अध्याय-11

त्रि-विमीय ज्यामिती

(Three-Dimensional Geometry)

(Important Formulae and Definitions)

1. एक बिन्दु $\vec{a}$ से जाने वाली सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + n\vec{b}$$

2. दो बिन्दुओं $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + n(\vec{b} - \vec{a})$$

3. एक बिन्दु से जाने वाले तथा दो असमान्तर सदिशों के समान्तर समतल का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}$$

4. तीन बिन्दुओं से जाने वाले समतल का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$$

5. चार बिन्दुओं के एक समतलीय होने का प्रतिबन्ध यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$ चार बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं, तो

$$\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{d} = 0, \text{ जहाँ } 1 + \lambda + \mu + \nu = 0.$$

प्रश्नावली 11·1

प्रश्न 1. यदि एक रेखा x, y और z अक्षों के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए रेखा की दिक्-कोसाइन $l, m,$ तथा n हैं।

अत:
$$l = \cos 90° = 0$$
$$m = \cos 135°$$
$$= \cos(180° - 45°)$$

$$= -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

तथा $$n = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अत: दिक्-कोसाइन हैं : $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\frac{1}{\sqrt{2}}$. उत्तर

प्रश्न 2. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

हल : मान लीजिए एक रेखा निर्देशांक्षों के साथ कोण α बनाती है।

अत: रेखा के दिक्-कोसाइन $\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$ होंगे।

परन्तु हम जानते हैं कि

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

या $$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

या $$3\cos^2\alpha = 1$$

या $$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

अत: रेखा के दिक्-कोसाइन $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं। उत्तर

प्रश्न 3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात –18, 12, –4 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या हैं ?

हल : मान लीजिए a, b, c रेखा के दिक्-अनुपात हों तो

यहाँ $$a = -18, b = 12, c = -4$$

$\therefore$ $$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(-18)^2+12^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{324+144+16} = \sqrt{484} = 22$$

अत: दिक्-कोसाइन : $$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-18}{22} = \frac{-9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-4}{22} = \frac{-2}{11}$$

अत: रेखा के दिक्-कोसाइन $= \frac{-9}{11}, \frac{6}{11}$ तथा $\frac{-2}{11}$. उत्तर

प्रश्न 4. दर्शाइए कि बिन्दु (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8, 7) संरेख हैं।

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु A(2, 3, 4), B(–1, –2, 1), C(5, 8, 7)

अत: $$AB = \sqrt{(-1-2)^2+(-2-3)^2+(1-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$BC = \sqrt{(5+1)^2+(8+2)^2+(7-1)^2}$$

$$= \sqrt{6^2+10^2+6^2} = \sqrt{36+100+36}$$

$$= \sqrt{172} = 2\sqrt{43}$$

तथा $$CA = \sqrt{(2-5)^2+(3-8)^2+(4-7)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

अब $$CA+AB = \sqrt{43}+\sqrt{43} = 2\sqrt{43} = BC$$

अत: A, B, C सरेख हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु (3, 5, –4), (–1, 1, 2) और (–5, –5, –2) हैं।

हल : मान लीजिए त्रिभुज ABC के शीर्ष A(3, 5, –4), B(–1, 1, 2) और C(–5, –5, –2) हैं।

(i) भुजा AB के दिक्-अनुपात $= -1-3, 1-5, 2+4 = -4, -4, 6$

$\therefore$ AB के बीच की दूरी $= \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+6^2} = \sqrt{16+16+36}$

$$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

अत: AB की दिक्-कोसाइन

$$= \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{6}{2\sqrt{17}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}.$$ **उत्तर**

(ii) BC के दिक्-अनुपात $-5+1, -5-1, -2-2 = -4, -6, -4$

$\therefore$ BC के बीच की दूरी $= \sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}$

$$= \sqrt{16+36+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

अत: BC के दिक्-कोसाइन

$$= \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-6}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}}.$$

या $$= \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}.$$ **उत्तर**

(iii) इसी प्रकार भुजा CA की दिक्-अनुपात $3+5, 5+5, -4+2 = 8, 10, -2$

$\therefore$ CA के बीच की दूरी $= \sqrt{8^2+10^2+(-2)^2}$

$$= \sqrt{64+100+4}$$

$$= \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$$

अत: CA की दिक्-कोसाइन

$$= \frac{8}{2\sqrt{42}}, \frac{10}{2\sqrt{42}}, \frac{-2}{2\sqrt{42}}.$$

$$= \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}.$$ **उत्तर**

प्रश्नावली 11.2

प्रश्न 1. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

हल : यदि दो रेखाएँ लम्बवत् हों, तो

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

मान लीजिए दिए गए द्विक् कोसाइनों से क्रमशः AB, CD, EF अभीष्ट रेखाएँ हों, तब परस्पर लम्बवत् हेतु

$$AB \perp CD = 0$$
$$CD \perp EF = 0$$

और $$AB \perp EF = 0$$

दिया है :

$$l_1 = \frac{12}{13}, m_1 = \frac{-3}{3}, n_1 = \frac{-4}{13}$$

$$l_2 = \frac{4}{13}, m_2 = \frac{12}{13} \text{ तथा } n_2 = \frac{3}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{12}{13} \times \frac{4}{13} + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{48-36-12}{13 \times 13} = 0$$

अतः प्रथम दो द्विक कोसाइनों से रेखाएँ लम्बवत् हैं।

अब CD और EF हेतु

$$\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{12}{169} - \frac{48}{169} + \frac{36}{169} = 0$$

और AB और EF हेतु,

$$\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{36}{169} + \frac{12}{169} - \frac{48}{169} = 0$$

अतः AB, CD और EF तीनों ही रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6,) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

हल : मान लीजिए प्रश्नानुसार बिन्दु A(1, – 1, 2) एवं B(3, 4, – 2) हैं। अतः बिन्दु A(1, – 1, 2) एवं B(3, 4, – 2) से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 – 1, 4 + 1, – 2 – 2 या 2, 5, – 4 होंगे।

इसी प्रकार माना कि प्रश्नानुसार C(0, 3, 2) एवं D(3, 5, 6) हैं। अतः बिन्दु C(0, 3, 2) और D(3, 5, 6,) से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 – 0, 5 – 3, 6 – 2 या 3, 2, 4 होंगे। अब यदि $AB \perp CD$ तो

$$a_1a_1 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

अतः $$2 \times 3 + 5 \times 2 + (-4) \times 4 = 6 + 10 - 16 = 0$$

अतः प्रश्नानुसार दिए बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखाएँ अर्थात् AB रेखा CD पर लम्ब हैं। उत्तर

प्रश्न 3. दर्शाइए कि बिन्दुओं (4, 7, 8), (2, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (– 1 – 2, 1) और (1, 2, 5) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु $A(4, 7, 8)$ तथा $B(2, 3, 4)$ हैं। अतः बिन्दु $A(4, 7, 8,)$ $B(2, 3, 4)$ से होकर जाने वाली रेखा AB के दिक्-अनुपात $2-4, 3-7, 4-8$ अर्थात् $-2, -4, -4$ या $1, 2, 2$ होंगे।

इसी प्रकार मान लीजिए दिए गए बिन्दु $C(-1, -2, 1)$ तथा $D(1, 2, 5)$ हैं। अतः बिन्दु $C(-1, -2, 1)$ और $D(1, 2, 5)$ से होकर जाने वाली रेखा CD के दिक्-अनुपात $1-(-1), 2-(-2), 5-1$ या $2, 4, 4$, या $1, 2, 2$ होंगे।

हम जानते हैं कि दो रेखाएँ समान्तर होंगी यदि $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$

यहाँ AB और CD दोनों के दिक्-अनुपात $1, 2, 3$ हैं।

अतः AB तथा CD आपस में समान्तर हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है।

हल : माना $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AB का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}).$$

जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

प्रश्न 5. बिन्दु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ से गुजरने व सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश व कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$

और $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$$

यही रेखा का सदिश समीकरण है। उत्तर

$\because$ रेखा पर स्थित किसी बिन्दु $P(x, y, z)$ की स्थिति $\vec{r}$ है।

$$\therefore \quad x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = (2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$$

$$= (2+\lambda)\hat{i}+(-1+2\lambda)\hat{j}+(4-\lambda)\hat{k}$$

λ का विलोपन करने पर,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

यही अभीष्ट रेखा का कार्तीय रूप है। उत्तर

प्रश्न 6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–2, 4, –5) से जाती है और $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।

हल : वह रेखा जो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरती है और उसके दिक्-अनुपात a, b, c हों, तो उसका समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा (–2, 4, –5) से गुजरती है तथा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर है। अतः रेखा के दिक्-अनुपात = 3, 5, 6

अतः अभीष्ट रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-(-2)}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-(-5)}{6}$$

या $$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : रेखा का सदिश समीकरण : $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$

जो बिन्दु (5, – 4, 6) में होकर जाती है।

अर्थात् $$\vec{a}=5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$$

दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात 3, 7, 2 हैं।

$$\vec{b}=3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$$

∴ अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

या $$\vec{r}=5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}).$$ उत्तर

Ques 8 निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

और $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

हल : (i) पहली रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

दूसरी रेखा $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

मान लीजिए $\vec{b_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

तथा $\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

जब दोनों रेखाओं के बीच कोण θ हो, तब

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}).(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})}{|3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}||\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{3.1+2.2+6.2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{\sqrt{9+4+36}\sqrt{1+4+4}}\right| = \left|\frac{19}{\sqrt{49}\sqrt{9}}\right|$$

$$= \left|\frac{19}{7\times 3}\right| = \frac{19}{21}$$

अत: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$. उत्तर

(ii) पहली रेखा $\vec{r} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

दूसरी रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

माना $\vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

तथा $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$

जब दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ है अत:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}).(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})}{|\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}||3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{1.3+(-1)(-5)+(-2)(-4)}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(3)^2+(-5)^2+(-4)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+5+8}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{9+25+16}}\right| = \left|\frac{16}{\sqrt{6}\sqrt{50}}\right|$$

$$= \left|\frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{16}{10\sqrt{3}}\right| = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

अत: $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right).$$ उत्तर

Ques 9

. निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

हल : (i) दी गयी पहली रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ के लिए दिक्-अनुपात = 2, 5, 3

तथा दूसरी रेखा $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$ के दिक्-अनुपात = –1, 8, 4

माना θ दी गयी रेखाओं के मध्य का कोण हो, तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

अर्थात् मान लीजिए $a_1 = 2, b_1 = 5, c_1 = -3$ तथा $a_2 = -1, b_2 = 8, c_2 = 4$

$$\therefore \quad \cos\theta = \left(\frac{2\times(-1) + (5\times 8) + (-3)\times 4}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2}\sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 4^2}}\right)$$

$$= \left|\frac{-2 + 40 - 12}{\sqrt{4 + 25 + 9}\sqrt{1 + 64 + 16}}\right|$$

$$= \left|\frac{-26}{\sqrt{38}\sqrt{81}}\right|$$

$$\cos\theta = \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right).$$ उत्तर

(ii) पहली रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ के दिक्-अनुपात = 2, 2, 1

तथा दूसरी रेखा $\frac{x-5}{4}, \frac{y-2}{1}, \frac{z-3}{8}$ के दिक्-अनुपात = 4, 1, 8

मान लीजिए $a_1 = 2, b_1 = 2, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = 8$

तथा माना दी हुई रेखाओं के बीच कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

$$= \left| \frac{2\times 4+2\times 1+1\times 8}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+8^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{8+2+8}{\sqrt{9}\sqrt{81}} \right| = \frac{18}{3\times 9} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$ उत्तर

Ques 10

p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$

और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों।

हल : दी हुई रेखाओं को मानक रूप में रखने पर

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{\frac{2p}{7}} = \frac{z-3}{2} \text{ और } \frac{x-1}{-\frac{3p}{7}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

अब पहली रेखा के दिक्-अनुपात $= -3, \frac{2p}{7}, 2$

तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात $= \frac{-3p}{7}, 1, -5$

अर्थात् मान लीजिए $a_1 = -3, b_1 = \frac{2p}{7}$ $c_1 = 2$ तथा $a_2 = -\frac{3p}{7}, b_2 = 1, c_2 = -5$

चूँकि रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$(-3)\left(\frac{-3p}{7}\right) + \left(\frac{2p}{7}\right) \times 1 + 2 \times (-5) = 0$$

या $$\frac{9p}{7} + \frac{2p}{7} - 10 = 0$$

या $$\frac{11p}{7} - 10 = 0$$

या $$p = 10 \times \frac{7}{11} = \frac{70}{11}.$$ उत्तर

Ques 11

दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं।

हल : दी गयी पहली रेखा $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ के दिक्-अनुपात = 7, –5, 1

तथा दी गयी दूसरी रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के दिक्-अनुपात = 1, 2, 3

अब मान लीजिए $a_1 = 7, b_1 = -5, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = 3$

दोनों रेखाओं के परस्पर लम्ब होने के लिए, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

बायाँ पक्ष : $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$

$$= 7\times 1+(-5)\times 2+1\times 3$$
$$= 7-10+3 = 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

अत: दी हुई दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्।

Ques 12 **रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।**

हल : दिया है : $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

इसकी तुलना $\vec{r} = a_1+\lambda\vec{b}_1$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

तथा $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$

इसकी तुलना $\vec{r} = a_2+\lambda b_2$ से करने पर,

$$\vec{a_2} = 2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_2}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{a_2}-\vec{a_1} = (2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$$
$$= \hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$$

तथा
$$\vec{b_1}\times\vec{b_2} = (\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\times(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$
$$= (-2-1)\hat{i}-(2-2)\hat{j}+(1+2)\hat{k} = -3\hat{i}+3\hat{k}$$

अत:
$$|\vec{b_1}\times\vec{b_2}| = \sqrt{-3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

रेखाओं $\vec{r}=\vec{a_1}+\lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r}=\vec{a_2}+\lambda\vec{b_2}$ की बीच न्यूनतम दूरी, d

$$= \left|\frac{(\vec{a_2}-\vec{a_1}).(\vec{b_1}\times\vec{b_2})}{|(\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}\right|$$
$$= \left|\frac{(\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}).(-3\hat{i}+3\hat{k}}{3\sqrt{2}}\right|$$
$$= \left|\frac{1\times(-3)+(-3)\times 0+(-2)\times 3}{3\sqrt{2}}\right|$$
$$= \left|\frac{-3-0-6}{3\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

उत्तर

Ques 13 **रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।**

हल : दी गयी रेखाएँ हैं :

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$$

और $$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

उपरोक्त रेखाओं की तुलना $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$

और $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ से करने पर,

$x_1=-1, y_1=-1, z_1=-1$ तथा $x_2=3, y_2=5, z_2=7$

और $a_1=7, b_1=-6, c_1=1$ तथा $a_2=1, b_2=-2, c_2=1$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-6+2)-6(7-1)+8(-14+6)$$
$$= -16-36-64 = -52-64 = -116$$

तथा $\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

$$= \sqrt{(-6+2)^2+(1+7)^2+(-14+6)^2}$$

$$= \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

दो रेखाओं के बीच की दूरी, $$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

$$= \left|\frac{-116}{\sqrt{116}}\right| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.$$ उत्तर

Ques 14

रेखाएँ जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और $$\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$$

हल : दी गयी रेखाएँ हैं :

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और $$\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$$

इनकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b_1} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a_2} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k},\ \vec{b_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा
$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-6)\hat{i} - (1-4)\hat{j} + (3+6)\hat{k}$$

$$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$

$\therefore$
$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{81+9+81}$$

$$= \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$$

रेखा $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(a_2 - a_1).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}).(-9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \left|\frac{3.(-9) + 3\times 3 + 3\times 9}{3\sqrt{19}}\right| = \left|\frac{-27 + 9 + 27}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$ उत्तर

Ques 15

रेखाएँ जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

और
$$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$

हल : दी गयी पहली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

इसकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ से करने पर

$$\vec{a_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

और
$$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$
$$= \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

इसकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ से करने पर
$$\vec{a_2} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

अब
$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j} - 4\hat{k}$$

तथा
$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$
$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$\therefore$
$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{4 + (-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

दो रेखाओं के बीच की दूरी
$$d = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_2} \times \vec{b_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$
$$= \left| \frac{(\hat{j} - 4\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{29}} \right|$$
$$= \left| \frac{0 \times 2 + 1 \times -4 + (-4)(-3)}{\sqrt{29}} \right|$$
$$= \left| \frac{-4+12}{\sqrt{29}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

उत्तर

Ques 1 उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं।

हल : मान लीजिए उन रेखाओं के बीच कोण θ है और दिए हुए दिक्-अनुपात $a, b, c,$ और $b-c, c-a, a-b$ हैं तो

$$\cos\theta = \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \theta = 90° = \frac{\pi}{2}.$$ उत्तर

Ques 2 x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : x-अक्ष के दिक्-कोसाइन $= 1, 0, 0$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट रेखा का समीकरण} = \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

$$= \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$ उत्तर

Ques 3 यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी पहली रेखा के दिक्-अनुपात = –3, 2k, 2

तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात = 3k, 1, – 5

रेखाओं के परस्पर लम्ब होने के लिए,

$$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 + c_1 . c_2 = 0$$

$$(-3) \times 3k + (2k) \times 1 + 2(-5) = 0$$

$$-9k + 2k - 10 = 0$$

$$-7k - 10 = 0$$

$$\therefore \quad k = -\frac{10}{7}$$ उत्तर

Ques 4 रेखाओं $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण हैं :

$$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

इनकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a_2} = -4\hat{i} - \hat{k} \text{ तथा } \vec{b_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

अब

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = -4\hat{i} - \hat{k} - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4+4)\hat{i} + (6+2)\hat{j} + (-2+6)\hat{k}$$

$$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

अतः

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 64 + 16}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

$$\text{दोनों रेखाओं के मध्य दूरी} = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$= \left| \frac{(-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})(8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{-10 \times 8 + 8(-2) + 4(-3)}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{-80 - 16 - 12}{12} \right| = \left| \frac{-108}{12} \right| = 9.$$

उत्तर

Ques 5

बिन्दु (1, 2, –4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए अभीष्ट रेखा

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}) \quad ...(i)$$

रेखाओं के समीकरण हैं : $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$

और $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$ आपस में लम्ब हैं।

अतः इन रेखाओं के दिक्-अनुपात 3, –16, 7 और a, b, c हैं। ये रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$3a-16b+7c=0 \quad ...(ii)$$

इसी प्रकार रेखा $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$

और $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$ के दिक्-अनुपात 3, 8, –5 और a, b तथा c हैं। ये परस्पर लम्बवत् होंगी यदि

$$\therefore \quad 3a-8b-5c=0 \quad ...(iii)$$

समीकरण (ii) और (iii) को हल करने पर,

$$\frac{a}{80-56} = \frac{b}{21+15} = \frac{c}{24+48}$$

या $$\frac{a}{24} = \frac{b}{36} = \frac{c}{72}$$

या $$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$$

a, b तथा c के मान समी. (i) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है। **उत्तर**