंदुओं से समान दूरी पर है।

हल माना x-अक्ष पर किसी बिंदु P के निर्देशांक $(x, 0)$ है, चूँकि X-अक्ष पर Y-निर्देशांक शून्य होता है तथा दिए गए बिंदु $A(7, 6)$ तथा $B(3, 4)$ हैं।

दिया है, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$

जहाँ, $x_1 = x,\ x_2 = 7,\ y_1 = 0,\ y_2 = 6,\ x_3 = 3,\ y_3 = 4$

$\Rightarrow \quad (x - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (x - 3)^2 + (0 - 4)^2$

दो बिंदुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$\Rightarrow \quad x^2 + 49 - 14x + 36 = x^2 + 9 - 6x + 16$

$\Rightarrow \quad -14x + 6x = 25 - 36 - 49$

$\Rightarrow \quad -8x = 25 - 85 \Rightarrow -8x = -60$

$\Rightarrow \quad x = \frac{60}{8} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$

$\therefore$ x-अक्ष पर बिंदु $P = \left(\frac{15}{2}, 0\right)$

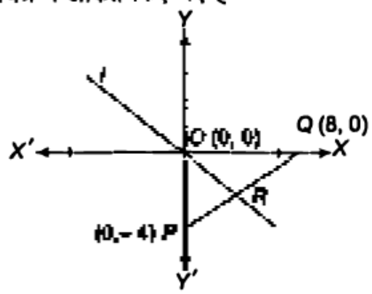
प्रश्न 5. रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए जो मूलबिंदु और $P(0, -4)$ तथा $B(8, 0)$ बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु से जाती है।

यदि दो बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं, तब प्रवणता, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

हल दिए गए बिंदु $P(0, -4)$ तथा $Q(8, 0)$ हैं।

$\therefore \quad x_1 = 0,\ y_1 = -4,\ x_2 = 8,\ y_2 = 0$

ये बिंदु X-Y तल में नीचे चित्र में अंकित किए गए है



PQ का मध्य-बिंदु है

$$R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2}\right) = (4, -2)$$

$\therefore$ OR की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2-0}{4-0} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \left(\because \begin{matrix} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = 4, y_2 = -2 \end{matrix}\right)$

प्रश्न 6. पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिंदु दिखलाइए कि बिंदु (4, 4), (3, 5) और (– 1, – 1) त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(i) जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(ii) दो रेखाएँ लंबवत् होती हैं, यदि $m_1 \times m_2 = -1$

हल माना दिए गए बिंदु $A(4, 4)$, $B(3, 5)$ तथा $C(-1, -1)$ हैं।

यहाँ $(x_1, y_1) \to A(4, 4), (x_2, y_2) \to B(3, 5), (x_3, y_3) \to C(-1, -1)$

अब, $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}[4(5+1) - 4(3+1) + 1(-3+5)]$

$$= \frac{1}{2}[24 - 16 + 2] = \frac{10}{2} = 5 \neq 0$$

अत: A, B तथा C त्रिभुज के शीर्ष हैं।

AB की प्रवणता, $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-4}{3-4} = \dfrac{1}{-1} = -1$ $\quad \left(\because \text{प्रवणता} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

BC की प्रवणता, $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{-1-5}{-1-3} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

CA की प्रवणता, $m_3 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{-1-4}{-1-4} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

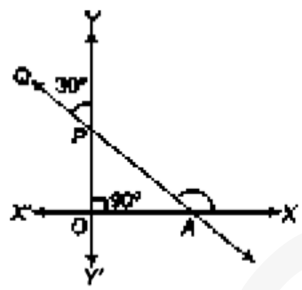
$\because$ AB की प्रवणता $\times$ CA की प्रवणता $= (-1) \times 1 = (-1)$

$\therefore$ ΔABC, A पर एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त मापा गया $30°$ का कोण बनाती है।

हल दिया है, $\angle YPQ = 30°$

ज्ञात करना है, $\angle PAX = ?$



यहाँ, $\angle YPQ = \angle OPA$ (ऊर्ध्वाधर विपरीत कोण)

$\because$ $\angle OPA + \angle POA + \angle PAO = 180°$

($\because$ त्रिभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग 180° होता है।)

$\Rightarrow$ $30° + 90° + \angle PAO = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle PAO = 180° - 120° = 60°$

$\Rightarrow$ $\angle PAX = 180° - 60° = 120°$

$\therefore$ रेखा AQ की प्रवणता $= m = \tan 120°$ $(\because m = \tan\theta)$

$= \tan(180° - 60°)$ $[\because \tan(180° - \theta) = -\tan\theta]$

$= -\tan 60° = -\sqrt{3}$

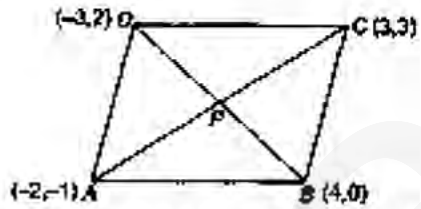
Ques 8 दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिंदु (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) और (– 3, 2) समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

अवधारणा का प्रयोग करेंगे कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हल माना $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है जिसके शीर्ष

$$(x_1, y_1) \to A(-2,-1), (x_2, y_2) \to B(4, 0), (x_3, y_3) \to C(3, 3)$$

तथा $(x_4, y_4) \to (-3, 2)$ हैं।



AC का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$\left[\because \text{ दो बिंदुओं का मध्य-बिंदु } = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)\right]$

BD का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right) = \left(\frac{4-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$\because$ AC का मध्य-बिंदु = BD का मध्य-बिंदु

$\therefore$ $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। इति सिद्धम्

Ques 9 X-अक्ष और (3, – 1) और (4, – 2) बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब उनको मिलाने वाली रेखा का X-अक्ष से कोण ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र प्रयोग करते हैं, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$

हल दिया है, $(x_1, y_1) = (3, -1)$ और $(x_2, y_2) = (4, -2)$

रेखा की प्रवणाता, $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2+1}{4-3}$

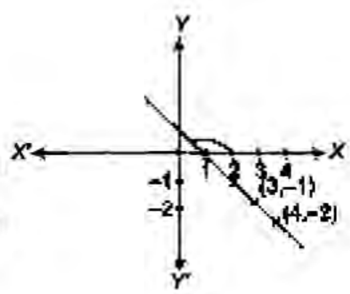
$$\tan\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \tan\theta = -1$$

$\Rightarrow \tan\theta = -\tan 45^\circ \quad (\because 1 = \tan 45^\circ)$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(180^\circ - 45^\circ)$

$[\because \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta]$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 135^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ$



Ques 10

एक रेखा का ढाल, दूसरी रेखा के ढाल का दोगुना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है, तो रेखाओं का ढाल ज्ञात कीजिए।

यदि m_1 तथा m_2 रेखाओं की प्रवणताएँ हैं, तब दोनों रेखाओं के मध्य कोण की स्पर्शज्या $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ होती है।

हल माना पहली रेखा की प्रवणता m है, तब प्रश्नानुसार, दूसरी रेखा की प्रवणता $2m$ होगी। दिया है कि, दोनों रेखाओं के मध्य कोण की स्पर्शज्या $\tan\theta = \frac{1}{3}$ है।

$$\therefore \quad \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left|\frac{m - 2m}{1 + m \times 2m}\right| \Rightarrow \frac{1}{3} = \left|\frac{-m}{1 + 2m^2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad (1 + 2m^2) = 3m \Rightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0$$

उपरोक्त समीकरण का गुणनखंड विधि द्वारा, मध्य-पद को तोड़ने पर,

$$\Rightarrow \quad 2m^2 - 2m - m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2m(m-1) - 1(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2m-1)(m-1) = 0$$

$\Rightarrow \quad 2m - 1 = 0$ या $m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, m = 1$

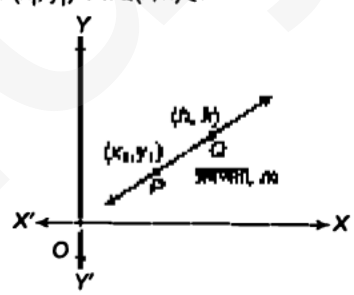
Ques 11

एक रेखा (x_1, y_1) और (h, k) से जाती है। यदि रेखा का ढाल m है, तो दिखाइए कि

$$k - y_1 = m(h - x_1)$$

यदि दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब उन बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ होती है। इस अवधारणा का प्रयोग करके सरल करेंगे।

हल माना दिए गए बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(h, k)$ हैं।



तब, प्रवणता, $m = \frac{k - y_1}{h - x_1}$ $\quad \left(\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

हम जानते हैं कि यदि एक बिंदु तथा प्रवणता ज्ञात हो, तब रेखा की समीकरण निम्न होती है

$$k - y_1 = m(h - x_1)$$

Exercise 9.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 8) रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है

एक सरल रेखा को अद्वितीय रूप से ज्ञात करते हैं, यदि

(i) ये एक दी हुई प्रवणता के साथ एक दिए हुए बिंदु से होकर गुजरती है अर्थात्

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(ii) ये दो बिंदुओं से होकर गुजरती है अर्थात् $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

प्रश्न 1. X और Y-अक्षों के समीकरण लिखिए।

हल X-अक्ष पर कोई बिंदु $(x, 0)$ है चूँकि X-अक्ष पर Y-निर्देशांक शून्य होता है।

$\therefore$ X-अक्ष पर प्रवणता $m = 0$ है।

$\because$ रेखा का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ $y - 0 = 0(x - x)$ $\quad (\because x_1 = x, y_1 = 0)$

$\Rightarrow$ $y = 0$

अतः x-अक्ष की समीकरण, $y = 0$

इसी प्रकार, हम y-अक्ष की समीकरण को ज्ञात कर सकते हैं

$$x = 0$$

प्रश्न 2. ढाल $\frac{1}{2}$ और बिंदु $(-4, 3)$ से जाने वाली।

हल एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण है,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

यहाँ, $(x_1, y_1) = (-4, 3)$ तथा $m = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$

$\Rightarrow \quad 2y - 6 = x + 4$

$\Rightarrow \quad x - 2y + 10 = 0$

प्रश्न 3. बिंदु (0, 0) से जाने वाली और ढाल m वाली।

हल यहाँ, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, प्रवणता $= m$

एक बिंदु के रूप में रेखा की प्रवणता,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\Rightarrow \quad y - 0 = m(x - 0)$

$\Rightarrow \quad y = mx$

प्रश्न 4. बिंदु $(2, 2\sqrt{3})$ से जाने वाली और x-अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।

हल यहाँ, $(x_1, y_1) = (2, 2\sqrt{3})$

$\Rightarrow \quad m = \tan 75^\circ$

$= \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$= \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \quad \left[\because \tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\right]$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1}$ [अंश तथा हर में $(\sqrt{3} + 1)$ द्वारा गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

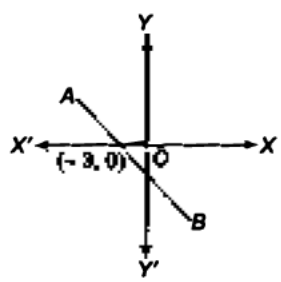
$\Rightarrow \quad y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})(x - 2)$

$\Rightarrow \quad y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})x - 2(2 + \sqrt{3})$

$\Rightarrow \quad y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})x - 4 - 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad (2 + \sqrt{3})x - y - 4 = 0$

प्रश्न 5. मूलबिंदु के बाईं और x-अक्ष को 3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल 2 वाली।



हल चूँकि रेखा X-अक्ष को मूलबिंदु के बाईं और प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि यह ऋणात्मक x-अक्ष पर प्रतिच्छेदित करती है। स्पष्ट है कि रेखा AB बिंदु $(-3, 0)$ से होकर गुजरती है तथा प्रवणता $m = -2$ रखती है।

एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

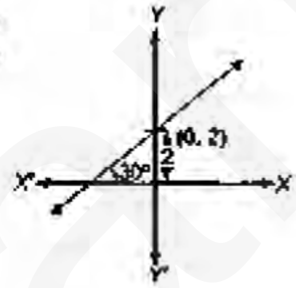
$\Rightarrow \quad y - 0 = -2(x + 3)$

$\Rightarrow \quad y = -2x - 6$

$\Rightarrow \quad 2x + y + 6 = 0$

प्रश्न 6. **मूलबिंदु से ऊपर Y-अक्ष को 2 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और X-अक्ष की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।**

हल चूँकि रेखा Y-अक्ष को मूलबिंदु से ऊपर की ओर प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि वह धनात्मक Y-अक्ष पर प्रतिच्छेदित करती है।



$$m = \tan 30°$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

∴ रेखा का समीकरण, $\quad y = mx + c$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$

प्रश्न 7. **बिंदुओं (– 1, 1) और (2, – 4) से जाते हुए।**

हल दिए गए बिंदु $A(-1, 1)$ तथा $B(2, -4)$ हैं, तब रेखा AB का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{-4 - 1}{2 + 1}(x + 1) \qquad (\because x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = -4)$

$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{-5}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 3 = -5x - 5$

$\Rightarrow \quad 5x + 3y + 2 = 0$

Ques 8

ΔPQR के शीर्ष $P(2, 1), Q(-2, 3)$ और $R(4, 5)$ हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम, हम माध्यिका का दूसरा निर्देशांक, मध्य-बिंदु सूत्र के द्वारा ज्ञात करेंगे, जो शीर्ष R के विपरीत भुजा पर है। तत्पश्चात् निम्न रेखा की समीकरण का प्रयोग करेंगे

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

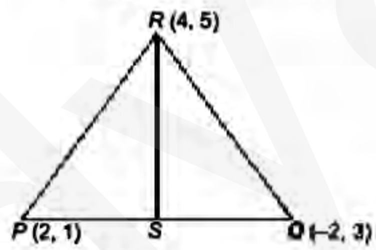
हल चूँकि माध्यिका शीर्ष से विपरीत भुजा को समद्विभाजित करती है अर्थात् S, PQ का मध्य-बिंदु होगा।

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(0, \frac{4}{2}\right) = (0, 2) \qquad (\because x_1 = 2, y_1 = 1, x_2 = -2, y_1 = 3)$$

$\therefore$ रेखा RS का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा}$$



$\Rightarrow \quad y - 5 = \frac{2-5}{0-4}(x - 4) \qquad (\because x_1 = 4, y_1 = 5, x_2 = 0, y_2 = 2)$

$\Rightarrow \quad y - 5 = \frac{-3}{-4}(x - 4)$

$\Rightarrow \quad 4y - 20 = 3x - 12$

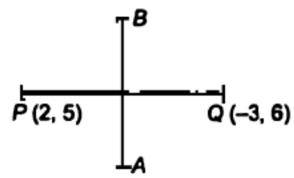
$\Rightarrow \quad 3x - 4y + 8 = 0$

Ques 9 (– 3, 5) से होकर जाने वाली और बिंदु (2, 5) और (– 3, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम, हम आवश्यक रेखा की प्रवणता (m) ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् निम्न रेखा की समीकरण का प्रयोग करेंगे,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

हल माना बिंदु P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः (2, 5) तथा (– 3, 6) हैं, हमें AB की समीकरण ज्ञात करनी है।



माना AB की प्रवणता m है।

चूँकि $\quad AB \perp PQ$

$\therefore$ AB की प्रवणता $\times$ PQ की प्रवणता $= -1$ $\qquad (\because m_1 \times m_2 = -1)$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{6-5}{-3-2} = -1 \qquad \left(\because PQ \text{ की प्रवणता } = \dfrac{6-5}{-3-2}\right)$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{1}{-5} = -1$

$\Rightarrow \quad m = 5$

$\therefore$ रेखा AB का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 5(x + 3) \qquad (\because x_1 = -3, y_1 = 5)$$

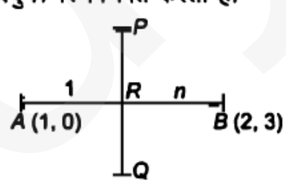
$\Rightarrow \quad y - 5 = 5x + 15$

$\Rightarrow \quad 5x - y + 20 = 0$

Ques 10

एक रेखा (1, 0) तथा (2, 3) बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड पर लंब है तथा उसको $1:n$ के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल माना दिए हुए बिंदु A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (1, 0) तथा (2, 3) हैं। माना रेखा PQ, रेखा AB को अनुपात $1:n$ में बिंदु R पर विभक्त करती है।



अंतः विभाजन सूत्र से,

$$R = \left(\frac{1 \times x_2 + n \times x_1}{1+n}, \frac{1 \times y_2 + n \times y_1}{1+n}\right)$$

$$= \left(\frac{1 \times 2 + n \times 1}{1+n}, \frac{1 \times 3 + n \times 0}{1+n}\right) \quad (\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3)$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{1+n}\right)$$

तथा $\quad PQ \perp AB$

माना रेखा PQ की प्रवणता m है।

$\therefore$ PQ रेखा की प्रवणता $\times$ AB रेखा की प्रवणता $= -1$ $\quad (\because m_1 \times m_2 = -1)$

$$\Rightarrow \quad m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$\Rightarrow \quad m \times \frac{3-0}{2-1} = -1 \qquad (\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3)$$

$$\Rightarrow \quad m \times 3 = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

अब, रेखा PQ का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा

$$\Rightarrow \quad y - \frac{3}{1+n} = \frac{-1}{3}\left(x - \frac{n+2}{n+1}\right) \qquad \left[\because R\left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{1+n}\right) = (x_1, y_1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(n+1)y - 9}{1+n} = \frac{-x(n+1) + (n+2)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad 3(n+1)y - 9 = -x(n+1) + (n+2)$$

$$\Rightarrow \quad x(n+1) + 3(n+1)y = n + 2 + 9$$

$$\Rightarrow \quad x(n+1) + 3(n+1)y = n + 11$$

Ques 11 **एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांकों से समान अंत:खंड काटती है और बिंदु (2, 3) से जाती है।**

रेखा का अंत:खंड रूप में समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ होता है।

हल रेखा का अंत:खंड रूप में समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots(i)$$

चूँकि रेखा निर्देशांकों से समान अंत:खंड काटती है अर्थात्

$$a = b$$

$\therefore$ समी (i) से,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y = a \qquad \ldots(ii)$$

रेखा (ii) बिंदु (2, 3) से होकर गुजरती है अर्थात् ये रेखा (ii) को संतुष्ट करेगी।

$$\Rightarrow \quad 2 + 3 = a \Rightarrow a = 5$$

a का मान समी (ii) में रखने पर हम पाते हैं,

$$x + y = 5$$

Ques 12 **. बिंदु (2, 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंत:खंडों का योग 9 है।**

हल अंत:खंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots(i)$$

दिया है,

$$a + b = 9 \qquad \ldots(ii)$$

चूँकि रेखा (i) बिंदु (2, 2) से होकर गुजरती है अर्थात् ये रेखा (i) को संतुष्ट करेगी अर्थात्
समी (i) में $x = 2$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 \quad \text{...(iii)}$$

a तथा b के मान ज्ञात करने के लिए समी (ii) तथा (iii) को हल करने पर,
समी (ii) से, $b = 9 - a$ समी (iii) में रखने पर हम पाते हैं,

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{9-a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2(9-a) + 2a = a(9-a)$$

$$\Rightarrow \quad 18 - 2a + 2a = 9a - a^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 9a + 18 = 0$$

गुणनखंड विधि से मध्य पद को विभक्त करने पर,

$$\Rightarrow \quad a^2 - 6a - 3a + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(a-6) - 3(a-6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a-6)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 6 \text{ या } 3 \Rightarrow b = 3 \text{ या } 6$$

अतः समी (i) से,

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 6y = 18$$

$$\text{या} \quad 6x + 3y = 18$$

$$\Rightarrow \quad x + 2y = 6$$

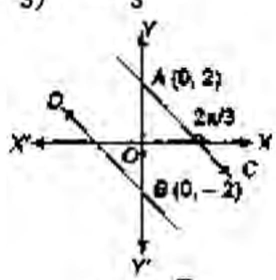
$$\text{या} \quad 2x + y = 6 \quad \text{(3 से भाग करने पर)}$$

Ques 13

बिंदु (0, 2) से जाने वाली और धन x-अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समांतर और Y-अक्ष को मूलबिंदु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल $\because \quad m = \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}$

$$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} \quad [\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta]$$



$$m = -\sqrt{3}$$

अतः बिंदु $A(0, 2)$ से होकर जाने वाली रेखा AC का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

$\Rightarrow \quad y - 2 = -\sqrt{3}(x - 0) \qquad (\because x_1 = 0, y_1 = 2)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = -\sqrt{3}x$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x + y - 2 = 0$

तथा रेखा BD, Y-अक्ष के नीचे प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि Y का निर्देशांक ऋणात्मक तथा X का निर्देशांक शून्य है अर्थात् बिंदु $(0, -2)$ है।

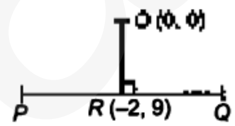
अतः बिंदु $B(0, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$y + 2 = -\sqrt{3}(x - 0) \qquad [\because y - y_1 = m(x - x_1)]$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x + y + 2 = 0$

Ques 14 **मूलबिंदु से किसी रेखा पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु $(-2, 9)$ पर मिलता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

हमें रेखा PQ का समीकरण ज्ञात करना है, जिसके लिए हमें PQ की प्रवणता ज्ञात करनी है।



हल चूँकि $PQ \perp OR$

$\therefore$ PQ की प्रवणता $\times$ OR की प्रवणता $= -1 \; (\because m_1 \times m_2 = -1)$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{9 - 0}{-2 - 0} = -1 \qquad (\because x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = -2, y_2 = 9)$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{9}{-2} = -1$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{2}{9}$

अब, PQ का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा

$y - 9 = \dfrac{2}{9}(x + 2) \qquad (\because x_1 = -2, y = 9)$

$\Rightarrow \quad 9y - 81 = 2x + 4$

$\Rightarrow \quad 2x - 9y + 85 = 0$

Ques 15 **ताँबे की छड़ की लंबाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि $L = 124.942$ जब $C = 20$ और $L = 125.134$ जब $C = 110$ हो, तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।**

हल दिया है, $L = 124.942$ जब $C = 20$ तथा $L = 125.134$ जब $C = 110$

$\therefore$ निर्देशांक रूप में $(20, 124.942)$ तथा $(110, 125.134)$ दो बिंदु हैं।

रेखीय फलन का समीकरण अर्थात् रेखा को इस प्रकार ले सकते हैं,

$$L - L_1 = \frac{L_2 - L_1}{C_2 - C_1}(C - C_1) \qquad \left[\because y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right]$$

$\Rightarrow \quad L - 124.942 = \frac{125.134 - 124.942}{110 - 20}(C - 20)$

$\Rightarrow \quad L - 124.942 = \frac{0.192}{90}(C - 20)$

$\Rightarrow \quad L = \frac{0.192}{90}(C - 20) + 124.942$

Ques 16 . **किसी दूध भंडार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लीटर दूध ₹ 14 प्रति लीटर के भाव से और 1220 लीटर दूध ₹ 16 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा मांग के मध्य के संबंध को रैखिक मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध ₹ 17 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है?**

हल माना विक्रय मूल्य तथा मांग (लीटर) क्रमित युग्म (x, y) में निरूपित है, जहाँ ₹ x प्रति लीटर तथा y दूध की मात्रा (लीटर में) निरूपित करता है।

दिया है, (14, 980) तथा (16, 1220) दो बिंदुओं के निर्देशांक हैं।

माना रेखीय संबंध अर्थात् रेखीय समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\Rightarrow \quad y - 980 = \frac{1220 - 980}{16 - 14}(x - 14)$

$\Rightarrow \quad y - 980 = \frac{240}{2}(x - 14)$

$(\because x_1 = 14, y_1 = 980, x_2 = 16, y_2 = 1220)$

$\Rightarrow \quad y - 980 = 120(x - 14)$

$\Rightarrow \quad y - 980 = 120x - 120 \times 14$

$\Rightarrow \quad 120x - y = 1680 - 980$

$\Rightarrow \quad 120x - y = 700$

जब मूल्य $x = 17$, तब

$$120 \times 17 - y = 700$$

$\Rightarrow \quad y = 2040 - 700$

$\Rightarrow \quad y = 1340$

अतः वह 1340 लीटर दूध प्रति सप्ताह ₹ 17 लीटर की दर से बेचेगा।

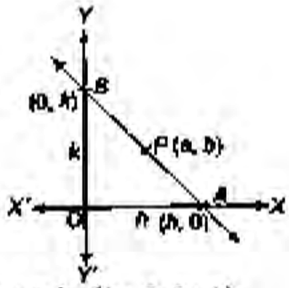
Ques 17 **अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य-बिंदु $P(a, b)$ है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ है।**

रेखा का अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण,

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1 \quad \text{...(i)}$$

जहाँ, h तथा k रेखा द्वारा क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर बनाए अंतःखंड है।



AB का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{h+0}{2}, \frac{0+k}{2}\right)$

$(\because x_1 = h, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = k)$

$\because P(a, b)$, रेखा AB का मध्य-बिंदु है अर्थात्

$$\frac{h+0}{2} = a \quad \text{तथा} \quad \frac{0+k}{2} = b$$

$$\Rightarrow \quad h = 2a \quad \text{तथा} \quad k = 2b$$

समी (i) में h तथा k के मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

इति सिद्धम्

Ques 18 . अक्षों के बीच रेखाखंड को बिंदु $R(h, k)$, 1 : 2 के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

रेखा के अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करके इसे सरल करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots(i)$$

माना बिंदु $R(h, k)$, रेखा AB को अनुपात 1 : 2 में विभक्त करता है।

अतः विभाजन सूत्र द्वारा,

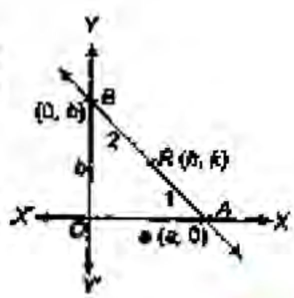
$$R(h, k) = \left(\frac{1x_2 + 2x_1}{1+2}, \frac{1y_2 + 2y_1}{1+2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}, k = \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}$$

[$\because$ बिंदु $P(x, y)$, रेखा AB जिसके निर्देशांक क्रमशः $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ हैं, को अनुपात $m : n$ में अंतः विभाजित करता है।]

$$\therefore \quad P(x, y) = \left[\left(\frac{nx_2 + mx_1}{n+m}, \frac{ny_2 + my_1}{n+m}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{2a}{3}, k = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{2}, b = 3k$$



समी (i) में a तथा b के मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x}{\frac{3h}{2}} + \frac{y}{3k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{3h} + \frac{y}{3k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2kx + hy}{3hk} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2kx + hy = 3hk$$

Ques 19 **रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिंदु (3, 0) (– 2, – 2) और (8, 2) हैं।**

किंही दो बिंदुओं को लेकर एक रेखा की समीकरण ज्ञात करेंगे। अब, यदि तीसरा बिंदु इस रेखा की समीकरण को संतुष्ट करेगा, तब तीनों बिंदु संरेखीय होंगे।

हल माना दिए गए बिंदु $A(3, 0)$, $B(-2, -2)$ तथा $C(8, 2)$ हैं।

रेखा AB का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-2-0}{-2-3}(x-3) \qquad (\because x_1 = 3, y_1 = 0, x_2 = -2, y_2 = -2)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-2}{-5}(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad 5y = 2x - 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 5y - 6 = 0 \qquad \ldots(i)$$

समी (i) में बिंदु $C(8, 2)$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$2 \times 8 - 5 \times 2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16 - 10 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0$$

अतः बिंदु A, B तथा C संरेखीय हैं।

Exercise 9.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित समीकरणों को ढाल, अंतःखंड रूप में रूपांतरित कीजिए और उनके ढाल तथा Y-अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

(a) $x + 7y = 0$ **(b)** $6x + 3y - 5 = 0$ **(c)** $y = 0$

रेखा का प्रवणता रूप में समीकरण का प्रयोग करेंगे तत्पश्चात् m तथा c का मान ज्ञात करेंगे।

हल (a) दिया है, $x + 7y = 0 \Rightarrow 7y = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + 0$

$y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$m = -\frac{1}{7}, \quad c = 0$$

(b) दिया है, $6x + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 3y = -6x + 5$

$\Rightarrow \quad y = \frac{-6}{3}x + \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -2x + \frac{5}{3}$

$y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$m = -2, c = \frac{5}{3}$$

(c) दिया है, $y = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0x + 0$

$y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$\Rightarrow \quad m = 0, c = 0$

प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों को अंत:खंड रूप में रूपांतरित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अंत:खंड ज्ञात कीजिए।

(a) $3x + 2y - 12 = 0$ (b) $4x - 3y = 6$ (c) $3y + 2 = 0$

दी हुई समीकरण को अंत:खंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ में बदलेंगे, जहाँ a तथा b अक्षों पर अंत:खंड हैं।

हल (a) दिया है, $3x + 2y = 12$

$\Rightarrow \quad \frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर, $a = 4, b = 6$

$\therefore$ X-अंत:खंड = 4 तथा Y-अंत:खंड = 6

(b) दिया है, $4x - 3y = 6$

$\Rightarrow \quad \frac{4x}{6} - \frac{3y}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{6}{4}} - \frac{y}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{(-2)} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं

X-अंत:खंड $= \frac{3}{2}$ तथा Y-अंत:खंड $= -2$

(c) दिया है, $3y + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}$ या $0x + \frac{y}{(-2/3)} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

Y-अक्ष के साथ अंत:खंड $= -\frac{2}{3}$ तथा x-अक्ष पर कोई अंत:खंड नहीं है

प्रश्न 3. निम्नलिखित समीकरणों को लंब रूप में रूपांतरित कीजिए। उनकी मूलबिंदु से लांबिक दूरियाँ और लंब तथा धन x-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

(a) $x-\sqrt{3}y+8=0$ (b) $y-2=0$ (c) $x-y=4$

$ax+by=c$ के रूप की कोई भी समीकरण को लंब रूप ($x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$) में प्रत्येक पद को $\sqrt{a^2+b^2}$ द्वारा भाग देने से रूपांतरित किया जा सकता है

अर्थात् $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

हल (a) दी गई रेखा का समीकरण है,

$$x-\sqrt{3}y+8=0$$

$$\Rightarrow \quad x-\sqrt{3}y=-8$$

$$\Rightarrow \quad -x+\sqrt{3}y=8 \quad \ldots(i)$$

अब, $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2+(y \text{ का गुणांक})^2}$ द्वारा भाग देने पर हम पाते हैं,

$$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\cos 60^\circ x+\sin 60^\circ y=4$$

($\because x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ के रूप में रूपांतरित करने पर)

($\because \cos x$ ऋणात्मक तथा $\sin x$ धनात्मक है जोकि द्वितीय चतुर्थांश में ही संभव है।)

$$\Rightarrow \quad x\cos(180^\circ-60^\circ)+y\sin(180^\circ-60^\circ)=4$$

$$\Rightarrow \quad x\cos 120^\circ+y\sin 120^\circ=4$$

[$\because$ $\cos(180^\circ-\theta)=-\sin\theta$

तथा $\sin(180^\circ-\theta)=\cos\theta$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$\alpha=120^\circ \text{ तथा } p=4$$

(b) दी गई रेखा का समीकरण है,

$$y-2=0 \quad \ldots(i)$$

अब, $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2+(y \text{ का गुणांक})^2}$ द्वारा भाग करने पर,

अर्थात् $\sqrt{0+1^2}=1$ हम पाते हैं,

$$\frac{0x}{1}+\frac{y}{1}=\frac{2}{1}$$

या $x\cos 90^\circ+y\sin 90^\circ=2$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$\alpha=90^\circ \text{ और } p=2$$

(c) दी गई रेखा का समीकरण

$$x-y=4$$

उपरोक्त समीकरण को $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2+(y \text{ का गुणांक})^2}$ द्वारा भाग करने पर,

अर्थात् $\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, हम पाते हैं,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ $\cos 45^\circ\, x - \sin 45^\circ\, y = 2\sqrt{2}$

($\because \cos x$ धनात्मक तथा $\sin x$ ऋणात्मक है, जोकि केवल चतुर्थ चतुर्थांश में ही संभव है)

$\Rightarrow$ $x\cos(360^\circ - 45^\circ) + y\sin(360^\circ - 45^\circ) = 2\sqrt{2}$

[$\because \cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ तथा $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$]

$\Rightarrow$ $x\cos 315^\circ + y\sin 315^\circ = 2\sqrt{2}$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

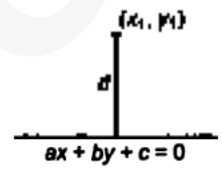
$$\alpha = 315^\circ \quad \text{तथा} \quad p = 2\sqrt{2}$$

नोट *विद्यार्थी हमेशा याद रखें कि दी गई समीकरण का दायाँ पक्ष हमेशा धनात्मक होना जरूरी है चूँकि लंबवत् दूरी की लम्बाई ऋणात्मक नहीं हो सकती है।*

प्रश्न 4. बिंदु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x + 6) = 5(y - 2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 4 - 5) बिंदु (h, k) की रेखा $ax + by + c = 0$ से दूरी, $d = \dfrac{|ah + bk + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ है।

हल दी गई रेखा का समीकरण,



$$12(x + 6) = 5(y - 2)$$

$\Rightarrow$ $12x + 72 = 5y - 10$

$\Rightarrow$ $12x - 5y + 82 = 0$

अतः बिंदु $(-1, 1)$ से दूरी, $d = \left|\dfrac{12 \times (-1) - 5 \times 1 + 82}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}}\right|$

$$\left[\because d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|; x_1 = -1, y_1 = 1; a = 12, b = -5, c = 82\right]$$

$$= \left|\frac{-12 - 5 + 82}{\sqrt{144 + 25}}\right| = \left|\frac{82 - 17}{\sqrt{169}}\right| = \frac{65}{13} = 5$$

प्रश्न 5. X-अक्ष पर बिंदुओ को ज्ञात कीजिए जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरियाँ 4 इकाई हैं।

हल माना X-अक्ष पर कोई बिंदु $(h, 0)$ है, चूँकि X-अक्ष पर Y-निर्देशांक शून्य होगा।

दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 12 \qquad \ldots\text{(i)}$$

$\therefore$ बिंदु $(h, 0)$ की रेखा (i) से दूरी है,

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \left|\frac{4 \times h + 3 \times 0 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right| \quad (\because a = 4, b = 3, c = 12, x_1 = h, y_1 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{4h - 12}{5}\right| = 4$$

$$\Rightarrow \quad |4h - 12| = 20$$

$$\Rightarrow \quad 4h - 12 = \pm 20$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$4h - 12 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 4h = 32$$

$$\Rightarrow \quad h = 8$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$4h - 12 = -20$$

$$\Rightarrow \quad 4h = -8$$

$$\Rightarrow \quad h = -2$$

अतः x-अक्ष पर बिंदु $(8, 0)$ तथा $(-2, 0)$ हैं।

प्रश्न 6. **समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।**

(i) $15x + 8y - 34 = 0$ और $15x + 8y + 31 = 0$

(ii) $l(x + y) + p = 0$ और $l(x + y) - r = 0$

दो समांतर रेखाओं $ax + by + c = 0$ तथा $ax + by + d = 0$ के बीच की दूरी

$$\left|\frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \text{ होती है।}$$

हल (i) दी गई रेखाएँ $15x + 8y - 34 = 0$ तथा $15x + 8y + 31 = 0$ समांतर हैं।

$\therefore$ दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

$$= \left|\frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{-34 - 31}{\sqrt{15^2 + 8^2}}\right| \quad (\because c = -34, d = 31, a = 15, b = 8)$$

$$= \frac{|-65|}{\sqrt{225 + 64}} = \frac{65}{\sqrt{289}} = \frac{65}{17} \text{ इकाई}$$

(ii) दी गई रेखाएँ $lx + ly + h = 0$ तथा $lx + ly - r = 0$ समांतर हैं।

$$\therefore \text{ अभीष्ट दूरी} = \left|\frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{h + r}{\sqrt{l^2 + l^2}}\right| = \left|\frac{h + r}{\sqrt{2}l}\right| \quad (\because a = l, b = l, c = h, d = -r)$$

प्रश्न 7. **रेखा $3x - 4y + 2 = 0$ के समांतर और बिंदु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

रेखा $ax + by + c = 0$ के समांतर कोई रेखा $ax + by + k = 0$ होती है अर्थात् केवल अचर पद परिवर्तित होता है या $ax + by = k$

हल दी गई रेखा का समीकरण है,

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \ldots(i)$$

समी (i) के समांतर रेखा का समीकरण है,

$$3x - 4y + k = 0 \quad \ldots(ii)$$

$\because$ रेखा (ii) बिंदु $(-2, 3)$ से होकर गुजरती है अर्थात् समी (ii) में $x = -2$ व $y = 3$ रखने पर,

$\therefore \quad 3(-2) - 4 \times 3 + k = 0$

$\Rightarrow \quad -6 - 12 + k = 0$

$\Rightarrow \quad k = 18$

समी (i) में $k = 18$ रखने पर हम पाते हैं,

$$3x - 4y + 18 = 0$$

प्रश्न 8. रेखा $x - 7y + 5 = 0$ पर लंब और x-अंतःखंड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

रेखा $ax + by + c = 0$ के लंबवत् रेखा का समीकरण $bx - ay + k = 0$ या $bx - ay = k$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी गई रेखा का समीकरण है,

$$x - 7y + 5 = 0 \quad \ldots(i)$$

समी (i) के लम्बवत् रेखा का समीकरण है,

$$7x + y + k = 0 \quad \ldots(ii)$$

$\because$ रेखा (ii) बिंदु $(3, 0)$ से होकर गुजरती है।

अर्थात् समी (ii) में $x = 3, y = 0$ रखने पर,

$\therefore \quad 7 \times 3 + 0 + k = 0$

$\Rightarrow \quad k = -21$

समी (ii) में $k = -21$ रखने पर हम पाते हैं, $7x + y - 21 = 0$

प्रश्न 9. रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

दो रेखाओं $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए सूत्र

$\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण हैं,

$$\sqrt{3}x + y = 1$$

$\Rightarrow \quad y = -\sqrt{3}x + 1 \quad$ तथा $\quad x + \sqrt{3}y = 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}y = -x + 1$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के साथ तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$m_1 = -\sqrt{3} \text{ तथा } m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad \tan\theta = \left|\dfrac{-\sqrt{3} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right| \quad \left[\because \tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|\right]$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \left|\dfrac{-\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{-3+1}{\sqrt{3}}}{2}\right|$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$

प्रश्न 10. बिंदुओं $(h, 3)$ और $(4, 1)$ से जाने वाली रेखा, $7x - 9y - 19 = 0$ को समकोण पर प्रतिच्छेदित करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।

हल दो बिंदुओं $(h, 3)$ तथा $(4, 1)$ से जाने वाली रेखा के समीकरणों के लिए

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ का प्रयोग करने पर,

$\Rightarrow \quad y - 3 = \dfrac{1-3}{4-h}(x - h) \qquad (\because x_1 = h, y_1 = 3, x_2 = 4, y_2 = 1)$

$\Rightarrow \quad y - 3 = \dfrac{-2}{4-h}(x - h) \Rightarrow y - 3 = -\dfrac{2x}{4-h} + \dfrac{2h}{4-h}$

$\Rightarrow \quad y = -\dfrac{2x}{4-h} + \left(3 + \dfrac{2h}{4-h}\right) = 0 \qquad \ldots(i)$

दी गई रेखा का समीकरण है,

$$7x - 9y - 19 = 0$$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{7}{9}x - \dfrac{19}{9} \qquad \ldots(ii)$

रेखाओं के समी (i) तथा (ii) की $y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर,

$\therefore \quad m_1 = -\dfrac{2}{4-h}$ तथा $m_2 = \dfrac{7}{9}$

$\because$ रेखाएँ (i) तथा (ii) एक-दूसरे पर लंबवत् है अर्थात्

रेखा (i) की प्रवणता $\times$ रेखा (ii) की प्रवणता $= -1$

$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{2}{4-h} \times \dfrac{7}{9} = -1$

$\Rightarrow \quad 14 = 9(4 - h)$

$\Rightarrow \quad 14 = 36 - 9h$

$\Rightarrow \quad 9h = 22$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{22}{9}$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (x_1, y_1) से जाने वाली और रेखा $Ax + By + C = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

रेखा $Ax + By + C = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण $Ax + By + K = 0$ होता है।

हल दी गई रेखा की समीकरण है,

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots(i)$$

समी (i) के समांतर रेखा का समीकरण,

$$Ax + By + K = 0 \quad \ldots(ii)$$

रेखा (ii) बिंदु (x_1, y_1) से होकर जाती है अर्थात् ये रेखा (ii) को संतुष्ट करेगा।

$\therefore \quad Ax_1 + By_1 + K = 0 \Rightarrow K = -(Ax_1 + By_1)$

k का मान समी (ii) में रखने पर,

$\Rightarrow \quad Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$

$\Rightarrow \quad Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$

$\Rightarrow \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$

प्रश्न 12. बिंदु (2, 3) से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60° का कोण पर प्रतिच्छेद करती है। यदि एक रेखा की ढाल 2 है, तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा रेखा l का समीकरण, जहाँ $(x_1, y_1) = (2, 3)$ तथा $m = 2$ हैं।

$y - 3 = 2(x - 2)$

$\Rightarrow \quad y - 3 = 2x - 4$

$\Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0$

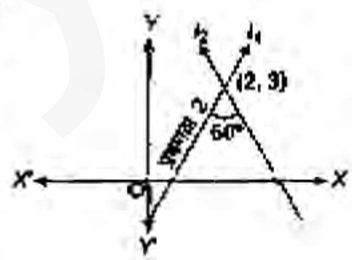
$\Rightarrow \quad y = 2x - 1 \quad \ldots(i)$

यहा रेखा l_1 की प्रवणता है। $\quad m_1 = 2$

माना रेखा l_2 की प्रवणता m है।

दिया है, $\quad \theta = 60°$

दो रेखाओं के मध्य कोण,



$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \tan 60° = \left|\frac{2 - m}{1 + 2m}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \left|\frac{2 - m}{1 + 2m}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2 - m}{1 + 2m} = \pm\sqrt{3}$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर हम पाते हैं,

$$\frac{2 - m}{1 + 2m} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$\Rightarrow \quad 2 - m = \sqrt{3}(1 + 2m)$

$\Rightarrow \quad 2 - m = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}m$

$\Rightarrow \quad 2 - \sqrt{3} = m(1 + 2\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}$$

पुनः ऋणात्मक चिन्ह लेने पर हम पाते हैं,

$$\frac{2-m}{1+2m} = -\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 2 - m = -\sqrt{3}\,(1 + 2m)$

$\Rightarrow \quad 2 - m = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}m$

$\Rightarrow \quad m - 2\sqrt{3}m = \sqrt{3} + 2$

$\Rightarrow \quad -m\,(2\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 2)$

$\Rightarrow \quad m = -\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right)$

अब, रेखा l_2 का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

$$y - 3 = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}\,(x-2) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{जब } m = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \\ \text{तथा } x_1 = 2,\ y_1 = 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad y(1 + 2\sqrt{3}) - 3 - 6\sqrt{3} = x(2 - \sqrt{3}) - 4 + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad x(2 - \sqrt{3}) - y(1 + 2\sqrt{3}) + 8\sqrt{3} - 1 = 0$

पुनः

$$y - 3 = -\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right)(x-2) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{जब } m = -\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right) \\ \text{तथा } \ x_1 = 2,\ y_1 = 3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad y\,(2\sqrt{3} - 1) - 6\sqrt{3} + 3 = -(\sqrt{3} + 2)x + 2\sqrt{3} + 4$

$\Rightarrow \quad (2 + \sqrt{3})\,x + (2\sqrt{3} - 1)y - 8\sqrt{3} - 1 = 0$

प्रश्न 13. बिंदुओं (3, 4) और (– 1, 2) को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल माना दिए गए बिंदु $P\,(3, 4)$ तथा $Q\,(1, 2)$ हैं, तब B, PQ का मध्य-बिंदु है अर्थात्

$$B = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 3)$$

$(\because x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ x_2 = -1,\ y_2 = 2)$

अब, $AB \perp PQ$, अर्थात् AB प्रवणता $\times$ PQ की प्रवणता $= -1$

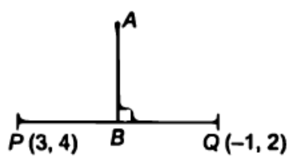
$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{2-4}{-1-3} = -1$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{-2}{-4} = -1$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{1}{2} = -1$

$\Rightarrow \quad m = -2$



अब, AB रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा, जहाँ $(x_1, y_1) = (1, 3)$ तथा $m = -2$ है।

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

$\Rightarrow$ $$y - 3 = -2x + 2$$

$\Rightarrow$ $$2x + y - 5 = 0$$

प्रश्न 14. बिंदु $(-1, 3)$ से रेखा $3x - 4y - 16 = 0$ पर खींचे गए लंबपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

संकेत: लंबपाद, दी गई रेखा तथा इस रेखा पर लंबवत् रेखा का प्रतिच्छेद बिंदु होता है।

हल दी गई रेखा AB का समीकरण है,

$$3x - 4y - 16 = 0$$

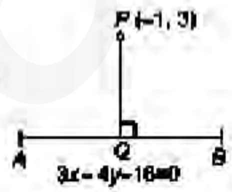
$\Rightarrow$ $$y = \frac{3}{4}x - 4 \quad \text{...(i)}$$

रेखा (i) की प्रवणता, $m_1 = \frac{3}{4}$

माना रेखा PQ की प्रवणता m है।

चूँकि $PQ \perp AB$

$\therefore$ PQ की प्रवणता $\times$ AB की प्रवणता $= -1$



$\Rightarrow$ $$m \times \left(\frac{3}{4}\right) = -1 \quad (\because m_1 m_2 = -1)$$

$\Rightarrow$ $$m = -\frac{4}{3}$$

अत: PQ रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

जहाँ, $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ तथा $m = -\frac{4}{3}$ है।

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$\Rightarrow$ $$3y - 9 = -4x - 4$$

$\Rightarrow$ $$4x + 3y - 5 = 0 \quad \text{...(ii)}$$

अब, Q के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए समी (i) तथा (ii) को हल करने पर,

समी (i) से, $$y = \frac{3}{4}x - 4$$

y का मान समी (ii) में रखने पर हम पाते हैं,

$$4x + 3\left(\frac{3}{4}x - 4\right) - 5 = 0$$

$\Rightarrow$ $$4x + \frac{9x}{4} - 12 - 5 = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{25x}{4} = 17 \Rightarrow x = \frac{68}{25}$$

$\therefore$ समी (i) से, $y = \frac{3}{4} \times \frac{68}{25} - 4 = \frac{3 \times 17}{25} - \frac{4}{1} = \frac{51}{25} - \frac{4}{1} = \frac{51 - 100}{25} = -\frac{49}{25}$

अत: अभीष्ट प्रतिच्छेद बिंदु $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ है।

प्रश्न 15. मूलबिंदु से रेखा $y = mx + c$ पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु $(-1, 2)$ पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल $\because$ रेखा $OP \perp$ रेखा AB

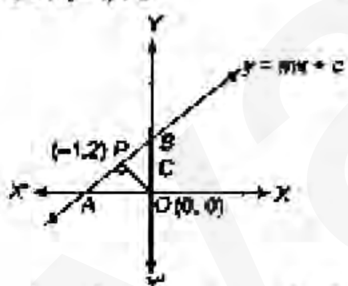
$\therefore$ OP की प्रवणता $\times$ AB की प्रवणता $= -1$

$\Rightarrow$ $$\frac{2-0}{-1-0} \times m = -1$$

$\Rightarrow$ $$-2m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

बिंदु $(-1, 2)$ भी रेखा को संतुष्ट करता है।

$y = mx + c$ अर्थात् $2 = m(-1) + c$ $\quad$ ($x = -1, y = 2$ रखने पर)



$\Rightarrow$ $$2 = -\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

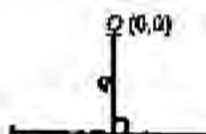
अतः $$m = \frac{1}{2}, \; c = \frac{5}{2}$$

प्रश्न 16. यदि p और q क्रमशः मूलबिन्दु से रेखाओं $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ और $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ पर लंब की लंबाइयाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + 4q^2 = k^2$

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ पर लंबवत् दूरी $p = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ है।

हल

चित्र I



चित्र II

चित्र I के लिए, $\quad x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ $\quad$ ...(i)

चित्र II के लिए, $\quad x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ $\quad$ ...(ii)

$\therefore$ बिंदु (0, 0) से समी (i) पर लंबवत् दूरी है,

$$p = \left|\frac{0 - 0 - k\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\right| = k\cos 2\theta \qquad \left[\because d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|\right] \quad ...(iii)$$

पुनः समी. (iii) को इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = k$$

$\Rightarrow$ $$x\sin\theta + y\cos\theta = k\cos\theta\sin\theta$$

$\Rightarrow$ $$x\sin\theta + y\cos\theta = \frac{k}{2}(2\cos\theta\sin\theta)$$

$\Rightarrow$ $$x\sin\theta + y\cos\theta = \frac{k}{2}\sin 2\theta$$

$\Rightarrow$ $$x\sin\theta + y\cos\theta - \frac{k}{2}\sin 2\theta = 0 \qquad \ldots(iv)$$

अब, बिंदु (0, 0) से समी. (iv) पर लम्बवत् दूरी है,

$$q = \left|\frac{0 + 0 - \frac{k}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}\right|$$

$$\left(\because a = \sin\theta, b = \cos\theta, c = -\frac{k}{2}\sin 2\theta, x_1 = 0, y_1 = 0\right)$$

$\Rightarrow$ $$q = \frac{k}{2}\sin 2\theta \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \qquad \ldots(v)$$

$\Rightarrow$ $$2q = k\sin 2\theta$$

समी. (iii) तथा (v) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$p^2 + 4q^2 = k^2\cos^2 2\theta + k^2\sin^2 2\theta$$

$$= k^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$$

$\therefore$ $$p^2 + 4q^2 = k^2 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 17. शीर्षों $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ और $C(1, 2)$ वाले ΔABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा पर लंब डाला गया है। लंब की लंबाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम $m_1m_2 = -1$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा रेखा की समीकरण को ज्ञात करेंगे।

हल दिया है कि ΔABC के शीर्ष $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ तथा $C(1, 2)$ हैं।

$\because$ रेखा $AD \perp$ रेखा BC

$\therefore$ AD की प्रवणता $\times$ BC की प्रवणता $= -1$

$\Rightarrow$ $$m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$\Rightarrow$ $$m \times \frac{2 + 1}{1 - 4} = -1 \qquad (\because x_1 = 4, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 2)$$

$$\Rightarrow \qquad m \times \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow m = 1$$

अतः $(y - y_1) = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा AD की समीकरण ज्ञात करते हैं, जहाँ $(x_1\ y_1) = (2, 3)$ तथा $m = +1$ है।

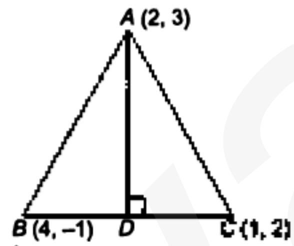
$$y - 3 = 1(x - 2)$$

$$\Rightarrow \qquad x - y - 2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x - y + 1 = 0$$

अब, रेखा BC का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ है।}$$



$$y + 1 = \frac{2 + 1}{1 - 4}(x - 4) \qquad (\because x_1 = 4, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 2)$$

$$\Rightarrow \qquad y + 1 = \frac{3}{-3}(x - 4)$$

$$\Rightarrow \qquad y + 1 = -x + 4 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$\therefore$ AD की लंबाई = बिंदु (2, 3) से रेखा BC पर लंबवत् दूरी

अर्थात् $\qquad x + y - 3 = 0$

$$= \left|\frac{2 + 3 - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \left[\because p = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|\right]$$

प्रश्न 18. यदि p मूलबिंदु से उस रेखा पर डाले लंब की लंबाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंतःखंड a और b हों, तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा रेखा $ax + by + c = 0$ से बिंदु (x_1, x_1) की लंबवत् दूरी $p = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ का प्रयोग करेंगे।

हल अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

इसकी मूलबिंदु से दूरी,

$$\left|\frac{0+0-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\right| = p \qquad \left(\because d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\right)$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \Rightarrow \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हम पाते हैं,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

इति सिद्धम्

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. k के मान ज्ञात कीजिए, जबकि रेखा $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$

(a) X-अक्ष के समांतर है। (b) Y-अक्ष के समांतर है।

(c) मूलबिंदु से जाती है।

हल दी गई रेखा का समीकरण $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$ ...(i)

(a) जब रेखा (i) X-अक्ष के समांतर है, तब प्रवणता = 0

अर्थात् $\frac{(k-3)}{(4-k^2)} = 0$ $\left(\because \text{ रेखा (i) की प्रवणता } = \frac{k-3}{4-k^2}\right)$

$\Rightarrow$ $k-3=0 \Rightarrow k=3$

(b) जब रेखा (i) Y-अक्ष के समांतर है, तब प्रणवता $= \infty = \frac{1}{0}$

अर्थात् $\frac{k-3}{4-k^2} = \frac{1}{0}$ $\left(\because \text{ रेखा (i) की प्रवणता } = \frac{k-3}{4-k^2}\right)$

$\Rightarrow$ $4-k^2=0$

$\Rightarrow$ $k=\pm 2$

(c) जब रेखा (i) मूलबिंदु (0, 0), से होकर गुजरती है, तब ये इसे संतुष्ट करेगा।

$0-0+k^2-7k+6=0$ [समी (i) में $x=0, y=0$ रखने पर]

$\Rightarrow$ $k^2-6k-k+6=0$

$\Rightarrow$ $k(k-6)-1(k-6)=0$

$\Rightarrow$ $(k-6)(k-1)=0$

$\Rightarrow$ $k=1, 6$

प्रश्न 2. θ और p के मान ज्ञात कीजिए, यदि समीकरण $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ रेखा $\sqrt{3}x+y+2=0$ का लंब रूप हैं।

हल दी गई रेखा का समीकरण, $\sqrt{3}x+y+2=0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}x+y=-2$

$\Rightarrow \qquad -\sqrt{3}x - y = 2$

$\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ अर्थात् $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

द्वारा उपरोक्त समीकरण को भाग करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\cos 30^\circ \cdot x - \sin 30^\circ \cdot y = 1$$

($\because x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ रूप में परिवर्तन के लिए)

$$\Rightarrow \quad \cos(180^\circ + 30^\circ)x + \sin(180^\circ + 30^\circ)y = 1$$

($\because \cos\theta$ तथा $\sin\theta$ दोनों तृतीय चतुर्थांश में ऋणात्मक होते हैं।)

$$\Rightarrow \quad (\cos 210^\circ)x + (\sin 210^\circ)y = 1$$

$x\cos\theta + y\sin\theta = p$ के साथ तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\theta = 210^\circ \quad \text{तथा} \quad p = 1$$

प्रश्न 3. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और -6 हैं।

रेखा के अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल माना एक रेखा का अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है। ...(i)

दिया है, $\quad a + b = 1$ ...(ii)

तथा $\quad ab = -6$ ...(iii)

a तथा b के मान ज्ञात करने हेतु समी (ii) तथा (iii) को हल करने पर,

समी (iii) से $b = \frac{-6}{a}$ का मान समी (ii) में रखने पर,

$$a - \frac{6}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{1} - \frac{6}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 6 = a$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - (3-2)a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(a-3) + 2(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a+2)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 3, -2; \quad b = -2, 3$$

समी (i) में क्रमशः $a = 3, -2$ रखने पर हम अभीष्ट रेखाओं की समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 3y = 6 \quad \text{या} \quad -3x + 2y = 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 3y - 6 = 0 \quad \text{या} \quad 3x - 2y + 6 = 0$$

प्रश्न 4. y-अक्ष पर कौन-से बिंदु ऐसे हैं जिनकी रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ से दूरी 4 इकाई है।

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c$ की दूरी $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ होती है।

हल हम जानते हैं कि Y-अक्ष पर X-निर्देशांक शून्य होता है। माना Y-अक्ष पर कोई बिंदु $(0, h)$ है।

दी हुई रेखा का समीकरण, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ या $4x + 3y = 12$

$\Rightarrow$ बिंदु $(0, h)$ से रेखा $4x + 3y - 12 = 0$ की दूरी 4 इकाई है।

अर्थात्
$$\left|\frac{0 + 3h - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right| = 4$$

$$\left[\because \text{ लंबवत् दूरी } d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ तथा } a = 4, b = 3, c = -12, x_1 = 0, y_1 = h\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{3h - 12}{5}\right| = 4$$

$$\Rightarrow \quad |3h - 12| = 20$$

$$\Rightarrow \quad 3h - 12 = \pm 20$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,
$$3h = 20 + 12$$

$$\Rightarrow \quad 3h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{3}$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,
$$3h = -20 + 12$$

$$\Rightarrow \quad 3h = -8 \Rightarrow h = -\frac{8}{3}$$

अतः Y-अक्ष पर बिंदु $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ या $\left(0, \frac{32}{3}\right)$ हैं।

प्रश्न 5. **मूलबिंदु से बिंदुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लांबिक दूरी ज्ञात कीजिए।**

यह एक बहुअवधारणा समस्या है। सर्वप्रथम, हम रेखा के समीकरण को दो बिंदुओं के सूत्र $\left((y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right)$ के प्रयोग द्वारा ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् मूलबिंदु से रेखा की दूरी को ज्ञात करेंगे।

हल बिंदुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ तथा $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की समीकरण,

$$y - \sin\theta = \frac{\sin\phi - \sin\theta}{\cos\phi - \cos\theta}(x - \cos\theta) \qquad \left(\begin{array}{l}\because\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ \text{यहाँ } x_1 = \cos\theta, y_1 = \sin\theta \\ \quad x_2 = \cos\phi, y_2 = \sin\phi\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y-\sin\theta = \frac{2\cos\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}{-2\sin\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}(x-\cos\theta)$$

$$\left[\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right.$$
$$\left. \text{तथा} \quad \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y-\sin\theta = \frac{\cos\frac{\phi+\theta}{2}}{-\sin\frac{\phi+\theta}{2}}(x-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad -y\sin\frac{\phi+\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\phi+\theta}{2} = x\cos\frac{\phi+\theta}{2}-\cos\theta\cos\frac{\phi+\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x\cos\frac{\phi+\theta}{2}+y\sin\frac{\phi+\theta}{2} = \sin\theta\sin\frac{\phi+\theta}{2}+\cos\theta\cos\frac{\phi+\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x\cos\frac{\phi+\theta}{2}+y\sin\frac{\phi+\theta}{2} = \cos\left(\theta-\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$[\because \cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B]$$

$$\Rightarrow \quad x\cos\frac{\phi+\theta}{2}+y\sin\frac{\phi+\theta}{2}-\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = 0$$

इसकी मूलबिंदु (0, 0) से दूरी,

$$p = \left|\frac{0+0-\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)}}\right| \qquad \left[\because p = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\right]$$

$$\Rightarrow \quad p = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \qquad (\because \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1)$$

प्रश्न 6. **रेखाओं $x-7y+5=0$ और $3x+y=0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से खींची गई और y-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

हल दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$x-7y+5=0 \qquad \ldots(\text{i})$$

तथा

$$3x+y=0 \qquad \ldots(\text{ii})$$

प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करने के लिए समी (i) तथा (ii), को हल करेंगे

$$x = 7y-5 \qquad [\text{समी (i) से}]$$

समी (ii) में x का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$3(7y-5)+y=0$$

$$\Rightarrow \quad 21y-15+y=0$$

$$\Rightarrow \quad 22y=15$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{15}{22}$$

$\therefore$ समी (i) से, $x = \frac{7 \times 15}{22} - 5 = \frac{105 - 110}{22}$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{5}{22}$

अतः बिंदु $\left(-\frac{5}{22}, \frac{15}{22}\right)$ है।

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

जहाँ, $(x_1, y_1) = \left(\frac{-5}{22}, \frac{15}{22}\right)$ तथा $m = \frac{1}{0}$ y-अक्ष के समांतर रेखा के लिए,

$$y - \frac{15}{22} = \frac{1}{0}\left(x + \frac{5}{22}\right)$$

$\Rightarrow$ $0 = x + \frac{5}{22}$

$\Rightarrow$ $22x + 5 = 0$

प्रश्न 7. **रेखा $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ पर लंबबिंदु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ यह रेखा y-अक्ष से मिलती है।**

रेखा $ax + by + c = 0$ के लंबवत् रेखा का समीकरण $bx - ay + k = 0$ होता है।

हल दी गई रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

$\Rightarrow$ $\frac{3x + 2y}{12} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$ ...(i)

यदि रेखा (i) Y-अक्ष को मिलती है, तब $x = 0$ समी (i) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$0 + 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$\therefore$ बिंदु (0, 6) है।

अब समी (i) के लंबवत् रेखा का समीकररण,

$2x - 3y + k = 0$ ...(ii)

रेखा (ii) बिंदु (0, 6) से होकर गुजरती है अतः ये इसे संतुष्ट करेगा।

अर्थात् $2 \times 0 - 3 \times 6 + k = 0 \Rightarrow k = 18$ ($\because x = 0, y = 6$ रखने पर)

अतः समी (ii) से,

$$2x - 3y + 18 = 0$$

प्रश्न 8. **रेखाओं $y - x = 0$, $x + y = 0$ और $x - k = 0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**

दी हुई रेखाओं की समीकरणों को साथ-साथ हल करने के द्वारा सर्वप्रथम हम त्रिभुज के शीर्षों को ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

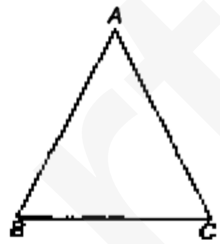
$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

हल माना दी गई रेखाएँ त्रिभुज की भुजाओं को प्रदर्शित करती हैं

$$AB : y - x = 0 \quad \dots(i)$$

$$BC : x + y = 0 \quad \dots(ii)$$

तथा $$CA : x - k = 0 \quad \dots(iii)$$



बिंदु A के लिए, समी (i) तथा (iii) को हल करने पर हम $A(k, k)$ प्राप्त करते हैं।

बिंदु B के लिए, समी (i) तथा (ii) को हल करने पर हम $B(0, 0)$ प्राप्त करते हैं।

बिंदु C के लिए, समी (ii) तथा (iii) को हल करने पर हम $C(k, -k)$ प्राप्त करते हैं।

अतः अभीष्ट बिंदु निम्न हैं $A(k, k), B(0, 0), C(k, -k)$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[k(0 + k) + 0(-k - k) + k(k - 0)]$

$$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[k^2 + k^2] = \frac{2k^2}{2} = k^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 9. p **का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ** $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ **और** $2x - y - 3 = 0$ **एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करें।**

यदि रेखाएँ एक ही बिंदु पर मिलती है, तब उन्हें संगामी रेखाएँ कहते हैं।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x + y - 2 = 0 \quad \dots(i)$$

$$px + 2y - 3 = 0 \quad \dots(ii)$$

तथा $$2x - y - 3 = 0 \quad \dots(iii)$$

समी (i) तथा (iii) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं

$$5x - 5 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x = 1$$

$\therefore$ समी (i) से, $$3 \times 1 + y - 2 = 0 \quad (\because x = 1 \text{ रखने पर})$$

$\Rightarrow$ $$y = -1$$

अतः बिंदु $(1, -1)$ है।

यह बिंदु रेखा (ii) को संतुष्ट करेगा अर्थात्

$$p \times 1 + 2(-1) - 3 = 0 \Rightarrow p - 2 - 3 = 0 \quad (x = 1, y = -1 \text{ रखने पर})$$

$\Rightarrow$ $$p = 5$$

प्रश्न 10. **यदि तीन रेखाएँ, जिनके समीकरण** $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ **और** $y = m_3x + c_3$ **हैं, संगामी हैं, तो दिखाइए कि**

$$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

हल दी गई रेखाओं की समीकरण,

$$y = m_1x + c_1 \qquad \ldots(i)$$
$$y = m_2x + c_2 \qquad \ldots(ii)$$
$$y = m_3x + c_3 \qquad \ldots(iii)$$

समी (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$m_1x + c_1 = m_2x + c_2$$
$$\Rightarrow \quad m_1x - m_2x = c_2 - c_1$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$$

समी (i) से,
$$y = m_1\left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}\right) + \frac{c_1}{1}$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{m_1c_2 - m_1c_1 + m_1c_1 - m_2c_1}{m_1 - m_2}$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}$$

समी (iii) में, x तथा y के मानों को रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} = m_3\left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}\right) + \frac{c_3}{1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} \quad \frac{m_3c_2 - m_3c_1 + m_1c_3 - m_2c_3}{m_1 - m_2}$$
$$\Rightarrow \quad m_1c_2 - m_2c_1 = m_3c_2 - m_3c_1 + m_1c_3 - m_2c_3$$
$$\Rightarrow \quad m_1c_2 - m_2c_1 - m_3c_2 + m_3c_1 - m_1c_3 + m_2c_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

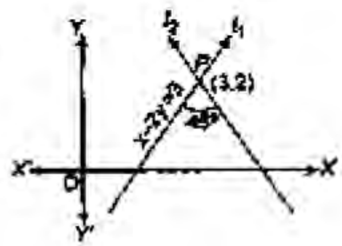
इति सिद्धम्

प्रश्न 11. **बिंदु (3, 2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - 2y = 3$ से $45°$ का कोण बनाती है।**

दो रेखाओं के बीच का कोण $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ होता है जहाँ m_1 तथा m_2 रेखाओं की प्रवणताएँ हैं।

हल रेखा l_1 की समीकरण

$$x - 2y = 3 \qquad \ldots(i)$$



समी (i) की प्रवणता,

$$m_1 = -\left(\frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$$

दो रेखाओं के बीच का कोण,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

दिया है, $\theta = 45°, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = m$ (माना)

$$\therefore \quad \tan 45° = \left|\frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{1-2m}{2+m}\right| \Rightarrow \frac{1-2m}{2+m} = \pm 1$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\frac{1-2m}{2+m} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2m = 2 + m$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2 = 3m$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{3}$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\frac{1-2m}{2+m} = -1$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2m = -2 - m$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2 = 2m - m$$

$$\Rightarrow \quad m = 3$$

अब, रेखा l_2 का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

$$\Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \qquad \left(\text{यहाँ } m = -\frac{1}{3}, x_1 = 3, y_1 = 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y - 6 = -x + 3$$

$$\Rightarrow \quad x + 3y - 9 = 0$$

पुनः

$$y - 2 = 3(x - 3) \qquad \left(\text{यहाँ } m = 3, x_1 = 3, y_1 = 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y - 9 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y - 7 = 0$$

प्रश्न 12. **रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अंत:खंड बनाती है।**

सर्वप्रथम, दी गई रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् रेखा के अंत:खंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण, $4x + 7y - 3 = 0$ ...(i)

तथा $2x - 3y + 1 = 0$ ...(ii)

समी (ii) से,

$$3y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

समी (i) में रखने पर हम पाते हैं,

$$4x + 7\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x + \frac{14}{3}x + \frac{7}{3} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{12x + 14x}{3} + \frac{7-9}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{26x - 2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{26} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{13}$$

x का मान समी (i) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{4}{13} + 7y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7y = 3 - \frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 7y = \frac{39 - 4}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 7y = \frac{35}{13} \Rightarrow y = \frac{5}{13}$$

अतः बिंदु $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ है।

अब, अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots\text{(iii)}$$

चूँकि रेखा (iii) अक्षों पर बराबर अंतःखंड रखती है अर्थात् $a = b$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y = a \qquad \ldots\text{(iv)}$$

उपरोक्त रेखा बिंदु $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ से होकर गुजरती है अर्थात् बिंदु इसे संतुष्ट करेगा।

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13} = a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6}{13}$$

अतः रेखा (iv) की अभीष्ट समीकरण निम्न होगी,

$$x + y = \frac{6}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 13x + 13y = 6$$

प्रश्न 13. दर्शाइए कि मूलबिंदु से जाने वाली और रेखा $y = mx + c$ से θ कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण $\frac{y}{x} = \pm \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$ है।

दो रेखाओं के बीच का कोण $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ है।

हल दी गई रेखा की प्रवणता m तथा अन्य रेखा की प्रवणता माना m_2 है, तब दो रेखाओं के बीच का कोण है,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$\Rightarrow$ $$\tan\theta = \left|\frac{m - m_2}{1 + m m_2}\right| \qquad (\because m_1 = m)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{m - m_2}{1 + m m_2} = \pm \tan\theta$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\frac{m - m_2}{1 + m m_2} = \frac{\tan\theta}{1}$$

$\Rightarrow$ $$m - m_2 = \tan\theta + m m_2 \tan\theta$$

$\Rightarrow$ $$m - \tan\theta = m_2 + m m_2 \tan\theta$$

$\Rightarrow$ $$m_2 (1 + m \tan\theta) = m - \tan\theta$$

$\Rightarrow$ $$m_2 = \frac{m - \tan\theta}{1 + m\tan\theta} \qquad \ldots(i)$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\frac{m - m_2}{1 + m m_2} = \frac{-\tan\theta}{1}$$

$\Rightarrow$ $$m - m_2 = -\tan\theta - m m_2 \tan\theta$$

$\Rightarrow$ $$m + \tan\theta = m_2 - m m_2 \tan\theta$$

$\Rightarrow$ $$m + \tan\theta = m_2 (1 - m\tan\theta)$$

$\Rightarrow$ $$m_2 = \frac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta} \qquad \ldots(ii)$$

$\therefore$ समी (i) तथा (ii) से, $$m_2 = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}$$

बिंदु (0, 0) से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग से,

जहाँ, $m = m_2$

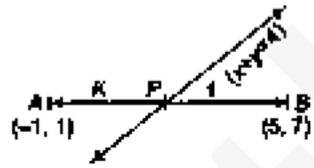
$\therefore$ $$y - 0 = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}(x - 0)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}$$

प्रश्न 14. (−1, 1) और (5, 7) को मिलाने वाली रेखाखंड $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?

आंतरिक रूप में विभाजन सूत्र $P(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ का प्रयोग करेंगे तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल माना बिंदु P, बिंदुओं $A(-1, 1)$ तथा $B(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखाओं को अनुपात $K : 1$ विभक्त करता है।



तब, $$P = \left(\frac{K \times x_2 + 1 \times x_1}{K+1}, \frac{K \times y_2 + 1 \times y_1}{K+1}\right)$$

$(\because x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 5, y_2 = 7)$

$$= \left(\frac{K \times 5 + 1 \times (-1)}{K+1}, \frac{K \times 7 + 1 \times 1}{K+1}\right) = \left(\frac{5K-1}{K+1}, \frac{7K+1}{K+1}\right)$$

बिंदु P, रेखा $x + y = 4$ को संतुष्ट करेगा।

अर्थात् $$\frac{5K-1}{K+1} + \frac{7K+1}{K+1} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5K - 1 + 7K + 1}{K+1} = 4$$

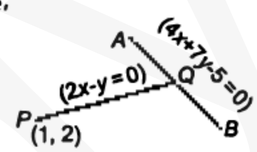
$$\Rightarrow \quad 12K = 4K + 4$$

$$\Rightarrow \quad 8K = 4 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

अत: अभीष्ट अनुपात $= K : 1 = 1 : 2$ (अंत: विभाजित) है।

प्रश्न 15. बिंदु $(1, 2)$ से रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ की $2x - y = 0$ के अनुदिशा दूरी ज्ञात कीजिए।

हल रेखा AB का समीकरण है,



$$4x + 7y + 5 = 0 \quad \ldots\text{(i)}$$

तथा PQ का समीकरण है, $$2x - y = 0 \quad \ldots\text{(ii)}$$

Q के निर्देशांक ज्ञात करने हेतु,

समी (ii) से $y = 2x$ समी (i) में रखने पर,

$$4x + 7(2x) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{5}{18}$$

$x = -\frac{5}{18}$ समी (ii) में रखने पर,

$$2\left(-\frac{5}{18}\right) - y = 0 \quad \Rightarrow y = -\frac{5}{9}$$

$\therefore$ Q के निर्देशांक $= \left(-\frac{5}{18}, -\frac{5}{9}\right)$

QP की लम्बाई $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{5}{18}\right)^2+\left(2+\frac{5}{9}\right)^2} \qquad \left[\because x_1=-\frac{5}{18}, y_1=-\frac{5}{9} \atop x_2=1 \quad y_2=2\right]$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23}{18}\right)^2+\left(\frac{23}{9}\right)^2} = \frac{23}{9}\sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{23}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{23}{18}\sqrt{5} \text{ वर्ग इकाई}$$

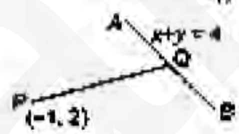
प्रश्न 16. बिंदु (– 1, 2) से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेद बिंदु से 3 इकाई की दूरी पर है।

हल एक रेखा की समीकरण, जो बिंदु $P(-1, 2)$ से होकर जाती है तथा प्रवणता m रखती है, है

$$y - 2 = m(x + 1) \qquad \left[\because y - y_1 = m(x - x_1) \atop \text{जहाँ, } x_1 = -1, y_1 = 2\right]$$

$$y = mx + m + 2 \qquad \ldots(i)$$

अब, रेखा AB तथा PQ के प्रतिच्छेद बिंदु को ज्ञात करते हैं।



समी (i) से y का मान समीकरण $x + y = 4$ में रखने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x + mx + m + 2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x(1 + m) = 2 - m \Rightarrow x = \frac{2 - m}{1 + m}$$

$\therefore$ समी (i) से, $y = m\left(\frac{2-m}{1+m}\right) + m + 2 = \frac{2m - m^2 + m + m^2 + 2 + 2m}{1 + m} = \frac{2 + 5m}{1 + m}$

$\therefore$ Q के निर्देशांक $= \left(\frac{2-m}{1+m}, \frac{2+5m}{1+m}\right)$

$\because PQ$ के बीच की दूरी = 3 (दिया है)

$$\Rightarrow \quad (PQ)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2-m}{1+m}+1\right)^2 + \left(\frac{2+5m}{1+m}-2\right)^2 = 9 \qquad \left[\because x_1 = -1, \quad y_1 = 2, \atop x_2 = \frac{2-m}{1+m}, \quad y_2 = \frac{2-5m}{1+m}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{1+m}\right)^2 + \left(\frac{3m}{1+m}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad 9 + 9m^2 = 9(1 + m)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + m^2 = 1 + 2m + m^2$$

$$\Rightarrow \quad 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

$\therefore$ PQ की प्रवणता शून्य है अर्थात् ये x-अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 17. समकोण त्रिभुज के कर्ण के सीमांत बिंदु (1, 3) और (– 4, 1) हैं। त्रिभुज के पाद (समकोणीय भुजाओं) के समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के समांतर हैं।

हल सर्वप्रथम, हम बिंदुओं $A(1, 3)$ तथा $B(-4, 1)$ को XY-तल में अंकित करते हैं। बिंदु $A(1, 3)$, से हम Y-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं तथा बिंदु $B(-4, 1)$, से हम X-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं। इन दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदित बिंदु C पर है जोकि C पर समकोण है।

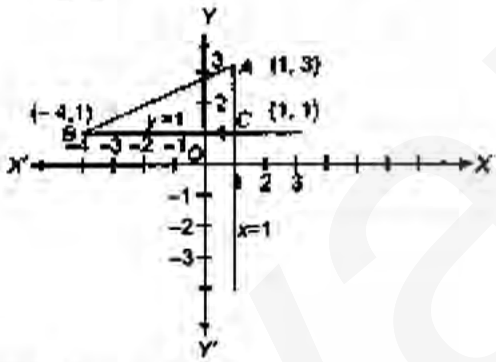
$\therefore$ C के निर्देशांक (1, 1) होंगे।

$\therefore$ रेखा AC का समीकरण, जो बिंदु $A(1, 3)$ तथा $C(1, 1)$ से होकर जाती है।

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\therefore$ $$y - 3 = \frac{1-3}{1-1}(x-1) \Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{0}(x-1)$$

$\Rightarrow$ $$x = 1$$



रेखा BC का समीकरण है,

$$y - 1 = \frac{1-1}{1+4}(x-1) \Rightarrow y - 1 = \frac{0}{1+4}(x-1)$$

$\Rightarrow$ $$y - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $$y = 1$$

अतः त्रिभुज के पाद $x = 1$ तथा $y = 1$ हैं।

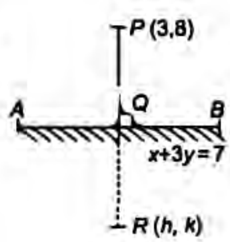
प्रश्न 18. किसी बिंदु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिंदु (3, 8) का रेखा $x + 3y = 7$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

यह एक बहु अवधारणा प्रश्न है। अतः सर्वप्रथम दी हुई रेखा के लंबवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् इन दोनों का प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात करेंगे और अंत में मध्य-बिंदु अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण, $x + 3y = 7$ ...(i)

यहाँ रेखा की प्रवणता, $m_1 = -\frac{1}{3}$ है।

माना $P(3, 8)$ दिया गया बिंदु है जिसके लिए प्रतिबिंब ज्ञात करना है।



यहाँ, $PQ \perp AB$

$PQ \times$ की प्रवणता $\times$ AB की प्रवणता $= -1$

माना PQ की प्रवणता m है।

$\therefore$ $$m \times \left(\frac{-1}{3}\right) = -1 \qquad [\because m_1 m_2 = -1]$$

$\Rightarrow$ $$m = 3$$

अब, PQ रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

जहाँ, $(x_1, y_1) = (3, 8)$ तथा $m = 3$ है।

$$y - 8 = 3(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad y - 8 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y - 1 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

बिंदु Q को ज्ञात करने के लिए समी (i) से $x = 7 - 3y$ समी (ii) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\Rightarrow \quad 3(7 - 3y) - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 21 - 9y - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20 - 10y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{20}{10}$$

$$\Rightarrow \quad y = 2$$

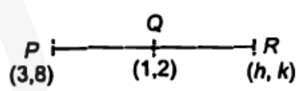
$\therefore$ समी (i) से, $x = 7 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$

$\therefore$ Q के निर्देशांक $= (1, 2)$

माना प्रतिबिंब $R(h, k)$, है, चूँकि रेखा एक समतल दर्पण है, अतः बिंदु Q मध्य-बिंदु होगा अर्थात् $Q\,(1, 2)$ होगा।

अब, $P(3, 8)$ तथा $R(h, k)$ का मध्य-बिंदु $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + h}{2}, \frac{8 + k}{2}\right)$ है।

निर्देशांक $Q(1, 2)$ के साथ तुलना करने पर,



$$\frac{3 + h}{2} = 1 \quad \text{और} \quad \frac{8 + k}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 3 + h = 2 \quad \text{तथा} \quad 8 + k = 4$$

$$\Rightarrow \quad h = 2 - 3 \quad \text{तथा} \quad k = 4 - 8$$

$$\Rightarrow \quad h = -1 \quad \text{तथा} \quad k = -4$$

अतः बिंदु P का प्रतिबिंब $R(-1, -4)$ है।

प्रश्न 19. **यदि रेखाएँ $y = 3x + 1$ और $2y = x + 3$ पर समान रूप से आनत हों, तो m का मान ज्ञात कीजिए।**

दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखाओं $y = 3x + 1$ तथा $y = mx + 4$ के बीच का कोण θ है।

यहाँ, रेखाओं की प्रवणताएँ $m_1 = 3$ व $m_2 = m$ हैं।

$$\tan\theta = \left|\frac{3 - m}{1 + 3m}\right| \qquad \left(\because \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|\right) \quad \ldots(i)$$

पुनः दिया है कि रेखाओं $2y = x + 3$ तथा $y = mx + 4$ के बीच का कोण θ है।
यहाँ, प्रवणताएँ $m_1 = \frac{1}{2}$ तथा $m_2 = m$ है।

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2} \times m}\right| \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$\left|\frac{3-m}{1+3m}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{m}{2}}\right| \Rightarrow \frac{3-m}{1+3m} = \pm\left(\frac{1-2m}{2+m}\right)$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\Rightarrow \qquad (3-m)(2+m) = (1-2m)(1+3m)$$
$$\Rightarrow \qquad 6 + 3m - 2m - m^2 = 1 + 3m - 2m - 6m^2$$
$$\Rightarrow \qquad 6 = 1 - 5m^2$$
$$\Rightarrow \qquad 5m^2 = 1 - 6$$
$$m^2 = \frac{-5}{5} \text{ जोकि असंभव है।} \qquad (\because m^2 \geq 0)$$

पुनः ऋणात्मक चिन्ह लेने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{3-m}{1+3m} = -\frac{1-2m}{2+m}$$
$$\Rightarrow \qquad (3-m)(2+m) = (2m-1)(1+3m)$$
$$\Rightarrow \qquad 6 + 3m - 2m - m^2 = 2m + 6m^2 - 1 - 3m$$
$$\Rightarrow \qquad 6 + m - m^2 = 6m^2 - m - 1$$
$$\Rightarrow \qquad 6m^2 - m - 1 - 6 - m + m^2 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad 7m^2 - 2m - 7 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 7 \times 7}}{2 \times 7} \qquad \left[\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$
$$\Rightarrow \qquad = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+49}}{2 \times 7} = \frac{1 \pm \sqrt{50}}{7} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$$

नोट: जब हम मापांक का चिह्न हटाते हैं, तब हम ± चिह्न का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 20. यदि एक चर बिंदु $P(x, y)$, की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 रहें, तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ की दूरी के सूत्र, $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ का प्रयोग करेंगे तत्पश्चात् हल करेंगे।

हल दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$x + y - 5 = 0 \quad \dots(i)$$

तथा
$$3x - 2y + 7 = 0 \quad \dots(ii)$$

दिया है कि, एक चर बिंदु $P(x, y)$ की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 है।

$$\therefore \quad \left|\frac{x + y - 5}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}\right| + \left|\frac{3x - 2y + 7}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = 10 \qquad \left(\because \text{लांबिक दूरी } d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}} + \frac{3x - 2y + 7}{\sqrt{13}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{13}\,(x + y - 5) + \sqrt{2}\,(3x - 2y + 7) = 10\sqrt{2}\,\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \quad x(\sqrt{13} + 3\sqrt{2}) + y(\sqrt{13} - 2\sqrt{2}) - 5\sqrt{13} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \quad x(\sqrt{13} + 3\sqrt{2}) + y(\sqrt{13} - 2\sqrt{2}) + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{13} - 10\sqrt{26} = 0$$

जोकि $ax + by + c = 0$ के रूप का है।

अतः यह एक रेखा को प्रदर्शित करती है।

> **नोट** *यहाँ पर बिंदु (x_1, y_1), बिंदु (x, y) के रूप में दिए हुए है, अतः विद्यार्थियों को किसी भी तरह की समस्या नहीं होनी चाहिए।*

प्रश्न 21. समांतर रेखाओं $9x + 6y - 7 = 0$ और $3x + 2y + 6 = 0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

किसी भी रेखा $ax + by + c = 0$ के समांतर रेखा $ax + by + k = 0$ का प्रयोग करेंगे तथा इस दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी $\left|\dfrac{c - k}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ होगी।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$9x + 6y - 7 = 0$$

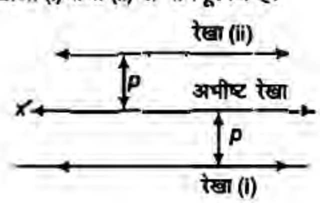
या
$$3x + 2y - \frac{7}{3} = 0 \quad \dots(i)$$

तथा
$$3x + 2y + 6 = 0 \quad \dots(ii)$$

रेखा की समीकरण जो सभी (i) या (ii) के समांतर है,

$$3x + 2y + k = 0 \quad \dots(iii)$$

अब दिया है कि रेखा (iii) रेखाओं (i) तथा (ii) से समदूरस्थ है।



अर्थात्   रेखाओं (i) तथा (ii) के बीच दूरी = रेखाओं (ii) तथा (iii) के बीच की दूरी

$\therefore \quad \left|\dfrac{k+\dfrac{7}{3}}{\sqrt{3^2+2^2}}\right| = \left|\dfrac{k-6}{\sqrt{3^2+2^2}}\right|$

$\left(\because \text{ समांतर रेखाओं के बीच की दूरी } \left|\dfrac{c-d}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \text{ है}\right)$

$\Rightarrow \quad \left|k+\dfrac{7}{3}\right| = |k-6|$

$\Rightarrow \quad k+\dfrac{7}{3} = \pm (k-6)$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$\Rightarrow \quad k+\dfrac{7}{3} = -k+6$

$\Rightarrow \quad 2k = 6-\dfrac{7}{3}$

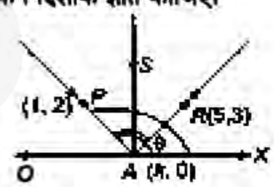
$\Rightarrow \quad 2k = \dfrac{11}{3}$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{11}{6}$

अतः समी (iii) से, $\quad 3x+2y+\dfrac{11}{6}=0 \quad \left(k=\dfrac{11}{6} \text{ रखने पर}\right)$

$\therefore$ $18x+12y+11=0$ अभीष्ट रेखा की समीकरण है।

प्रश्न 22. **बिंदु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण X-अक्ष के बिंदु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिंदु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।**



हल चित्र में PA आपतित किरण तथा AR परावर्तित किरण है, जो X-अक्ष से θ कोण बनाती है।

चित्र से यह स्पष्ट है कि,

$$AS \perp OX$$

इसका अर्थ है कि AS, $\angle PAR$ को समद्विभाजित करती है।

तब, $\quad \angle PAS = \angle RAS$

$\Rightarrow \quad \angle RAX = \angle PAO = \theta \quad$ [माना]

$\Rightarrow \quad \angle XAP = 180° - \theta$

AR की प्रवणता $= \tan\theta = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{3-0}{5-k}$ [जहाँ बिंदु $A(k, 0)$ है।] ...(i)

AP की प्रवणता $= \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{2-0}{1-k}$ ...(ii)

$\therefore$ समी (i) तथा (ii) से,

$$\frac{3}{5-k} = -\frac{2}{1-k} \Rightarrow 3-3k = -10+2k$$

$$\Rightarrow \qquad 5k = 13 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{13}{5}$$

अतः A के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ हैं।

प्रश्न 23. दिखाइए कि $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ और $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ बिंदुओं से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ पर खींचे गए लंबों की लंबाइयों का गुणनफल b^2 है।

हल दी गई रेखा की समीकरण है।

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{bx\cos\theta + ay\sin\theta}{ab} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$$

$$\Rightarrow \qquad bx\cos\theta + ay\sin\theta - ab = 0 \qquad \ldots(\text{i})$$

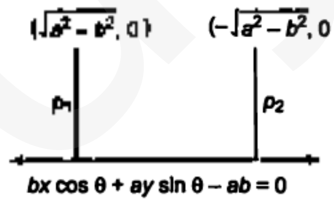
रेखा (i) से बिंदु $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ पर लंबवत् दूरी है,

$$p_1 = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - 0 - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right|$$

$$[\because A = b\cos\theta, B = a\sin\theta, C = -ab;\ x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}, y_1 = 0]$$

तथा रेखा (ii) से बिंदु $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ पर लंबवत् दूरी है।

$$p_2 = \left|\frac{-b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| \qquad \left(\begin{array}{l}\because A = b\cos\theta,\ B = a\sin\theta, \\ C = -ab, x_1 = -\sqrt{a^2 - b^2}, y_1 = 0\end{array}\right)$$



$$\therefore \qquad p_1p_2 = \left|\frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| \times \left|\frac{-b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right|$$

$$= \frac{b\left|\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - a\right| \times b\left|\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta + a\right|}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}$$

$$= \frac{b^2\left|(a^2 - b^2)\cos^2\theta - a^2\right|}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)} \qquad [\because (A + B)(A - B) = A^2 - B^2]$$

$$= \frac{b^2 |a^2 \cos^2\theta - b^2 \cos^2\theta - a^2|}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{b^2 |a^2 (\cos^2\theta - 1) - b^2 \cos^2\theta|}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 p_2 = \frac{b^2 |-a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta|}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{b^2 |a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta|}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)} \qquad (\because |-A| = |A|)$$

$$\therefore \quad p_1 p_2 = b^2$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 24. एक व्यक्ति समीकरणों $2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 5 = 0$ से निरूपित सरल रेखीय पथों के संधि बिंदु (junction/crossing) पर खड़ा है और समीकरण $6x - 7y + 8 = 0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए सरल रेखीय पथों की समीकरण,

$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad \ldots(i)$$

तथा

$$3x + 4y - 5 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

संधि बिंदु के लिए, समी (i) से, $2x = -4 + 3y$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-4 + 3y}{2}$$

x का मान समी (ii) में रखने पर, $3\left(\frac{-4 + 3y}{2}\right) + 4y - 5 = 0$

$$\Rightarrow \quad -12 + 9y + 8y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 17y - 22 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{22}{17}$$

समी (i) में $y = \frac{22}{17}$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

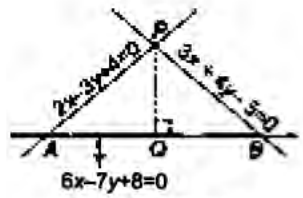
$$2x - 3\left(\frac{22}{17}\right) + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 + \frac{66}{17}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{-68 + 66}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{17}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{1}{17} \text{ तथा } y = \frac{22}{17}$$

माना व्यक्ति बिंदु P पर खड़ा है, तब वह न्यूनतम समय में पथ AB पर पहुँच सकता है। यदि वह इसकी ओर सीधे जाए अर्थात् इसके लंबवत्। इसका अर्थ कि हमें PQ की समीकरण को ज्ञात करना है।



$\because$ रेखा $PQ \perp$ रेखा AB

$\therefore$ PQ की प्रवणता $\times$ AB की प्रवणता $= -1$

$\Rightarrow \quad m \times -\left(\dfrac{6}{-7}\right) = -1 \quad \left[\because \text{ रेखा } 6x - 7y + 8 = 0 \text{ की प्रवणता } -\left(\dfrac{6}{-7}\right) \text{ है}\right]$

$\Rightarrow \quad m \times \dfrac{6}{7} = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{7}{6}$

PQ का समाकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग से,

जहाँ, $(x_1, y_1) = \left(-\dfrac{1}{17}, \dfrac{22}{17}\right)$ तथा $m = -\dfrac{7}{6}$

$$y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6}\left(x + \frac{1}{17}\right) \Rightarrow \frac{17y - 22}{17} = -\frac{7}{6}\left(\frac{17x + 1}{17}\right)$$

$\Rightarrow \quad 6 \times 17y - 22 \times 6 = -7 \times 17x - 7$

$\Rightarrow \quad 102y - 132 = -119x - 7$

$\Rightarrow \quad 119x + 102y - 132 + 7 = 0$

$\Rightarrow \quad 119x + 102y - 125 = 0$