गणित

(कक्षा 12)

प्रश्न 1:

निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, \ldots, 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $R = \{(x, y): y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y): y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(x, y): x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y): x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y): x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y): x, y$ से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$

(d) $R = \{(x, y): x, y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y): x, y$ के पिता है$\}$

उत्तर 1:

(i) $A = \{1, 2, 3 \ldots 13, 14\}$

$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$

$\therefore R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R सममित नहीं है क्योंकि $(1, 1), (2, 2) \ldots (14, 14) \notin R$.

तथा, R सममित नहीं है क्योंकि $(1, 3) \in R$, लेकिन $(3, 1) \notin R$. $[3(3) - 1 \neq 0]$

तथा, R संक्रामक नहीं है क्योंकि $(1, 3), (3, 9) \in R$, लेकिन $(1, 9) \notin R$. $[3(1) - 9 \neq 0]$

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

(ii) $R = \{(x, y): y = x + 5$ तथा $x < 4\} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

क्योंकि $(1, 1) \notin R$, $\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

तथा $(1, 6) \in R$ लेकिन $(1, 6) \notin R$. $\therefore$ R सममित नहीं है।

किसी भी युग्म के लिए संबंध R में, $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$ के लिए $(x, z) \in R$ नहीं है।

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही सक्रामक है।

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$R = \{(x, y):$ y भाज्य है x से $\}$

हम जानते हैं कि प्रत्येक संख्या स्वयं से भाज्य होती है, इसलिए $(x, x) \in R$

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

अब, $(2, 4) \in R$ [क्योंकि 4 भाज्य है 2 से]

लेकिन $(4, 2) \notin R$. [क्योंकि 2 भाज्य नहीं है 4 से]

$\therefore$ R सममित नहीं है।

माना, $(x, y), (y, z) \in R$, इसलिए y भाज्य है x से और z भाज्य है y से। $\therefore z$ भाज्य है x से,

$\Rightarrow (x, z) \in R$. $\therefore$ R संक्रामक है।

अतः, R स्वतुल्य और संक्रामक हैं लेकिन सममित नहीं है।

(iv) $R = \{(x, y): x - y$ एक पूर्णांक है$\}$

यहाँ, प्रत्येक $x \in Z$ के लिए, $(x, x) \in R$ क्योंकि $x - x = 0$ एक पूर्णांक है। $\therefore$ R स्वतुल्य है।

माना संख्याएँ $x, y \in Z$, यदि $(x, y) \in R$, तब $x - y$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow -(x - y)$ भी एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow (y - x)$ भी एक पूर्णांक है।

$\therefore (y, x) \in R$, इसलिए R सममित है।

अब, माना (x, y) और $(y, z) \in R$, जहाँ $x, y, z \in Z$.

https://www.evidyarthi.in/

⇒ $(x - y)$ और $(y - z)$ पूर्णांक हैं।
⇒ $x - z = (x - y) + (y - z)$ पूर्णांक है।
∴ $(x, z) \in R$ इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।
(v)
(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$
⇒ $(x, x) \in R$ (क्योंकि x और x एक ही स्थान पर कार्य करते हैं)
∴ R स्वतुल्य है।
यदि $(x, y) \in R$, तब x और y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ y और x एक ही स्थान पर कार्य करते हैं ।
⇒ $(y, x) \in R$,
∴ R सममित है।
अब, माना $(x, y), (y, z) \in R$
⇒ x और y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं तथा y और z एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ x और z एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ $(x, z) \in R$
∴ R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।
(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$
यहाँ, $(x, x) \in R$ क्योंकि x और x एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
∴ R स्वतुल्य है।
यदि $(x, y) \in R$, तब x और y एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ y और x एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ $(y, x) \in R$
∴ R सममित है।
अब, माना $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$
⇒ x और y एक ही मोहल्ले में रहते हैं तथा y और z एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ x और z एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ $(x, z) \in R$
∴ R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।
(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$
यहाँ, $(x, x) \notin R$
क्योंकि कोई भी स्वयं से ही लंबा नहीं हो सकता है।
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना $(x, y) \in R$. ⇒ x, y से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है।
इसलिए, y, x से छोटा है अर्थात लंबा नहीं है। ∴ $(y, x) \notin R$
इसीप्रकार यदि x, y से ठीक 7 सेमी लंबा है तो y, x से 7 सेमी छोटा है अर्थात लंबा नहीं है।
∴ R सममित नहीं है।
अब, माना (x, y) और $(y, z) \in R$.
⇒ x, y से ठीक 7 सेमी लंबा है तथा y, z से ठीक 7 सेमी लंबा है।
⇒ x, z से 14 सेमी लंबा है। ∴ $(x, z) \notin R$
∴ R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।
(d) $R = = \{(x, y) : x, y$ की पत्नी है$\}$

https://www.evidyarthi.in/

अब, $(x, x) \notin R$, क्योंकि कोई भी स्वयं की ही पत्नी नहीं हो सकती है।
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$ की पत्नी है।
तो y, x की पत्नी नहीं है बल्कि उसका पति है। $\therefore (y, x) \notin R$
$\therefore$ R सममित नहीं है।
माना (x, y) और $(y, z) \in R$
$\Rightarrow x, y$ की पत्नी है तथा y, z की पत्नी है। परन्तु, यह संभव नहीं है। इसलिए x, z की पत्नी नहीं है।
$\therefore (x, z) \notin R$
$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।
अतः R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।
(ii) $R = \{(x, y): x, y$ के पिता है$\}$
$(x, x) \notin R$, क्योंकि कोई इन्सान खुद का ही पिता नहीं हो सकता है।
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना $(x, y) \in R$,
$\Rightarrow x, y$ का पिता है।
$\Rightarrow y, x$ का पिता नहीं हो सकता है बल्कि y, x का पुत्र या पुत्री है।
$\therefore (y, x) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
अब, माना $(x, y) \in R$ और $(y, z) \in R$,
$\Rightarrow x, y$ का पिता है तथा y, z का पिता है।
$\Rightarrow x, z$ का पिता नहीं है बल्कि x, z का दादा है।
$\therefore (x, z) \notin R$, इसलिए R संक्रामक नहीं है।
अतः R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 2:
सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b): a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

उत्तर 2:
$R = \{(a, b): a \leq b^2\}$
यहाँ, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$, क्योंकि, $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, $(1, 4) \in R$ क्योंकि $1 < 4^2$ लेकिन, 4, 1^2 से छोटा नहीं है।
$\therefore (4, 1) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
यहाँ, $(3, 2), (2, 1.5) \in R$ [क्योंकि $3 < 2^2 = 4$ तथा $2 < (1.5)^2 = 2.25$]
लेकिन, $3 > (1.5)^2 = 2.25$
$\therefore (3, 1.5) \notin R$, इसलिए R संक्रामक नहीं है।
अतः R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही सक्रामक है।

प्रश्न 3:
जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b): b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

उत्तर 3:
माना $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
प्रश्नानुसार, संबंध $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ इसलिए $(a, a) \notin R$, जहाँ $a \in A$.

https://www.evidyarthi.in/

क्योंकि, $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \notin R$
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
यहाँ $(1, 2) \in R$, लेकिन $(2, 1) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
अब, $(1, 2), (2, 3) \in R$ लेकिन, $(1, 3) \notin R$, इसलिए R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a, b): a \leq b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

उत्तर 4:
$R = \{(a, b): a \leq b\}$
यहाँ $(a, a) \in R$ [क्योंकि $a = a$]
$\therefore$ R स्वतुल्य है।
अब, $(2, 4) \in R$ (क्योंकि $2 < 4$) लेकिन, $(4, 2) \notin R$ क्योंकि $4 > 2$.
$\therefore$ R सममित नहीं है।
अब, माना $(a, b), (b, c) \in R$, तब, $a \leq b$ और $b \leq c$
$\Rightarrow a \leq c \Rightarrow (a, c) \in R$,
इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

प्रश्न 5:
जाँच कीजिए कि क्या R में $R = \{(a, b): a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

उत्तर 5:
$R = \{(a, b): a \leq b^2\}$
प्रश्नानुसार, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$, क्योंकि, $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, $(1, 2) \in R$ (क्योंकि $1 < 2^2 = 8$) लेकिन $(2, 1) \notin R$ (as $2^2 > 1$)
$\therefore$ R सममित नहीं है।
यहाँ, $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right) \in R$, क्योंकि $3 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$ और $\frac{3}{2} < \left(\frac{6}{5}\right)^2$ लेकिन $\left(3, \frac{6}{5}\right) \notin R$ क्योंकि $3 > \left(\frac{6}{5}\right)^2$
$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 6:
सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$, द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

उत्तर 6:
माना $A = \{1, 2, 3\}$,
संबंध $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
यहाँ $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \notin R$.
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, क्योंकि $(1, 2) \in R$ और $(2, 1) \in R$, इसलिए R सममित है।
तथा, $(1, 2)$ और $(2, 1) \in R$, लेकिन, $(1, 1) \notin R$
$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।
अतः, R सममित है लेकिन न स्वतुल्य हैं और न ही संक्रामक है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y): x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

उत्तर 7:

A पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय है।

$R = \{x, y): x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$

यहाँ, R स्वतुल्य है, अर्थात $(x, x) \in R$ क्योंकि x और x में पेजों की संख्या समान है।

माना $(x, y) \in R \Rightarrow x$ और y में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow y$ और x में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow (y, x) \in R$, इसलिए R सममित है।

अब, माना $(x, y) \in R$ और $(y, z) \in R$.

$\Rightarrow x$ और y में पेजों की संख्या समान है तथा y और z में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow x$ और z में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow (x, z) \in R$, इसलिए R संक्रामक है।

अतः, R एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 8:

सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b): |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

उत्तर 8:

यहाँ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और संबंध $R = \{(a, b): |a - b|$ सम है$\}$

प्रश्न के अनुसार, सभी $a \in A$ के लिए $|a - a| = 0$ (जो की सम है),

$\therefore R$ स्वतुल्य है।

माना $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$ सम है।

$\Rightarrow |-(a - b)| = |b - a|$ भी सम है। $\Rightarrow (b, a) \in R$, इसलिए R सममित है।

अब, माना $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R$.

$\Rightarrow |a - b|$ सम है और $|b - c|$ सम है। $\Rightarrow (a - b)$ सम है और $(b - c)$ सम है।

$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c)$ सम है। [क्योंकि दो सम संख्याओं का योग सम होता है]

$\Rightarrow |a - b|$ सम है $\Rightarrow (a, c) \in R$, इसलिए R संक्रामक है।

अतः, R एक तुल्यता संबंध है।

समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है क्योंकि इसके सभी अवयव विषम हैं। विषम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।

इसीप्रकार, समुच्चय $\{2, 4$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव सम हैं। सम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।

समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव समुच्चय $\{2, 4\}$ के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, क्योंकि समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव विषम है तथा समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव सम हैं। सम और विषम संख्याओं का अंतर सदैव विषम होता है। [जैसे $1 - 2, 1 - 4, 3 - 2, 3 - 4, 5 - 2$ और $5 - 4$ सभी विषम है।]

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z: 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है

(i) $R = \{(a, b): |a - b|$, 4 का एक गुणज है$\}$, **(ii)** $R = \{(a, b): a = b\}$,

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

https://www.evidyarthi.in/

उत्तर 9:

(i) $A = \{x : x \in Z : 0 \le x \le 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है$\}$

अवयव $a \in A$ के लिए, $(a, a) \in R$ क्योंकि $|a - a| = 0$, 4 का एक गुणज है।

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

अब, माना $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow |-(a - b)| = |b - a|$, 4 का एक गुणज है। $\Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R सममित है।

माना (a, b) और $(b, c) \in R$

$\Rightarrow |a - b|$, 4 का एक गुणज है और $|b - c|$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow (a - b)$, 4 का एक गुणज है और $(b - c)$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c)$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow |a - c|$, 4 का एक गुणज है। $\Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ R संक्रामक है।

अतः, R एक तुल्यता संबंध है।

1 से संबंधित अवयव इस प्रकार है: {1, 5, 9} क्योंकि

$|1 - 1| = 0$ जो कि 4 का एक गुणज है।

$|5 - 1| = 4$ जो कि 4 का एक गुणज है।

$|9 - 1| = 8$ जो कि 4 का एक गुणज है।

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

किसी अवयव $a \in A$ के लिए, $(a, a) \in R$, क्योंकि $a = a$

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

अब, माना $(a, b) \in R \quad \Rightarrow a = b \quad \Rightarrow b = a \quad \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R सममित है।

माना $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R \quad \Rightarrow a = b$ और $b = c \quad \Rightarrow a = c$

$\Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ R संक्रामक है।

अतः, R एक तुल्यता संबंध है।

1 से संबंधित समुच्चय A का अवयव {1} है क्योंकि $1 = 1$

प्रश्न 10:

ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

उत्तर 10:

(i) माना $A = \{5, 6, 7\}$,

तथा संबंध $R = \{(5, 6), (6, 5)\}$.

संबंध R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $(5, 5), (6, 6), (7, 7) \notin R$.

अब, क्योंकि $(5, 6) \in R$ और $(6, 5) \in R$, इसलिए R सममित है।

$\Rightarrow (5, 6), (6, 5) \in R$, लेकिन $(5, 5) \notin R$

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।

अतः, संबंध R सममित है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है।

https://www.evidyarthi.in/

(ii) माना संबंध R समुच्चय R में परिभाषित है तथा R = {(a, b): a < b}
किसी अवयव a ∈ R के लिए, (a, a) ∉ R, क्योंकि a स्वयं से छोटा नहीं हो सकता है।
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, (1, 2) ∈ R (क्योंकि 1 < 2) लेकिन, संख्या 2, संख्या 1 से छोटी नहीं है।
∴ (2, 1) ∉ R, इसलिए R समंमित नहीं है।
माना (a, b) और (b, c) ∈ R.
⇒ a < b और b < c ⇒ a < c ⇒ (a, c) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, संबंध R संक्रामक है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही सममित है।

(iii) माना A = {4, 6, 8}.
माना समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R निम्नलिखित प्रकार से है।
R = {(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)}
संबंध R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक अवयव a ∈ A के लिए, (a, a) ∈ R
अर्थात (4, 4), (6, 6), (8, 8) ∈ R.
संबंध R सममित है, क्योंकि (a, b) ∈ R ⇒ (b, a) ∈ R, सभी a, b ∈ R के लिए।
संबंध R संक्रामक नहीं है, क्योंकि (4, 6), (6, 8) ∈ R, लेकिन (4, 8) ∉ R.
अतः, संबंध R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(iv) माना संबंध R समुच्चय R में परिभाषित है।
R = {(a, b): $a^2 \geq b^2$}
इसलिए (a, a) ∈ R [क्योंकि $a^2 = a^2$]
∴ R स्वतुल्य है।
यहाँ, (2, 1) ∈ R [क्योंकि $2^2 \geq 1^2$]
लेकिन, (1, 2) ∉ R [क्योंकि $1^2 < 2^2$]
∴ R सममित नहीं है।
अब, माना (a, b) और (b, c) ∈ R.
⇒ $a^2 \geq b^2$ और $b^2 \geq c^2$ ⇒ $a^2 \geq c^2$ ⇒ (a, c) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(v) माना A = {−5, −6}.
माना, संबंध R समुच्चय A पर निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है।
R = {(−5, −6), (−6, −5), (−5, −5)}
संबंध R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि (−6, −6) ∉ R.
संबंध R सममित है क्योंकि (−5, −6) ∈ R और (−6, −5) ∈ R.
तथा, यदि (−5, −6) और (−6, −5) ∈ R, तब (−5, −5) ∈ R
इसलिए, संबंध R संक्रामक है।
अतः, संबंध R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

प्रश्न 11:
सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

उत्तर 11:
$R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है$\}$

https://www.evidyarthi.in/

यहाँ, $(P, P) \in R$ क्योंकि बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
$\therefore$ R स्वतुल्य है।
माना, $(P, Q) \in R$
$\Rightarrow$ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
$\Rightarrow$ बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
$\Rightarrow (Q, P) \in R$, इसलिए R सममित है।
अब, माना (P, Q) और $(Q, S) \in R$.
$\Rightarrow$ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है तथा बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु S की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
$\Rightarrow$ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु S की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
$\Rightarrow (P, S) \in R$, इसलिए R संक्रामक है।
इसलिए, संबंध R एक तुल्यता संबंध है।
बिंदु $P = (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं के समुच्चय में वे बिंदु आते हैं जो मूल बिंदु से उतनी ही दूरी पर हैं जितना बिंदु P मूल बिंदु से दूर है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि यदि O (0, 0) मूल बिंदु है और $OP = k$ है, तो P से संबंधित सभी बिंदु मूल बिंदु से k दूरी पर होंगे।
अतः, बिंदु $P = (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

उत्तर 12:
$R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$
R स्वतुल्य है क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप होता है।
अब, यदि $(T_1, T_2) \in R$, तब T_1, T_2 के समरूप है। $\Rightarrow T_2, T_1$ के समरूप है।
$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$, इसलिए R सममित है।
माना (T_1, T_2) और $(T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ के समरूप है और T_2, T_3 के समरूप है।
$\Rightarrow T_1, T_3$ के समरूप है। $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$, इसलिए R संक्रामक है।
इसप्रकार, R एक तुल्यता संबंध है।
अब हम देखते हैं कि $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \left(= \frac{1}{2}\right)$
क्योंकि त्रिभुजों T_1 और T_3 की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, इसलिए, त्रिभुज T_1, T_3 के समरूप है।
अतः, त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 से संबंधित है।

प्रश्न 13:

सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:
$R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$
R स्वतुल्य है, क्योंकि $(P_1, P_1) \in R$
माना $(P_1, P_2) \in R \Rightarrow P_1$ और P_2 की भुजाओं की संख्या समान है।
$\Rightarrow P_2$ और P_1 की भुजाओं की संख्या समान है। $\Rightarrow (P_2, P_1) \in R$
$\therefore$ R सममित है।

https://www.evidyarthi.in/

अब, माना (P_1, P_2) और $(P_2, P_3) \in R$.
$\Rightarrow P_1$ और P_2 की भुजाओं की संख्या समान है तथा P_2 और P_3 की भुजाओं की संख्या समान है।
$\Rightarrow P_1$ और P_3 की भुजाओं की संख्या समान है। $\Rightarrow (P1, P3) \in R$
$\therefore R$ संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
इसलिए 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A में वे सभी बहुभुज होंगे जिनकी भुजाएँ 3 है अतः, 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A में वे सभी बहुभुज त्रिभुज होंगे।

प्रश्न 14:
मान लीजिए कि XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2): L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर 14:
$R = \{(L_1, L_2): L_1$ समांतर है L_2 के$\}$
R स्वतुल्य है क्योंकि कोई भी रेखा L_1 स्वयं के समांतर होती है। इसलिए $(L_1, L_1) \in R$.
माना $(L_1, L_2) \in R \Rightarrow L_1$ समांतर है L_2 के $\Rightarrow L_2$ समांतर है L_1 के $\Rightarrow (L_2, L_1) \in R$, इसलिए R सममित है।
अब, माना (L_1, L_2) और $(L_2, L_3) \in R \Rightarrow L_1$ समांतर है L_2 के तथा L_2 समांतर है L_3 के।
$\Rightarrow L_1$ समांतर है L_3 के। इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय, रेखा $y = 2x + 4$ के समांतर सभी रेखाओं का समुच्चय होगा।
रेखा $y = 2x + 4$ की प्रवणता $m = 2$
हम जानते हैं की समांतर रेखाओं की प्रवणता समान होती है। दी गई रेखा के समांतर कोई रेखा $y = 2x + c$ के रूप में होगी, जहाँ $c \in R$.
अतः, दी गई रेखा से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय $y = 2x + c$ है, जहाँ $c \in R$ है।

प्रश्न 15:
मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।
(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है। (B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
(C) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है। (D) R एक तुल्यता संबंध है।

उत्तर 15:
$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$, यहाँ $(a, a) \in R$, सभी अवयवों $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ के लिए।
$\therefore R$ स्वतुल्य है।
यहाँ $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
अब, यहाँ (a, b) और $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ सभी अवयवों $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$, इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 16:
मान लीजिए कि समुच्चय $\mathbf{N}$ में, $R = \{(a, b): a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:
(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

उत्तर 16:
$R = \{(a, b): a = b - 2, b > 6\}$
यहाँ, क्योंकि $b > 6$, इसलिए $(2, 4) \notin R$ तथा $3 = 8 - 2, \therefore (3, 8) \notin R$ और $8 = 7 - 2, \therefore (8, 7) \notin R$
अब $(6, 8)$ के लिए, $8 > 6$ और $6 = 8 - 2$. $\therefore (6, 8) \in R$
अतः, विकल्प (C) सही है।

https://www.evidyarthi.in/

गणित

[illegible]

(कक्षा 12)

[illegible]

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$, एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ $\mathbf{R}_*$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत $\mathbf{R}_*$ को $\mathbf{N}$ से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत $\mathbf{R}_*$ ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

उत्तर 1:

$f(x) = \frac{1}{x}$

एकैकी के लिए:

माना $x, y \in \mathbf{R}_*$ इस प्रकार हैं कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = y$, $\therefore f$ एकैकी फलन है।

आच्छादक के लिए:

यहाँ $y \in \mathbf{R}_*$ के लिए $x = \frac{1}{y} \in \mathbf{R}_*$ (क्योंकि $y \neq 0$) का अस्तित्व है, जहाँ

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y$$

$\therefore f$ आच्छादक है।

इसप्रकार, $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ एकैकी तथा आच्छादक है।

अब, माना $g(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित कोई फलन $g: \mathbf{N} \to \mathbf{R}_*$ है। इसलिए,

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore g$ एकैकी फलन है।

यहाँ, फलन g आच्छादक नहीं है क्योंकि $1.2 \in \mathbf{R}_*$ के लिए $\mathbf{N}$ में कोई x नहीं है जिसके लिए $g(x) = \frac{1}{1.2}$

अतः, फलन g एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

प्रश्न 2:

निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादि (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:

(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।
(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।
(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन है।
(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।
(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।

उत्तर 2:

(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।

माना, किसी $x, y \in \mathbf{N}$ के लिए $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

$\therefore f$ एकैक है।

यहाँ, $2 \in \mathbf{N}$, लेकिन, $\mathbf{N}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = x^2 = 2$.

$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।

यहाँ, $-1, 1 \in \mathbf{Z}$ के लिए $f(-1) = f(1) = 1$, लेकिन $-1 \neq 1$, इसलिए f एकैक नहीं है।

यहाँ, $-2 \in \mathbf{Z}$, लेकिन, $\mathbf{Z}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = -2$ अर्थात $x^2 = -2$.

$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन f न तो एकैक है और न ही आच्छादि है।

https://www.evidyarthi.in/

(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन है।
यहाँ, $-1, 1 \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(-1) = f(1) = 1$, लेकिन $-1 \neq 1$, इसलिए f एकैक नहीं है।
यहाँ, $-2 \in \mathbf{R}$, लेकिन, $\mathbf{R}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = -2$ अर्थात $x^2 = -2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f न तो एकैक और न ही आच्छादि है।

(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।
माना, किसी $x, y \in \mathbf{N}$ के लिए $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow x^3 = y^3$ $\Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ एकैक है।
यहाँ, $2 \in \mathbf{N}$, लेकिन, $\mathbf{N}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात $x^3 = 2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।
माना, किसी $x, y \in \mathbf{Z}$ के लिए, $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow x^3 = y^3$ $\Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ एकैक है।
यहाँ, $2 \in \mathbf{Z}$, लेकिन, $\mathbf{Z}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात $x^3 = 2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

प्रश्न 3:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x], x$ से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

उत्तर 3:
दिया है: $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
यहाँ, $f[1.2] = [1.2] = 1$ और $f(1.9) = [1.9] = 1$, इसलिए $f(1.2) = f(1.9)$ लेकिन $1.2 \neq 1.9$.
$\therefore f$ एकैकी फलन है।
हम जानते हैं कि सभी दशमलव की संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं, जैसे $0.7 \in \mathbf{R}$.
यहाँ, $0.7 \in \mathbf{R}$, लेकिन, $\mathbf{R}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 0.7$
अतः, महत्तम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$ यदि x ऋण है।

उत्तर 4:
फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ को पुनः व्यवस्थित करने पर $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$
यहाँ, $f(-1) = |-1| = 1$ और $f(1) = |1| = 1$, इसलिए $f(-1) = f(1)$, लेकिन $-1 \neq 1$.
$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।
हम जानते हैं कि $f(x) = |x|$ सदैव धनात्मक होता है।
यहाँ $-1 \in \mathbf{R}$ के लिए x का कोई मान नहीं है ताकि $f(x) = |x| = -1$.
$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।
अतः, मापांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए कि $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0, \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

उत्तर 5:

दिया है: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0, \end{cases}$

यहाँ, $1, 2 \in \mathbf{R}$ के लिए $f(1) = f(2) = 1$, लेकिन $1 \neq 2$.

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

जैसा कि दिया है, फलन $f(x)$ में केवल 3 संख्याएँ (1, 0 या -1) ही हैं, इसलिए $-2 \in \mathbf{R}$ के लिए, x का कोई भी मान ऐसा नहीं है ताकि $f(x) = -2$ हो। $\therefore f$ आच्छादक नहीं है।

अतः, चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

प्रश्न 6:

मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

उत्तर 6:

दिया है: $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

फलन $f: A \to B$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$.

$\therefore f(1) = 4, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 6$

यहाँ A के प्रत्येक अवयव के लिए B में एक अद्वितीय अवयव है। अतः, फलन f एकैकी फलन है।

प्रश्न 7:

निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बतलाइए की क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी-आच्छादि (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। (ii) $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

उत्तर 7:

(i) माना $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ इसप्रकार है कि $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3 - 4x_1 = 3 - 4x_2 \quad \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \quad \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

यहाँ, $\mathbf{R}$ में किसी वास्तविक संख्या (y) के लिए, $\frac{3-y}{4}$ का अस्तित्व $\mathbf{R}$ में है, इसलिए $f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$

$\therefore f$ आच्छादक है।

अतः, f एकैकी-आच्छादि है।

(ii) माना $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ इसप्रकार हैं कि $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \quad \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

इसप्रकार $f(x_1) = f(x_2)$ है परन्तु यह अवश्यक नहीं है कि $x_1 = x_2$ भी होगा।

जैसे कि $f(1) = f(-1) = 2$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

यहाँ, $f(x) = 1 + x^2$ सदैव धनात्मक होगा यदि $x \in \mathbf{R}$, इसलिए

$\mathbf{R}$ में अवयव -2 के लिए, x का कोई वास्तविक मान नहीं है ताकि $f(x) = -2$ हो।

$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।

अतः, फलन न तो एकैकी और न ही आच्छादक है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 8:

मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f: A \times B \to B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादि (bijective) फलन है।

उत्तर 8:

दिया है: $f: A \times B \to B \times A$ इसप्रकार है कि $f(a, b) = (b, a)$.

माना $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, इसप्रकार हैं कि $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$

$\Rightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2)$ $\Rightarrow b_1 = b_2$ और $a_1 = a_2$ $\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

अब, माना $(b, a) \in B \times A$ कोई अवयव है।

तब, $(a, b) \in A \times B$ इसप्रकार है कि $f(a, b) = (b, a)$ [फलन f की परिभाषा के अनुसार]

$\therefore f$ आच्छादक है।

अतः, f एकैकी आच्छादि फलन है।

प्रश्न 9:

मान लीजिए कि समस्त $n \in \boldsymbol{N}$ के लिए, $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ है। बतलाइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादि (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 9:

दिया है: $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ समस्त $n \in \boldsymbol{N}$ के लिए

यहाँ, $f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ और $f(2) = \frac{2}{2} = 1$ [$f(n)$ की परिभाषा के अनुसार]

इसप्रकार, $f(1) = f(2)$ लेकिन $1 \neq 2$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

माना n, सहप्रांत $\mathbf{N}$ में कोई प्राकृत संख्या है।

स्थिति I: जब n एक विषम संख्या है।

$\therefore n = 2r + 1$, कुछ $r \in \mathbf{N}$ के लिए। तब $4r + 1 \in \mathbf{N}$ का अस्तित्व होगा ताकि $f(4r + 1) = \frac{4r+1+1}{2} = 2r + 1$

स्थिति II: जब n एक सम संख्या है।

$\therefore n = 2r$, कुछ $r \in \mathbf{N}$ के लिए। तब $4r \in \mathbf{N}$ का अस्तित्व होगा ताकि $f(4r) = \frac{4r}{2} = 2r$.

$\therefore f$ आच्छादक है।

अतः, फलन f एकैकी आच्छादि है।

प्रश्न 10:

मान लीजिए कि $A = \boldsymbol{R} - \{3\}$ तथा $B = \boldsymbol{R} - \{1\}$ हैं। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 10:

$A = \mathbf{R} - \{3\}$, $B = \mathbf{R} - \{1\}$ और $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$

माना $x, y \in A$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$

$\Rightarrow (x-2)(y-3) = (y-2)(x-3)$

$\Rightarrow xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6$

$\Rightarrow -3x - 2y = -2x - 3y \Rightarrow x = y$

https://www.evidyarthi.in/

∴ f एकैकी फलन है।
माना $y \in B = \mathbf{R} - \{1\}$, तब $y \neq 1$.
फलन f आच्छादक होगा यदि $x \in A$ के लिए $f(x) = y$.
इसलिए, $f(x) = y$
$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = y$
$\Rightarrow x - 2 = xy - 3y$
$\Rightarrow x(1 - y) = -3y + 2$
$\Rightarrow x = \frac{2-3y}{1-y} \in A \qquad (y \neq 1)$
यहाँ, किसी $y \in B$ के लिए, $\frac{2-3y}{1-y} \in A$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right)-2}{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right)-3} = \frac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \frac{-y}{-1} = y$$

∴ f आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है।

प्रश्न 11:
मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।
(A) f एकैकी आच्छादक है
(B) f बहुएक आच्छादक है
(C) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है
(D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

उत्तर 11:
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है।
माना $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $f(x) = f(y)$.
$\Rightarrow x^4 = y^4 \qquad \Rightarrow x = \pm y$
∴ $f(x) = f(y)$ से हमें $x = y$ प्राप्त नहीं होता है।
उदाहरण के लिए $f(1) = f(-1) = 1$
∴ f एकैकी फलन नहीं है।
माना, सहप्रांत $\mathbf{R}$ में 2 कोई अवयव है। $\mathbf{R}$ में x का ऐसा कोई मान नहीं है कि $f(x) = 2$.
∴ f आच्छादक नहीं है।
अतः, फलन f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।
इसलिए, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 12:
मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। सही उत्तर चुनिए.
(A) f एकैकी आच्छादक है
(B) f बहुएक आच्छादक है
(C) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है
(D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

उत्तर 12:
$f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।
माना $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow 3x = 3y \qquad \Rightarrow x = y$
∴ f एकैकी फलन है।
तथा सहप्रान्त $\mathbf{R}$ में किस वास्तविक संख्या (y) के लिए $\frac{y}{3}$ का अस्तित्व इसप्रकार है कि $f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$
∴ f आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी आच्छादक है।
इसलिए, विकल्प (A) सही है।

https://www.evidyarthi.in/

गणित

(कक्षा 12)

विविध प्रश्नावली 1

प्रश्न 1:

मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbf{R}}$ हो।

उत्तर 1:

दिया है $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है।

माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow 10x + 7 = 10y + 7$ $\Rightarrow x = y$

$\therefore$ फलन f एकैकी है।

सभी $y \in \mathbf{R}$ के लिए, माना $y = 10x + 7$ $\Rightarrow x = \frac{y-7}{10} \in \boldsymbol{R}$

इसलिए, प्रत्येक $y \in \mathbf{R}$, $x = \frac{y-7}{10} \in \boldsymbol{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

$\therefore$ फलन f आच्छादक है।

इसप्रकार, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है। अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है।

अब, माना $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ इस प्रकार है कि $g(y) = \frac{y-7}{10}$, इसलिए

$$gof(x) = g(f(x)) = g(10x + 7) = \frac{(10x + 7) - 7}{10} = \frac{10x}{10} = x$$

और

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

$\therefore g \circ f = 1_{\mathbf{R}}$ तथा $f \circ g = 1_{\mathbf{R}}$

अतः, अभीष्ट फलन $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = \frac{y-7}{10}$ से परिभाषित है।

प्रश्न 2:

मान लीजिए कि $f: W \to W$, $f(n) = n - 1$, यदि n विषम है तथा $f(n) = n + 1$, यदि n सम है, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यहाँ W समस्त पूर्णांकों का समुच्चय है।

उत्तर 2:

दिया है:

फलन $f: W \to W$, $f(n) = \begin{cases} n - 1, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ n + 1, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

माना $f(n) = f(m)$, तब, निम्नलिखित स्थितियां हो सकती हैं:

यदि n विषम हो और m एक सम पूर्णांक हो, तब, $f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m + 1 \Rightarrow n - m = 2$

जो संभव नहीं है, क्योंकि एक सम पूर्णांक और एक विषम पूर्णांक का अंतर कभी सम नहीं हो सकता है।

इसी प्रकार यदि n सम हो और m एक विषम पूर्णांक हो तो भी स्थिति संभव नहीं होगी।

यदि दोनों n और m विषम हों, तो, $f(n) = f(m)$ $\Rightarrow n - 1 = m - 1$ $\Rightarrow n = m$

यदि दोनों n और m सम हों, तो, $f(n) = f(m)$ $\Rightarrow n + 1 = m + 1$ $\Rightarrow n = m$

$\therefore$ फलन f एकैकी है।

यहाँ, सहप्रांत N में, प्रत्येक अवयव $2r + 1$ के लिए, अवयव $2r$ प्रांत N में है तथा सहप्रांत N में, प्रत्येक अवयव $2r$ के लिए अवयव $2r + 1$ प्रांत N में है।

$\therefore$ फलन f आच्छादक है।

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय फलन है।

माना $g: W \to W$, $g(m) = \begin{cases} m + 1, \text{ यदि } m \text{ सम है} \\ m - 1, \text{ यदि } m \text{ विषम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

जब, m विषम है, तो $gof(m) = g(f(m)) = g(m - 1) = m - 1 + 1 = m$ और

https://www.evidyarthi.in/

जब m सम है, तो $gof(m) = g(f(m)) = g(m+1) = m+1-1 = m$
इसीप्रकार, जब m विषम है, तो $fog(m) = f(g(m)) = f(m-1) = m-1+1 = m$ और
जब m सम है, तो $fog(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m$
$\therefore gof = I_W$ और $fog = I_W$
अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और f का व्युत्क्रम $f^{-1} = g$ है, जोकि f के समान है। इसप्रकार, फलन f का व्युत्क्रम स्वयं f ही है।

प्रश्न 3:
यदि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है तो $f(f(x))$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:
दिया है: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है। इसलिए
$f(f(x)) = f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2$
$= (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2) + (-3x^2 + 9x - 6) + 2$
$= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

उत्तर 4:
दिया है: $f: \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन है।
माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$
यहाँ, कई स्थितियाँ संभव हैं, जैसे कि यदि x धनात्मक हो तथा y ऋणात्मक हो। तब
$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$
क्योंकि, x धनात्मक है और y ऋणात्मक है, इसलिए $x > y \Rightarrow x - y > 0$, लेकिन, $2xy$ भी ऋणात्मक होगा।
अतः, $2xy \neq x - y$
इसीप्रकार, x ऋणात्मक तथा y धनात्मक भी संभव नहीं है।
अब, यदि x और y दोनों धनात्मक हैं। तो
$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$
तथा यदि x और y दोनों ही ऋणात्मक हों, तो
$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$
$\therefore$ फलन f एकैकी है।
अब, माना $y \in \mathbf{R}$ इस प्रकार है कि $-1 < y < 1$, यदि y ऋणात्मक है, तो $x = \frac{y}{1+y} \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि
$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1+y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1+y}\right|} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1+\left(\frac{-y}{1+y}\right)} = \frac{y}{1+y-y} = y$$
और यदि y धनात्मक है, तो $x = \frac{y}{1-y} \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि
$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1-y}\right|} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\left(\frac{y}{1-y}\right)} = \frac{y}{1-y+y} = y$$
$\therefore$ फलन f आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 5:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैकी है।

उत्तर 5:
दिया है: $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त एक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।
माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$. $\Rightarrow x^3 = y^3$ ... (1)
अब, हमें $x = y$ सिद्ध करना है। माना $x \neq y$, तब उनके घन भी बराबर नहीं होंगे। $\Rightarrow x^3 \neq y^3$
लेकिन ये समीकरण (1) का विरोधाभास है। $\therefore x = y$, अतः, फलन f एकैकी है।

प्रश्न 6:
दो फलनों $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ तथा $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि, $g \circ f$ एकैकी है परन्तु g एकैकी नहीं है।
(संकेत: $f(x) = x$ तथा $g(x) = |x|$ पर विचार कीजिए)

उत्तर 6:
माना फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ जो $f(x) = x$ द्वारा परिभाषित है तथा फलन $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ जो $g(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित है।
सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g एकैकी नहीं है।
यहाँ, $g(-1) = |-1| = 1$ तथा $g(1) = |1| = 1$
$\therefore g(-1) = g(1)$, लेकिन $-1 \neq 1$. $\therefore g$ एकैकी नहीं है।
अब, $gof: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ के लिए $gof(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$
माना $x, y \in \mathbf{N}$ इस प्रकार हैं कि $gof(x) = gof(y) \Rightarrow |x| = |y|$
क्योंकि $x, y \in \mathbf{N}$, अतः, दोनों धनात्मक होंगे। $\therefore |x| = |y| \Rightarrow x = y$
अतः, gof एकैकी है।

प्रश्न 7:
दो फलनों $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ तथा $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ के उदाहरण दीजिए, जो इस प्रकार हों कि $g \circ f$ आच्छादक है किन्तु f आच्छादक नहीं है।
(संकेत: $f(x) = x + 1$ तथा $g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } x \geq 1 \\ 1, & \text{if } x = 1 \end{cases}$ पर विचार कीजिए।)

उत्तर 7:
माना, फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ जहाँ $f(x) = x + 1$ तथा फलन $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ जहाँ $g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } x > 1 \\ 1, & \text{if } x = 1 \end{cases}$ है।
सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g आच्छादक नहीं है।
यहाँ, सहप्रांत $\mathbf{N}$ में अवयव 1 के लिए प्रांत $\mathbf{N}$ में किसी भी अवयव का अस्तित्व नहीं है। $\therefore f$ आच्छादक नहीं है।
अब, $gof: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ के लिए, $gof(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 1 = x \quad [x \in N \Rightarrow x + 1 \geq 1]$
इसप्रकार, ये स्पष्ट हिया कि $y \in \mathbf{N}$ के लिए $x = y \in \mathbf{N}$ ताकि $gof(x) = y$ हो। अतः, gof आच्छादक है।

प्रश्न 8:
एक अरिक्त समुच्चय X दिया हुआ है। $P(X)$ जो कि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से $P(X)$ में एक संबंध R परिभाषित कीजिए:
$P(X)$ में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, $P(X)$ में एक तुल्यता संबध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

उत्तर 8:
क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का ही उपसमुच्चय होता है, इसलिए ARA सभी $A \in P(X)$ के लिए। अतः, R स्वतुल्य है।
माना $ARB \Rightarrow A \subset B$ परन्तु ये आवश्यक नहीं है कि $B \subset A$ भी हो। जैसे: यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{1, 2, 3\}$ हो।
$\therefore R$ सममित नहीं है।
अब, यदि ARB तथा BRC है तो $A \subset B$ और $B \subset C$. $\Rightarrow A \subset C \Rightarrow ARC$
$\therefore R$ संक्रामक है। अतः, R एक तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि R स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 9:

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए एक द्विआधारी संक्रिया $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B \; \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $P(X)$ समुच्चय X का घात समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव X है तथा संक्रिया $*$ के लिए $P(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है।

उत्तर 9:

दिया है: द्विआधारी संक्रिया $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$, जो $A * B = A \cap B \; \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $P(X)$ समुच्चय X का घात समुच्चय है।

हम जानते हैं कि $A \cap X = A = X \cap A$ सभी $A \in P(X)$ के लिए $\Rightarrow A * X = A = X * A$ सभी $A \in P(X)$ के लिए

इस प्रकार, X इस संक्रिया का तत्समक अवयव है।

अब, कोई अवयव $A \in P(X)$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $B \in P(X)$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$A * B = X = B * A$ (क्योंकि X तत्समक अवयव है)

अर्थात $A \cap B = X = B \cap A$

यह तभी संभव है जब $A = X = B$.

इस प्रकार, संक्रिया $*$ के लिए $P(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है। अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 10:

समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या वास्तव में, $1, 2, \ldots, n$ के कुल क्रमचयों की संख्या के बराबर है।

समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या = $1, 2, \ldots, n$ के कुल क्रमचयों की संख्या = n

प्रश्न 11:

मान लीजिए कि $S = \{a, b, c\}$ तथा $T = \{1, 2, 3\}$ है। S से T तक के निम्नलिखित फलनों F के लिए F^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है:

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

उत्तर 11:

$S = \{a, b, c\}$, $T = \{1, 2, 3\}$

(i) यहाँ, $F: S \to T$, $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित है। $\Rightarrow F(a) = 3, F(b) = 2, F(c) = 1$

इसलिए, $F^{-1}: T \to S$, जो $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$ द्वारा परिभाषित है।

(ii) यहाँ, $F: S \to T$, जो $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित है।

क्योंकि $F(b) = F(c) = 1$, इसलिए F एकैकी नहीं है।

अतः, F व्युत्क्रमणीय नहीं है अर्थात F^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 12:

$a * b = |a - b|$ तथा $a \circ b = a, \; \forall a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय है परन्तु साहचर्य नहीं है, $\circ$ साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमेय नहीं है। पुनः सिद्ध कीजिए कि सभी $a, b, c \in \mathbf{R}$ के लिए, $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ है। [यदि ऐसा होता है, तो हम कहते हैं कि संक्रिया $*$ संक्रिया $\circ$ पर वितरित होती है।] क्या $\circ$ संक्रिया $*$ पर वितरित होती है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 12:

दिया है: $a * b = |a - b|$ तथा $a \circ b = a, \; \forall a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाएँ $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ हैं।

अवयव $a, b \in \mathbf{R}$ के लिए, $a * b = |a - b|$ और $b * a = |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$.

$\therefore a * b = b * a$

अतः, संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय है।

https://www.evidyarthi.in/

यहाँ, $(1 * 2) * 3 = (|1-2|) * 3 = 1 * 3 = |1-3| = 2$ और $1 * (2 * 3) = 1 * (|2-3|) = 1 * 1 = |1-1| = 0$
$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$.
अतः, संक्रिया $*$ साहचर्य नहीं है।
अब, संक्रिया o के लिए $1 o 2 = 1$ और $2 o 1 = 2$, $\therefore 1 o 2 \neq 2 o 1$ जहाँ $1, 2 \in \mathbf{R}$.
अतः, संक्रिया o क्रमविनिमय नहीं है।
माना, अवयव $a, b, c \in \mathbf{R}$, तब, $(a o b) o c = a o c = a$ और $a o (b o c) = a o b = a$
$\therefore (a o b) o c = a o (b o c)$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$
अतः, संक्रिया o साहचर्य है।
अब, माना अवयव $a, b, c \in \mathbf{R}$, तो $a * (b o c) = a * b = |a-b|$ और $(a * b) o (a * c) = (|a-b|) o (|a-c|) = |a-b|$
अतः, $a * (b o c) = (a * b) o (a * c)$.
अब, $1 o (2 * 3) = 1 o (|2-3|) = 1 o 1 = 1$ और $(1 o 2) * (1 o 3) = 1 * 1 = |1-1| = 0$
$\therefore 1 o (2 * 3) \neq (1 o 2) * (1 o 3)$ जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$
अतः, संक्रिया o संक्रिया $*$ पर वितरित नहीं होती है।

प्रश्न 13:
किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए मान लीजिए कि $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$, जहाँ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि रिक्त समुच्चय ϕ, संक्रिया $*$ का तत्समक है तथा $P(X)$ के समस्त अवयव A व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि $A^{-1} = A$. (संकेत: $(A - \phi) \cup (\phi - A) = A$ तथा $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi$).

उत्तर 13:
दिया है कि $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$, जहाँ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है।
माना $A \in P(X)$, तब, $A * \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A$ और $\phi * A = (\phi - A) \cup (A - \phi) = \phi \cup A = A$
$\therefore A * \phi = A = \phi * A$ सभी $A \in P(X)$ के लिए
इस प्रकार, समुच्चय ϕ संक्रिया $*$ का तत्समक है।
अब, कोई अवयव $A \in P(X)$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $B \in P(X)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि
$A * B = \phi = B * A$. [क्योंकि समुच्चय ϕ संक्रिया का तत्समक है]
यहाँ, $A * A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$ सभी $A \in P(X)$.
अतः, $P(X)$ का अवयव A व्युत्क्रमणीय है और $A^{-1} = A$ है।

प्रश्न 14:
निम्नलिखित प्रकार से समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा समुच्चय का प्रत्येक अवयव $a \neq 0$ व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि $6 - a$, a का प्रतिलोम है।

उत्तर 14:
माना $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
यहाँ, समुच्चय X में संक्रिया $*$ इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$
कोई अवयव $e \in X$ संक्रिया $*$ एक तत्समक अवयव होगा यदि $a * e = a = e * a$ सभी $a \in X$ के लिए
प्रत्येक $a \in X$ के लिए
$a * 0 = a + 0 = a$ $[a \in X \Rightarrow a + 0 < 6]$
$0 * a = 0 + a = a$ $[a \in X \Rightarrow 0 + a < 6]$
$\therefore a * 0 = a = 0 * a$ सभी $a \in X$ के लिए
अतः, संक्रिया $*$ में 0 तत्समक अवयव है।

https://www.evidyarthi.in/

कोई अवयव $a \in X$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $b \in X$ इस प्रकार है कि $a * b = 0 = b * a$.

अर्थात, $a * b = \begin{cases} a + b = 0 = b + a, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6 = 0 = b + a - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$

$\Rightarrow a = -b$ या $b = 6 - a$

परन्तु $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ और $a, b \in X$ तब, $a \neq -b$,

इसलिए $b = 6 - a$ सभी अवयवों a का व्युत्क्रम है, जहाँ $a \in X$ है।

अतः, सभी अवयवों $a \in X, a \neq 0$ के व्युत्क्रम $6 - a$ हैं अर्थात $a^{-1} = 6 - a$ है।

प्रश्न 15:

मान लीजिए कि $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g: A \to B$; क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत: नोट कीजिए कि दो फलन $f: A \to B$ तथा $g: A \to B$ समान कहलाते हैं यदि $f(a) = g(a) \forall a \in A$ हों।)

उत्तर 15:

दिया है: $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g: A \to B$, क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं।

इसलिए,

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$ और $g(-1) = 2\left|(-1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f(-1) = g(-1)$

पहाँ, $f(0) = (0)^2 - (0) = 0$ और $g(0) = 2\left|0 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(0) = g(0)$

इसीप्रकार $f(1) = (1)^2 - (1) = 1 - 1 = 0$ और $g(1) = 2\left|(1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(1) = g(1)$

तथा $f(2) = (2)^2 - (2) = 4 - 2 = 2$ और $g(2) = 2\left|(2) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f(2) = g(2)$

$\therefore f(a) = g(a)$ सभी $a \in A$ के लिए

अतः, फलन f तथा g समान फलन हैं।

प्रश्न 16:

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव $(1, 2)$ तथा $(1, 3)$ हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं हैं, कि संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

उत्तर 16:

दिया है: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$.

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में सबसे छोटा संबंध जिसमें अवयव $(1, 2)$ तथा $(1, 3)$ हों और जो स्वतुल्य तथा सममित तो हो किंतु संक्रामक नहीं हो, निम्नलिखित प्रकार से होगा:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

संबंध R स्वतुल्य है क्योंकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$.

संबंध R सममित है क्योंकि $(1, 2), (2, 1) \in R$ और $(1, 3), (3, 1) \in R$.

लेकिन संबंध R संक्रामक नहीं है क्योंकि $(3, 1), (1, 2) \in R$ परन्तु $(3, 2) \notin R$.

अब, यदि हम $(3, 2)$ और $(2, 3)$ (या दोनों) को संबंध R में शामिल कर लें तो संबंध R संक्रामक भी होगा।

अतः, कुल अभीष्ट संबंध संख्या में 1 ही होंगे।

अतः, विकल्प (A) सही है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 17:

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है।

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

उत्तर 17:

दिया है: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$.

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में अवयव $(1, 2)$ वाले सबसे छोटा तुल्यता संबंध

$R1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

इसके अतिरिक्त समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में केवल चार युग्म ही बचे हैं अर्थात $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$ और $(3, 1)$ हैं।

यदि हम एक युग्म, माना $(2, 3)$, को $R1$ में शामिल कर लें, तो संबंध को सममित बनाने के लिए, हमें युग्म $(3, 2)$ को भी शामिल करना होगा और साथ ही संक्रामक बनाने के लिए $(1, 3)$ और $(3, 1)$ को भी सम्मिलित करना होगा।

अतः, एकमात्र तुल्यता संबंध (जो $R1$ से बड़ा हो) सार्वत्रिक संबंध होगा।

इसप्रकार, अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या 2 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 18:

मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है तब निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित चिन्ह फलन है।

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$ तथा $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = [x]$, द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर पूर्णांक है, तो क्या fog तथा gof, अन्तराल $(0, 1]$ में संपाती हैं?

उत्तर 18:

दिया है: $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$ तथा $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = [x]$, द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर पूर्णांक है।

यहाँ, माना $x \in (0, 1]$, तब

$[x] = 1$ यदि $x = 1$ और $[x] = 0$ यदि $0 < x < 1$

इसलिए,

$$fog(x) = f(g(x)) = f([x]) = \begin{cases} f(1), & \text{यदि } x = 1 \\ f(0), & \text{यदि } x \in (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 1 \\ 0, & \text{यदि } x \in (0, 1) \end{cases}$$

और

$$gof(x) = g(f(x)) = g(1) = [1] = 1 \qquad \left[\text{क्योंकि } x > 0\right]$$

इसप्रकार, जब $x \in (0, 1]$, तो $fog(x) = 0$ और $gof(x) = 1$.

अतः, fog तथा gof, अन्तराल $(0, 1]$ में संपाती नहीं हैं।

प्रश्न 19:

समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

उत्तर 19:

समुच्चय $\{a, b\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ एक फलन $\{a, b\} \times \{a, b\} \to \{a, b\}$ है।

अर्थात संक्रिया $*$, $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \to \{a, b\}$ से एक फलन है।

समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या 2^4 है अर्थात 16 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

https://www.evidyarthi.in/