अध्याय-12

रैखिक प्रोग्रामन

(Linear Programming)

(Important Formulae and Definitions)

1. एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या वह समस्या है जो अनेक चरों के रैखिक फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान को ज्ञात करने से सम्बन्धित फलन को उद्देश्य फलन कहते हैं।
2. जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत इष्टतमीकरण किया जाता है, उनको ही व्यवरोध कहते हैं।
3. व्यवरोधों को $\leq, =, \geq$ से प्रदर्शित किया जाता है।
4. सुसंगत क्षेत्र के अंत:भाग के तथा सीमान्त बिन्दु व्यवरोधों के सुसंगत हलों को प्रदर्शित करता है।
5. एक रैखिक समस्या को हल करने के लिए निम्नलिखित पदों को ध्यानपूर्वक समझें :
   (i) सभी दी गई असमिकाओं को रैखिक समीकरणों में व्यक्त करें।
   (ii) सभी समीकरणों और ऋणेत्तर व्यवरोधों का आलेख खींचिए। हमें अब उतनी ही रेखाएँ प्राप्त होंगी, जितनी कि समीकरणों और असमिकाओं की संख्याएँ हैं।
   (iii) इस प्रकार खींची गई रेखाओं से परिबद्ध सुसंगत बहुभुज प्राप्त हो जाएगा।
   (iv) सुसंगत बहुभुज के प्रत्येक शीर्ष के निर्देशांकों को उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित कीजिए।
   (v) निर्देशांकों से प्रतिस्थापित मान इस बात की पुष्टि करते हैं कि किस बिन्दु पर मान अधिकतम या न्यूनतम है।

प्रश्नावली 12·1

ग्राफीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए :

प्रश्न 1. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$

हल—प्रश्नानुसार उद्देश्य फलन

$$Z = 3x + 4y$$

तथा अवरोध हैं $\quad x + y \leq 4, x, y \geq 0$

(i) $x + y \leq 4$ के लिए,

रेखा $x + y = 4$, बिन्दु $A(4, 0)$ और $B(0, 4)$ से होकर गुजरती है।

दिए गए समीकरण $x + y \leq 4$ को समीकरण में बदलने पर प्राप्त $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 4$ जो सत्य है।

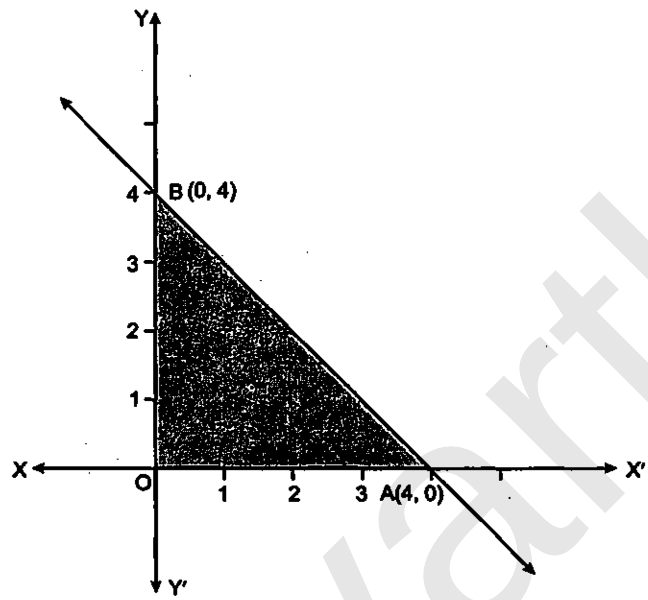
$\therefore$ मूल बिन्दु इस क्षेत्र में स्थित है।

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

$\Rightarrow x + y \leq 4$ के क्षेत्र रेखा $x + y = 4$ और इसके नीचे मूल बिन्दु की ओर है।

(ii) $x \geq 0$, का क्षेत्र y-अक्ष की दार्यी ओर y-अक्ष है।

(ii) $y \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर है और x-अक्ष के ऊपर है, इनसे बना उभयनिष्ठ क्षेत्र ΔOAB है।



अब चित्र में दिए गए कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 4y$
$O(0, 0)$	0
$A(4, 0)$	12
$B(0, 4)$	16 (अधिकतम)

अत: Z अधिकतम $B(0, 4)$ पर है तथा अधिकतम मान = 16. **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए

$$x + 2y \leq 8,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

हल : दिया है : $Z = -3x + 4y$,

अवरोध हैं : $x + 2y \leq 8,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0, y \geq 0$

(i) $x + 2y \leq 8$ के लिए,

रेखा $x + 2y = 8$ बिन्दुओं $A(8, 0)$ और $B(0, 4)$ से होकर गुजरती है।

$x = 0, y = 0$, असमिका $x + 2y \leq 8$ में रखने पर $0 \leq 8$ जो सत्य है।

अर्थात् $x + 2y \leq 8$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा $x + 2y = 8$ पर और उसके नीचे मूल बिन्दु की ओर हैं।

(ii) $3x + 2y \leq 12$ के लिए,

रेखा $3x + 2y = 12$ बिन्दु $P(4, 0)$ और $Q(0, 6)$ से होकर गुजरती है। इसका आरेख PQ है। अत: $3x + 2y \leq 12$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 12$ जो सत्य है। अर्थात् इसके क्षेत्र के बिन्दु रेखा $3x + 2y = 12$ पर और इसके नीचे मूल बिन्दु की ओर है।

(iii) $x \geq 0$, इस क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और y-अक्ष के दार्यी ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$ का इस क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर हैं।

https://www.evidyarthi.in/

इस प्रकार इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र *OBRP* है।

रेखा $x + 2y = 8$ ...(1)

और $3x + 2y = 12$ ...(2)

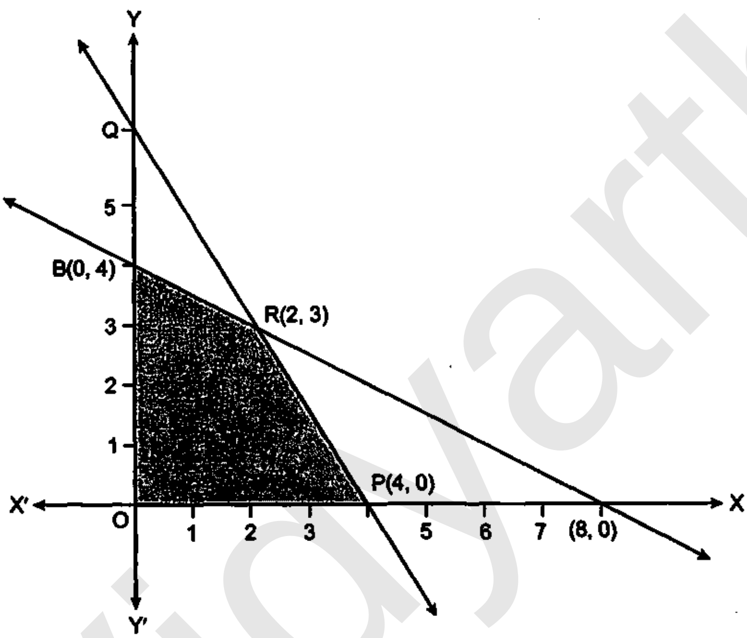
बिन्दु *R* का प्रतिच्छेदन करती है।

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$$2x = 12 - 8 = 4 \text{ या } x = 2$$

समीकरण (1) से,

∴ बिन्दु *R*(2, 3) हैं।



इस प्रकार कोनीय बिन्दु हैं *O*(0, 0), *P*(4, 0), *R*(2, 3) तथा *B*(0, 4)। अब इन कोनीय बिन्दुओं का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	*Z* के संगत मान $Z = -3x + 4y$
O(0, 0)	0
P(4, 0)	– 12 (न्यूनतम)
R(2, 3)	6
B(0, 4)	16

अतः बिन्दु P(4, 0) पर *Z* का न्यूनतम मान = – 12. उत्तर

प्रश्न 3. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

$$3x + 5y \le 15,\ 5x + 2y \le 10,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

हल : दिया है, $Z = 5x + 3y$, अवरोध हैं : $3x + 5y \le 15$, $5x + 2y \le 10$, $x \ge 0, y \ge 0$

(i) $3x + 5y \le 15$ का क्षेत्र—

रेखा $3x + 5y = 15$ बिन्दु *A*(5, 0) और *B*(0, 3) से होकर जाती है।

$3x + 5y \le 15$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 15$ जो सत्य है।

https://www.evidyarthi.in/

अर्थात् इस क्षेत्र में बिन्दु AB पर और इसके नीचे मूल बिन्दु की ओर है।

(ii) $5x + 2y \leq 10$ का क्षेत्र–

रेखा $5x + 2y = 10$ बिन्दु $P(2, 0)$ और $Q(0, 5)$ से होकर गुजरती है।

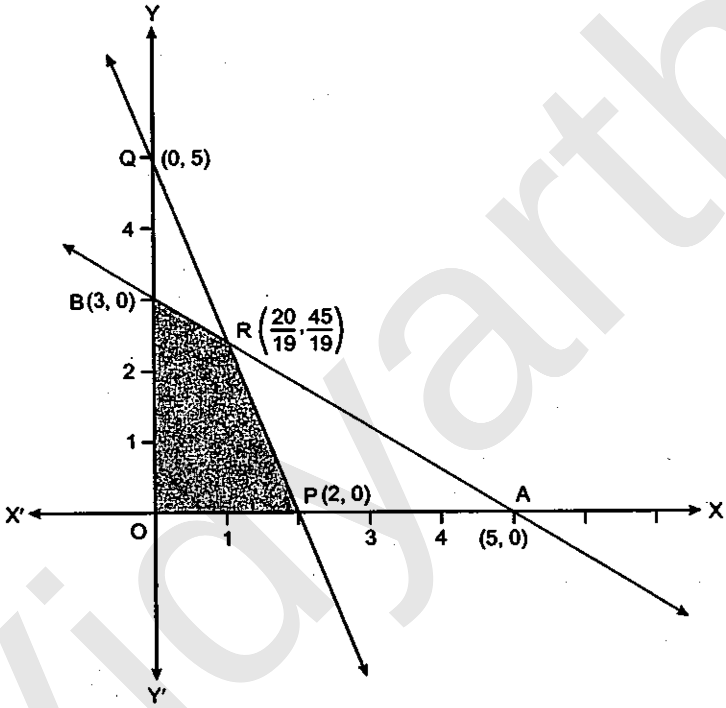
अब $5x + 2y \leq 10$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 10$ जो सत्य है।

अर्थात् $5x + 2y \leq 10$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PQ पर और PQ के नीचे मूलबिन्दु की ओर है।

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और y-अक्ष के दायीं ओर है।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर है।

इस प्रकार इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र $OBRP$ है।



रेखा $3x + 5y = 15$ और $5x + 2y = 10$ बिन्दु $R\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं $O(0, 0)$, $P(2, 0)$, $R\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ तथा $B(3, 0)$। अब इन कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे–

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 5x + 3y$
$O(0, 0)$	0
$P(2, 0)$	10
$R\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$	$\frac{235}{19}$ (अधिकतम)
$B(0, 3)$	9

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

अतः बिन्दु $R\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर Z का अधिकतम मान $= \frac{235}{19}$. उत्तर

प्रश्न 4. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$$

हल : दिया है : $Z = 3x + 5y$ अवरोध हैं, $x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$

(i) $x + 3y \geq 3$ का क्षेत्र–

रेखा $x + 3y = 3$ बिन्दु $A(3, 0)$ और $B(0, 1)$ से होकर गुजरती है।

इसका आरेख रेखा AB है।

$x + 3y \geq 3$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 3$ जो असत्य है।

अर्थात् $x + 3y \geq 3$ के बिन्दु रेखा $x + 3y = 3$ पर और उसके ऊपर है।

(ii) $x + 2y \geq 2$ का क्षेत्र–

रेखा $x + y = 2$ बिन्दु $C(2, 0)$ और $D(0, 2)$ से होकर जाती हैं। इसका आरेख CD है।

$x + y \geq 2$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 2$ जो असत्य है।

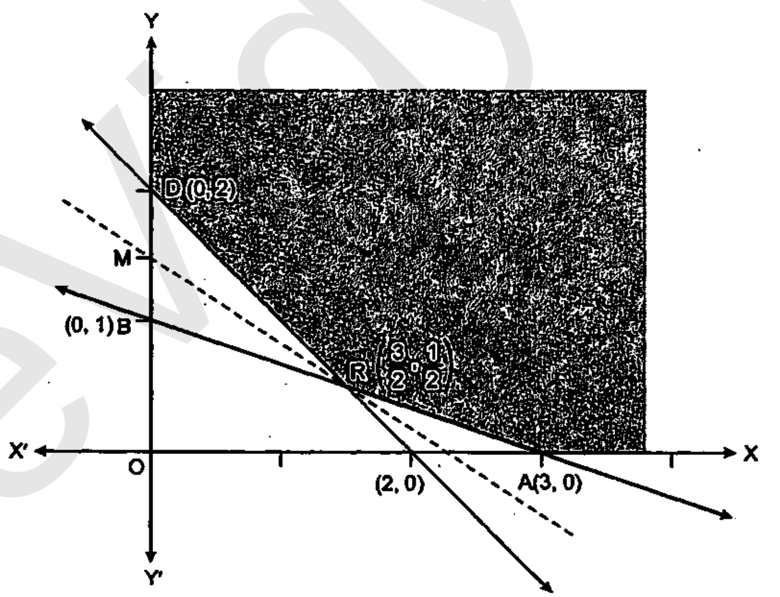
अर्थात् $x + y \geq 2$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा $x + y = 2$ पर और उसके ऊपर हैं।

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और y-अक्ष के दायीं ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और x-अक्ष के ऊपर हैं।

इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र = $YDRAX$ है। जबकि R बिन्दु $AB : x + 3y = 3$ और $CD : x + y = 2$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

AB और CD के समीकरणों को हल करने से बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ प्राप्त होते हैं।



अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं $A(3, 0)$, $R\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D(0, 2)$ । अब इन बिन्दुओं पर Z का मान अग्र सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे–

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 5y$
$A(3, 0)$	9
$R\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	7 (न्यूनतम)
$D(0, 2)$	10

अत: बिन्दु $R\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर Z का न्यूनतम मान = 3. **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$x + 2y \le 10,\ 3x + y \le 15,\ x,\ y \ge 0$$

हल : ज्ञात है कि $Z = 3x + 2y$, अवरोध $x + 2y \le 10$, $3x + y \le 15$, $x, y \ge 0$

(i) **$x + 2y \le 10$ का क्षेत्र–**

रेखा $x + 2y = 10$ बिन्दु $A(10, 0)$ और $B(0, 5)$ से होकर जाती है।

$\therefore$ $x + 2y = 10$ का आरेख रेखा AB है।

$x + 2y \le 10$ में $x = 0, y = 0$ रखने से $0 \le 10$ जो सत्य है।

अर्थात् $x + 2y \le 10$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और AB के नीचे है।

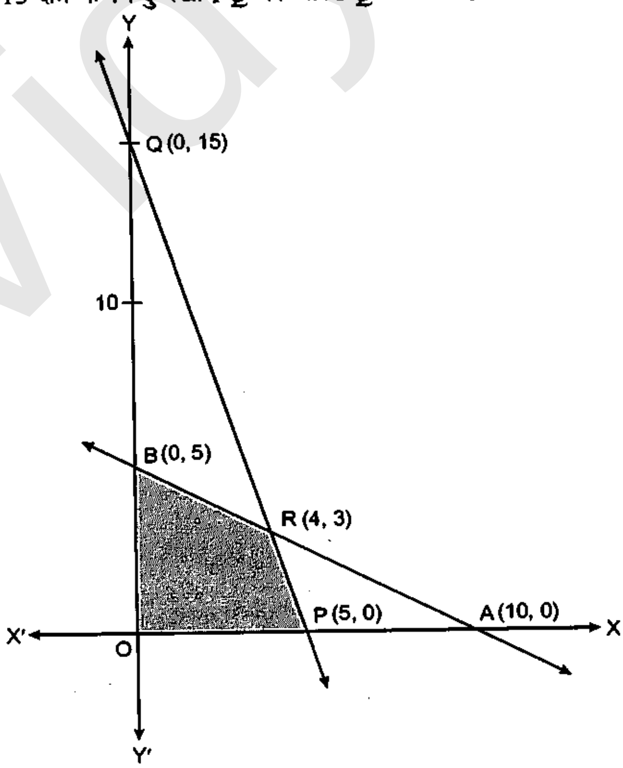
(ii) **$3x + y \le 15$ का क्षेत्र–**

रेखा $3x + y = 15$ बिन्दु $P(5, 0)$ और $Q(0, 15)$ से होकर जाती है।

अत: $3x + y = 15$ का आरेख PQ है।

$3x + y \le 15$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 15$ जो सत्य है।

अर्थात् $3x + y \le 15$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PQ पर और PQ के नीचे है।



evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और उसके दायीं ओर है।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर है।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र OBRP है जबकि R बिन्दु AB और PQ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

$x - 2y = 10$ तथा $3x + y = 15$ को हल करने पर बिन्दु $R(4, 3)$ प्राप्त होता है।

अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं $O(0, 0)$, $R(4, 3)$ तथा $B(0, 5)$। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 3x + 2y$
$O(0, 0)$	0
$P(5, 0)$	15
$R(4, 3)$	18 (अधिकतम)
$B(0, 5)$	10

अतः बिन्दु $R(4, 3)$ पर Z का न्यूनतम मान = 18. उत्तर

प्रश्न 6. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए—

$$2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x, y \geq 0$$

हल : उद्देश्य फलन $Z = x + 2y$, अवरोध $2x + y \geq 3$, $x + 2y \geq 6$, $x, y \geq 0$

(i) $2x + y \geq 3$ का क्षेत्र—

रेखा $2x + y = 3$ बिन्दु $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ और $B(0, 3)$ से होकर जाती है।

$\therefore$ $2x + y = 3$ का आरेख रेखा AB है।

$2x + y \geq 3$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 3$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $2x + y \geq 3$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर हैं।

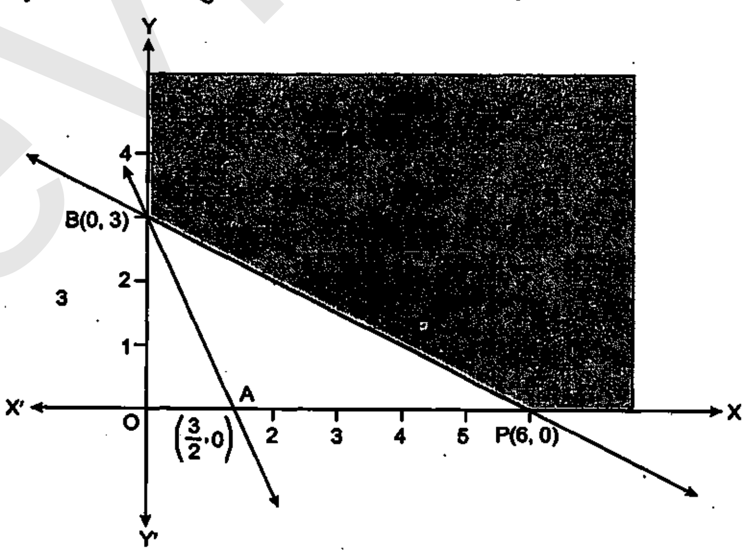
(ii) $x + 2y \geq 6$ का क्षेत्र—

$x + 2y = 6$ बिन्दु $P(6, 0)$ और $B(0, 3)$ से होकर जाती है।

$\therefore$ $x + 2y = 6$ का आरेख PB है।

$x + 2y \geq 6$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x = 2y \geq 6$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PB पर और उसके ऊपर है।



https://www.evidyarthi.in/

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और इसके दायीं ओर है।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और इसके ऊपर है।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र $YBPX$ है।

$P(6, 0)$ तथा $B(0, 3)$ कोनीय बिन्दु हैं। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = x + 2y$
$P(6, 0)$	$6 \rightarrow$ न्यूनतम
$B(0, 3)$	$6 \rightarrow$ न्यूनतम

अतः (6, 0) और (0, 3) को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर न्यूनतम $Z = 6$. उत्तर

दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिन्दुओं पर घटित होता है :

प्रश्न 7. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \leq 0$$

हल : उद्देश्य फलन $Z = 5x + 10y$, अवरोध $x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \leq 0$

(i) **$x + 2y \leq 120$ का क्षेत्र—**

रेखा $x + 2y = 120$ बिन्दु $A(120, 0)$ और $B(0, 60)$ से होकर जाती है।

$\therefore x + 2y = 120$ का आरेख रेखा AB है।

$x + 2y \leq 120$ में $x = 0, y = 0$ रखने से $0 \leq 120$ जो सत्य है।

अर्थात् $x + 2y \leq 120$ के क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और उसके नीचे मूल बिन्दु की ओर स्थित हैं।

(ii) **$x + y \geq 60$ का क्षेत्र—**

रेखा $x + y = 60$, बिन्दु $P(60, 0)$, $B(0, 60)$ से होकर जाती है।

$\therefore x + y = 60$ का आरेख रेखा PB है।

$x + y \geq 60$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 60$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x + y \geq 60$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PB पर और उसके ऊपर होते हैं।

(iii) **$x - 2y \geq 0$ का क्षेत्र—**

रेखा $x - 2y = 0$ मूल बिन्दु O और $Q(120, 60)$ से होकर जाती है।

$\therefore x - 2y \geq 0$ का आरेख रेखा OQ है।

$x - 2y \geq 0$ में $x = 1, y = 0$ रखने पर $1 \geq 0$ जो सत्य है।

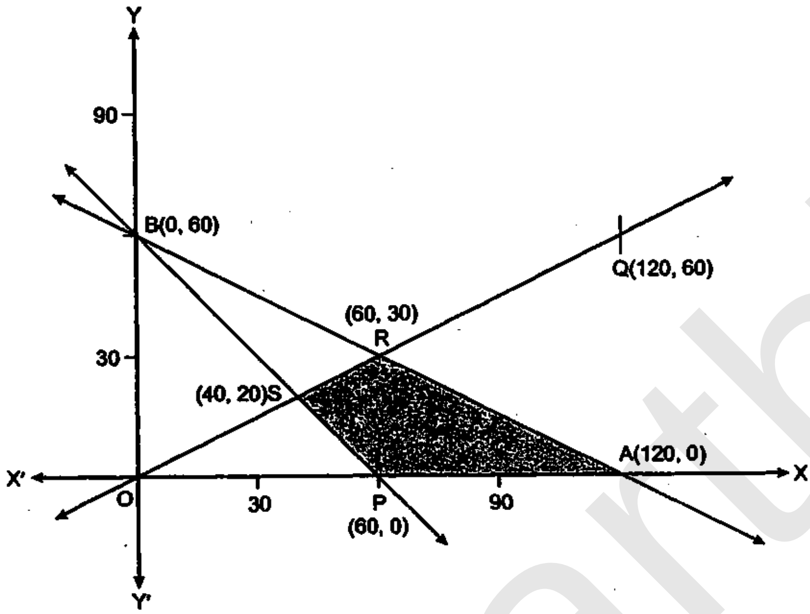
अर्थात् (1, 0) इस क्षेत्र में स्थित है। $x - 2y \leq 0$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा OQ पर और इसके नीचे (1, 0) की ओर हैं।

(iv) $x \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और y-अक्ष के दायीं ओर हैं।

(v) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और इसके ऊपर हैं।

इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र $PSRA$ है जबकि बिन्दु $S(40, 20)$, $x + y = 60$ और $x = 2y$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है, और $R(60, 30)$, $x + 2y = 120$ और $x = 2y$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

https://www.evidyarthi.in/



अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं $P(60, 0)$, $S(40, 20)$, $R(60, 30)$ तथा $A(120, 0)$. अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे—

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = 5x + 10y$
$P(60, 0)$	30 (न्यूनतम)
$S(40, 20)$	400
$R(60, 30)$	600
$A(120, 0)$	600 (अधिकतम)

अतः कोनीय बिन्दु (60, 0) पर Z का न्यूनतम मान = 300 तथा (120, 0) और (60, 30) को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर अधिकतम मान = 600. **उत्तर**

प्रश्न 8. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x + 2y \geq 100,\ 2x - y \leq 0,\ 2x + y \leq 200,\ x, y \geq 0$$

हल : उद्देश्य फलन $Z = x + 2y$, अवरोध $x + 2y \geq 100$, $2x - y \leq 0$, $2x + y \leq 200$, $x, y \geq 0$

(i) $x + 2y \geq 100$ का क्षेत्र—

रेखा $x + 2y = 100$ बिन्दु $A(100, 0)$ और $B(0, 50)$ से होकर जाती है ।

$\therefore\ x + 2y = 100$ का आरेख रेखा AB है।

$x + 2y \geq 100$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 100$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x + 2y \geq 100$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर हैं।

(ii) $2x - y \leq 0$ का क्षेत्र—

रेखा $2x - y = 0$, मूल बिन्दु $O(0, 0)$ और $C(50, 100)$ से होकर जाती है।

$\therefore\ 2x - y = 0$ रेखा का आरेख रेखा OC है।

$2x - y \leq 0$ में $(1, 0)$ रखने पर $1 \leq 0$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $2x - y \leq 0$ का क्षेत्र OC पर और उसके ऊपर का है।

evidyarthi
https://www.evidyarthi.in/

(iii) **$2x + y \le 200$ का क्षेत्र—**

रेखा $2x + y = 200$ बिन्दु $A(100, 0)$ और $D(0, 200)$ से होकर जाती है।

$\therefore$ $2x + y = 200$ का आरेख AD है।

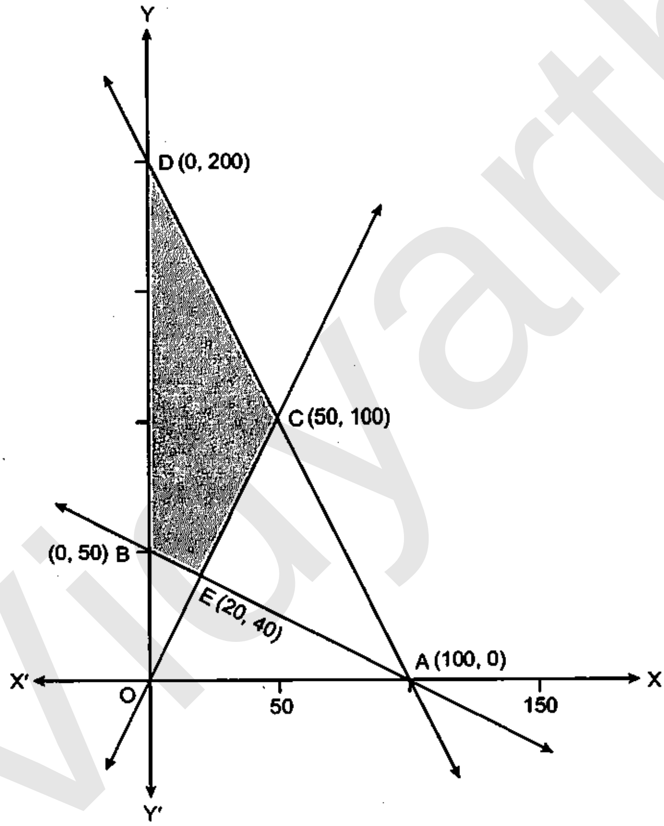
$2x + y \le 200$ में, $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 200$ जो सत्य है।

अर्थात् $2x + y \le 200$ क्षेत्र के बिन्दु AD पर और उसके नीचे है।

(iv) $x \ge 0$ क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और उसके दायीं ओर होते हैं।

(v) $y \ge 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर होते हैं।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र $DBEC$ है। बिन्दु $E(20, 40)$, $AB : x + 2y = 100$ और $OC : 2x - y = 0$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।



अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं—$D(0, 200)$, $B(0, 50)$, $E(20, 40)$ तथा $C(50, 100)$। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे :

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = x + 2y$
$D(0, 200)$	400 (अधिकतम)
$B(0, 50)$	100 (न्यूनतम)
$E(20, 40)$	100 (न्यूनतम)
$C(50, 100)$	250

अतः (0, 50) और (20, 40) को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर Z का मान न्यूनतम = 100 तथा (0, 200) पर अधिकतम मान = 400. **उत्तर**

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 9. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$$

हल : उद्देश्य फलन $Z = -x + 2y$

अवरोध $x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$

(i) $x + y \geq 5$ का क्षेत्र–

रेखा $x + y = 5$ बिन्दु $A(5, 0)$ और $B(0, 5)$ से होकर जाती है।

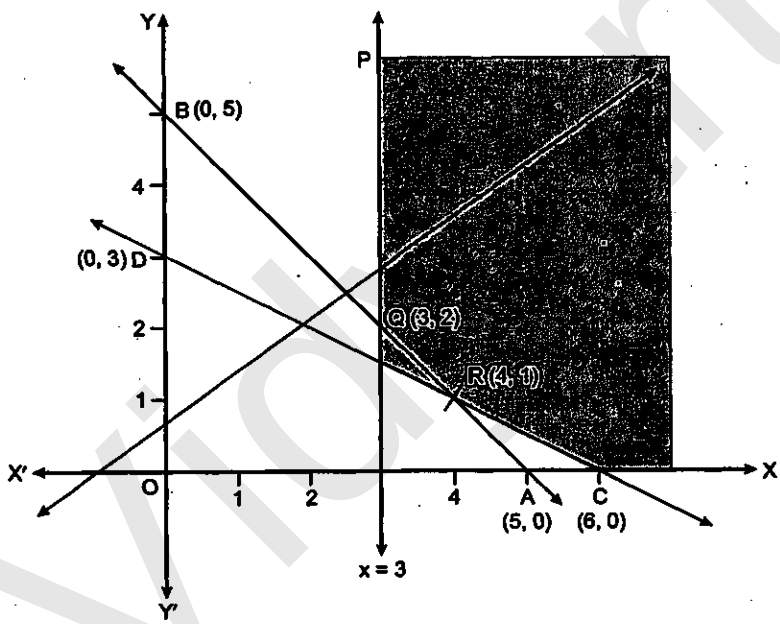
$\therefore x + y = 5$ का आरेख रेखा AB है।

$x + y \geq 5$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 5$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x + y \geq 5$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर हैं।

(ii) $x + 2y \geq 6$ का क्षेत्र–

रेखा $x + 2y = 6$, बिन्दु $C(6, 0)$ और $D(0, 3)$ से होकर जाती है।



$\therefore x + 2y = 6$ रेखा का आरेख रेखा CD है।

$x + 2y \geq 6$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x + 2y \geq 6$ का क्षेत्र बिन्दु CD पर या उसके ऊपर है।

(iii) $x \geq 3$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा $x = 3$ पर या उसके दायीं ओर है।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और उसके ऊपर होते हैं।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र $PQRCX$ है। बिन्दु O रेखा $x = 3$ और $x + y = 5$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु Q के निर्देशांक (3, 2) हैं।

बिन्दु R रेखा $x + 2y = 6$ और $x + y = 5$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है जिसके निर्देशांक (4, 1) हैं।

अर्थात् कोनीय बिन्दु हैं $Q(3, 2)$, $R(4, 1)$ तथा $C(20, 40)$। अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे–

https://www.evidyarthi.in/

कोनीय बिन्दु	Z के संगत मान $Z = -x + 2y$
$Q(3, 2)$	1 (अधिकतम)
$R(4, 1)$	-2
$C(20, 40)$	-6

अर्थात् Z का अधिकतम मान 1 है परन्तु सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है तो $-x + 2y > 1$ क्षेत्र पर विचार करने पर $-x + 2y > 1$ तथा सुसंगत क्षेत्र में अनेकों बिन्दु उभयनिष्ठ हैं अर्थात् Z का कोई अधिकतम मान नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 10. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

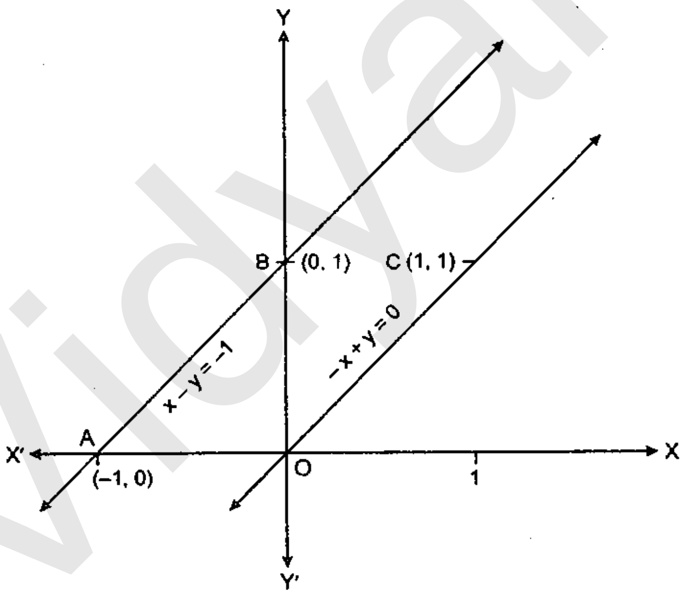
$$x - y \le -1, -x + y \le 0, x, \ y \ge 0$$

हल : उद्देश्य फलन $Z = x + y$, अवरोध $x - y \le -1, -x + y \le 0, x, y \ge 0$

(i) **$x - y \le -1$ का क्षेत्र–**

रेखा $x - y = -1$ बिन्दु $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ से होकर जाती है, इसका आरेख रेखा AB है। $x - y \le -1$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le -1$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x - y \le -1$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर हैं।



(ii) **$-x + y \le 0$ का क्षेत्र–**

रेखा $-x + y = 0$, मूल बिन्दु $O(0, 0)$ और $C(1, 1)$ से होकर जाती है।

$-x + y \le 0$ में $x = 1, y = 0$ रखने पर $-1 \le 0$ जो सत्य है।

अर्थात् $-x + y \le 0$ के क्षेत्र बिन्दु OC पर या उसके नीचे $(1, 0)$ की ओर है।

(iii) $x \ge 0$ क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और x-अक्ष के दायीं ओर हैं।

(iv) $y \ge 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और x-अक्ष के ऊपर स्थित हैं।

स्पष्टत: ऐसा कोई बिन्दु नहीं है जो सभी व्यवरोधों को एक साथ सन्तुष्ट कर सके। अत: इस समस्या का कोई सुसंगत क्षेत्र नहीं है।

इस समस्या में Z का अधिकतम मान नहीं है। उत्तर

https://www.evidyarthi.in/