अध्याय-13

प्रायिकता

(Probability)

(Important Formulae and Definitions)

1. किसी घटना E के होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल परिस्थितियाँ}}$, जहाँ $S(E)$ = घटना E को निरूपित करने वाले बिन्दुओं की संख्या, $S(P)$ = प्रतिदर्श-समष्टि के प्रतिदर्श-बिन्दुओं की कुल संख्या।
2. यदि $\overline{A}$ एक घटना हो और A उसकी पूरक घटना हो, तो $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
3. यदि E_1 तथा E_2 किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं तो मिश्र घटना (E) दोनों घटनाओं के सर्वनिष्ठ के बराबर होगी अर्थात्
$$E = (E_1 \cap E_2)$$
4. एक घटना E, a प्रकार से घट सकती है और b प्रकार से नहीं घट सकती है तो
$$\text{घटना के घटने की प्रायिकता} = \frac{a}{a+b} = P(E)$$
$$\text{घटना के न घटने की प्रायिकता} = \frac{b}{a+b} = P(\bar{E})$$
यहाँ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ E_1 तथा E_2 हैं तथा $P(E_1) \neq 0$

तब $$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)}$$

तथा $$P\left(\frac{E_2}{E_1'}\right) = \frac{n(E_1' \cap E_2)}{n(E_1')}$$

7. यादृच्छिक चर का माध्य $M = \Sigma P_i x_i$
जहाँ यादृच्छिक चर $X = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.
तथा इनकी प्रायिकताएँ $= P_1, P_2, P_3, ..., P_n'$.

8. यादृच्छिक चर का प्रसरण $\sigma^2 = \Sigma P_i(x_i - \mu)^2$
9. द्विपद बंटन से

$$\text{सफलताओं की प्रायिकता} = {}^nC_r p^r q^{n-r}$$

जहाँ p तथा q क्रमशः सफलता तथा असफलता की प्रायिकताएँ हैं।
n = स्वतंत्र प्रयास।

प्रश्नावली 13·1

प्रश्न 1. यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ और $P(E \cap F) = 0.2$, तो $P(E/F)$ और $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $P(E) = 0.6, P(F) = 0.3, P(E \cap F) = 0.2$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}.$$ उत्तर

तथा $$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए कि यदि $P(B) = 0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$.

हल : दिया है : $P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.32$

$\therefore$ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.32}{0.5}$$

$$= \frac{32}{50} = \frac{16}{25}.$$ उत्तर

प्रश्न 3. यदि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P(B/A) = 0.4$ ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(A \cup B)$

हल : दिया है : $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5, P(B/A) = 0.4$

(i) $\because$ $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$\therefore$ $$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= 0.8 \times 0.4 = 0.32.$$ उत्तर

(ii) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.32}{0.5} = \frac{32}{50}$$

$$= \frac{16}{25} = 0.64.$$ उत्तर

(iii) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.8 + 0.5 - 0.32$$
$$= 1.30 - 0.32 = 0.98.$$ उत्तर

प्रश्न 4. $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A/B) = \frac{2}{5}$.

हल : दिया है : $$2P(A) = \frac{5}{13} \text{ या } P(A) = \frac{5}{26} \text{ तथा } P(B) = \frac{5}{13}$$

$\because \quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{2}{13}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{5+10-4}{26}$$

$$= \frac{11}{26}.$$ उत्तर

प्रश्न 5. यदि $P(A) = \dfrac{6}{11}$, $P(B) = \dfrac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \dfrac{7}{11}$ तो ज्ञात कीजिए।

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(B/A)$

हल : दिया है : $P(A) = \dfrac{6}{11}$, $P(B) = \dfrac{5}{11}$, $P(A \cup B) = \dfrac{7}{11}$

(i) $\because \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \dfrac{7}{11} = \dfrac{6}{11} + \dfrac{5}{11} - P(A \cap B)$

या $\quad P(A \cap B) = \dfrac{6}{11} + \dfrac{5}{11} - \dfrac{7}{11} = \dfrac{4}{11}.$ उत्तर

(ii) $\quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{11}}{\frac{5}{11}} = \dfrac{4}{5}.$ उत्तर

(iii) $\quad P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{4}{11}}{\frac{6}{11}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक $P(E/F)$ ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 6. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है—

(i) E : तीसरी उछाल पर चित, F : पहली दोनों उछालों पर चित।

(ii) E : न्यूनतम दो चित, F : अधिकतम एक चित

(iii) E : अधिकतम दो पट, F : न्यूनतम दो पट।

हल : जब एक सिक्के को तीन बार उछाला जाए, तब प्रतिदर्श समष्टि,

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

(i) 3 सिक्के उछलने पर तीसरी उछाल पर चित आता है जो निम्न चार तरीकों से आ सकता है—

$$\{HHH, HTH, THH, TTH\}$$

$\therefore \quad E = \{HHH, HTH, THH, TTH\}$

F : पहली दो उछालों पर चित आता है।

$$= \{HHH, HHT\}$$
$$E \cap F = \{HHH\}$$

अब $$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

(ii) E : 3 उछालों में न्यूनतम अर्थात् कम-से-कम दो चित आना

$$= (HHT, HTH, THH, HHH)$$

F : तीन उछालों में अधिकतम 2 चित आना

$$= \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH\}$$
$$E \cap F = \{HHT, HTH, THH\}$$

अर्थात् $$P(E \cap F) = \frac{3}{8},\ P(F) = \frac{7}{8}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$ उत्तर

(iii) E : अधिकतम 2 पट

$$= \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT\}$$

F : न्यूनतम 2 पट $= \{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$

$$E \cap F = \{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT\}$$
$$P(E \cap F) = \frac{6}{8}, P(F) = \frac{7}{8}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{6}{7}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है—

(i) E : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है।

F : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।

(ii) E : कोई पट प्रकट नहीं होता है।

F : कोई चित प्रकट नहीं होता।

हल : (i) दो सिक्कों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \text{ अर्थात् } n(S) = 4$$

E : एक सिक्के पर पट प्रकट होना

$$= \{HT, TH\} \text{ अर्थात् } n(E) = 2$$

अर्थात् $$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

F : एक सिक्के पर चित प्रकट होना

$= \{HT, TH\}$ अर्थात् $n(F) = 2$

$$P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E \cap F = \{HT, TH\}$$

अर्थात् $n(E \cap F) = 2$

$\therefore$ $P(E \cap F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अतः $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1.$ **उत्तर**

(ii) E : कोई पट प्रकट होता $= \{HH\}$

F : कोई चित प्रकट नहीं होता $= \{TT\}$

$\therefore$ $E \cap F = \phi = \{\ \}$

अर्थात् $n(E \cap F) = 0$

अर्थात् $P(E \cap F) = 0, P(F) = \frac{1}{4}, P(E) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 0 \div \frac{1}{4} = 0.$ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक पासे को तीन बार उछाला गया है—

(i) E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना।

F : पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना।

हल : एक पासे को 3 बार उछाला गया।

$\therefore$ प्रतिदर्श समष्टि में कुल परिणामों की संख्या = 216

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होती है।

$= \{(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4), (1, 5, 4), (1, 6, 4),$
$(2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 5, 4), (2, 6, 4),$
$(3, 1, 4)$ $(3, 2, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 5, 4), (3, 6, 4),$
$(4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 4), (4, 5, 4), (4, 6, 4),$
$(5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 6, 4),$
$(6, 1, 4), (6, 2, 4), (6, 3, 4), (6, 4, 4), (6, 5, 4), (6, 6, 4)\}$

= 36 परिणाम

F = पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना

$= \{(6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)\}$

= 6 परिणाम

$E \cap F = (6, 5, 4)$

$\therefore$ $P(E \cap F) = \frac{1}{216}, P(F) = \frac{6}{216}$

अतः $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{216} \div \frac{6}{216} = \frac{1}{6}.$ **उत्तर**

प्रश्न 9. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया खड़े हैं—

(i) E : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है।

F : पिता मध्य में खड़े हैं।

हल : मान लीजिए पुत्र, माता तथा पिता के क्रमशः s, m, f से व्यक्त किया जाए तो इनका प्रतिदर्श समष्टि होगा

$$S = (s, m, f), (s, f, m), (m, f, s), (m, s, f), (f, m, s), (f, s, m)$$

अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि के 6 परिणाम हैं।

E = पुत्र एक सिरे पर खड़ा है।

$$= \{(s, m, f), (s, f, m), (m, f, s), (f, m, s)\}$$

अर्थात् $n(E) = 4$ इसलिए $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

F : पिता मध्य में खड़े हैं।

$$= \{(m, f, s), (s, f, m)\}$$

अर्थात् $n(F) = 2$ इसलिए $P(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad E \cap F = \{(m, f, s), (s, f, m)\}$

$\Rightarrow \quad n(E \cap F) = 2$

$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

अतः $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = 1.$ **उत्तर**

प्रश्न 10. एक काले और लाल पासे को उछाला गया है—

(a) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि काले पासे पर 5 प्रकट हुआ है।

(b) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

हल—जब दो पासे फेंके जाते हैं तो प्रतिदर्श समष्टि, $S = 6 \times 6 = 36$

(a) मान लीजिए A : पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग = 9

$$= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

B : काले पासे पर 5 प्रकट होता है।

$$= \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$\therefore \quad n(B) = 6$ इसलिए $P(B) = \frac{6}{36}$

$$A \cap B = \{(5, 4)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{36} \div \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$ **उत्तर**

(b) मान लीजिए A = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग = 8

$= \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

और B = लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

= लाल पासे पर संख्या 1, 2, 3 प्रकट हो सकती है।

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

$n(B) = 18$

अर्थात् $P(B) = \frac{18}{36}$

$A \cap B = \{(2, 6), (3, 5)\}$ अर्थात् $n(A \cap B) = 2$

$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{2}{36} \div \frac{18}{36} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$ उत्तर

प्रश्न 11. एक न्याय्य पासे को उछाला गया है। घटनाओं $E = \{1, 3, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ और $G = \{2, 3, 4, 5\}$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए—

(i) $P(E/F)$ और $P(F/E)$ (ii) $P(E/G)$ और $P(G/E)$

(iii) $P(E \cup F/G)$ और $P(E \cap F/G)$

हल—एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 प्रकट हो सकता है।

अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि के 6 परिणाम हैं। $\therefore n(S) = 6$

$E = \{1, 3, 5\}, F = \{2, 3\}, G = \{2, 3, 4, 5\}$

(i) $E \cap F = \{3\}$ अर्थात् $n(E \cap F) = 1$

$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{1}{6},\ P(E) = \frac{3}{6},\ P(F) = \frac{2}{6}$

अब $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$ उत्तर

$P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$ उत्तर

प्रश्न 12. मान लें कि जन्म लेने वाले बच्चे का लड़का या लड़की होना समसम्भाव्य है। यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं, तो दोनों बच्चों के लड़की होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता क्या है, यदि यह दिया गया है कि (i) सबसे छोटा बच्चा लड़की है (ii) न्यूनतम एक बच्चा लड़की है।

हल : मान लीजिए कि लड़कों को B_1, B_2 और लड़कियों को G_1, G_2 से व्यक्त करें तो

प्रतिदर्श समष्टि $= \{(B_1, B_2), (B_1, G_2), (G_1, B_2), (G_1, G_2)\}$

E = दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं $= \{G_1, G_2\}$

F = छोटा बच्चा लड़की है $= \{(G_1, G_2), (B_1, G_2)\}$

$$G = \text{न्यूनतम एक बच्चा लड़की है}$$
$$= \{(G_1, B_2), (G_1, G_2), (B_1, G_2)\}$$

(i) $$E \cap F = (G_1, G_2), P(E \cap F) = \frac{1}{4}, \; P(F) = \frac{2}{4}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

(ii) $$E \cap G = (G_1, G_2), P(E \cap G) = \frac{1}{4}, \; P(G) = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ $$P(E/G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहुविकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है, तो एक आसान प्रश्न की बहु-विकल्पीय होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : कुल प्रश्नों की संख्या = 300 + 200 + 500 + 400 = 1400

माना आसान तथा बहुविकल्पीय प्रश्नों को क्रमशः E तथा F से व्यक्त करें, तब

$$n(E) = 300 + 500 = 800$$

और $$n(F) = 500 + 400 = 900$$

$\therefore E \cap F$: 'आसान बहु-विकल्पीय प्रश्न' अर्थात् $n(E \cap F) = 500$

या $$P(E \cap F) = \frac{500}{1400}$$

और $$P(F) = \frac{900}{1400}$$

अतः $$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{500/1400}{900/1400}$$

$$= \frac{5}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : दो पासों को उछालने से प्रतिदर्श समष्टि, $S = 6 \times 6 = 36$

मान लीजिए A = दो संख्याओं का योग 4 है।

$$= \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \text{ अर्थात् } n(A) = 3$$

दो पासों की उछाल में समान संख्या वाले परिणाम

$$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

B = जब संख्या भिन्न हो तो ऐसे परिणाम = 36 – 6 = 30

$$A \cap B = \{(1, 3), (3, 1)\} \text{ अर्थात् } n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}, \; P(B) = \frac{30}{36}$$

अतः $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2}{36} \div \frac{30}{36} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$ उत्तर

प्रश्न 15. एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्रकट संख्या 3 का गुणज है तो पासे को पुनः फेंकें और यदि कोई अन्य संख्या प्रकट हो तो एक सिक्के को उछालें। घटना न्यूनतम एक पासे पर संख्या 3 प्रकट होना दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट प्रकट होने' की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : यदि पासे और सिक्के को उछाले तो

परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T)\}$

$\therefore$ $n(S) = 20$

मान लीजिए E = सिक्का पर पट आने की घटना,

$= \{(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)\}$

और F = कम-से-कम एक पासे पर 3 का प्रकट होना

$= \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)\}$

अर्थात् $n(F) = 7, E \cap F = \phi$

$\therefore$ $P(F) = \frac{7}{20}$ और $P(E \cap F) = \frac{0}{20}$

अतः $$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0/20}{7/20} = 0.$$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनिए :

प्रश्न 16. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$, $P(A/B)$ है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) परिभाषित नहीं (D) 1

हल : $P(A) = \frac{1}{2}$ तथा $P(B) = 0$

$\therefore$ $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{0} = \infty$$

= परिभाषित नहीं।

अतः विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 17. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ तब

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

हल : दिया है, $P\left(\frac{A}{B}\right) = P\left(\frac{B}{A}\right)$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

या $P(A) = P(B)$

अत: विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्नावली 13·2

प्रश्न 1. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{1}{5}$, और A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : जब A और B स्वतन्त्र घटनाएँ हों, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

काले रंग वाले पत्तों की संख्या = 26

काले रंग वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता

$\therefore$ $$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

एक पत्ता निकालने के बाद गड्डी में 51 पत्ते हैं जिनमें 25 काले पत्ते हैं।

$\therefore$ दूसरा काला वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता = $\frac{25}{51}$

अत: बिना प्रतिस्थापन किए दो काले पत्ते निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}.$$ उत्तर

प्रश्न 3. सन्तरों के एक डिब्बे का निरीक्षण उसमें से तीन सन्तरों को यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए हुए निकाल कर किया जाता है। यदि तीनों निकाले गए सन्तरे अच्छे हों तो डिब्बे को बिक्री के लिए स्वीकृत किया जाता है अन्यथा अस्वीकृत कर देते हैं। एक डिब्बा जिसमें 15 सन्तरे हैं जिनमें से 12 अच्छे व 3 खराब सन्तरे हैं, के बिक्री के लिए स्वीकृत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : डिब्बे में कुल सन्तरों की संख्या = 15

अच्छे सन्तरों की संख्या = 12

कुल संतरों में से 1 अच्छे संतरे को निकालने की प्रायिकता = $\frac{12}{15}$

इसी प्रकार दूसरे अच्छे संतरे के निकालने की प्रायिकता = $\frac{11}{14}$

और तीसरे अच्छे संतरे के निकालने की प्रायिकता = $\frac{10}{13}$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{12}{15} \times \frac{11}{14} \times \frac{10}{13} = \frac{44}{91}.$ उत्तर

प्रश्न 4. एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं या नहीं ?

हल : दिया है, यदि सिक्का और पासा उछला जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

$\Rightarrow$ $\qquad n(S) = 12$

चूँकि घटना A 'सिक्के पर चित को प्रकट होना' व्यक्त करता हो, तब

$$A = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$$

अर्थात् $\qquad n(A) = 6$

अब $\qquad P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$

तथा $\qquad B = \{(H, 3), (T, 3)\}$ अर्थात् $n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

$\therefore$ $\qquad A \cap B = \{(H, 3)\}$ अर्थात् $n(A \cap B) = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$\therefore$ $\qquad P(A).\ P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$

अतः A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. एक पासे पर 1, 2, 3 लाल रंग से और 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए हैं। इस पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'संख्या सम है' और B घटना 'संख्या लाल रंग से लिखी गई है' को निरूपित करते हैं। क्या A और B स्वतन्त्र हैं ?

हल : दिया है : घटना A सम संख्या है $= \{2, 4, 6\}$ अर्थात् $n(A) = 3$

प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ अर्थात् $n(S) = 6$

$\therefore$ $\qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अब 1, 2, 3 को लाल रंग से और 4, 5, 6 को हरे रंग से लिखा गया है।

घटना B : संख्या लाल रंग से लिखी गई है अर्थात् $n(B) = 3$

$\therefore$ $\qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap B$: संख्या 2 जो सम भी है ओर लाल रंग से लिखी है।

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

अब $\qquad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4}$$

अर्थात् $$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

अतः A और B स्वतन्त्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 6. मान लें E तथा F दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$, तब क्या E तथा F स्वतन्त्र हैं ?

हल : दिया है, $$P(E) = \frac{3}{5} \text{ तथा } P(F) = \frac{3}{10}$$

$\therefore$ $$P(E) \times P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

तथा $$P(E \cap F) = \frac{1}{5}$$

$$P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

अतः E और F स्वतन्त्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 7. A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = p$ · p का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, (ii) घटनाएँ स्वतंत्र हैं।

हल : दिया है, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = p$ और $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

(i) यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं तो $P(A \cap B) = 0$

सूत्रानुसार, $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + p - 0$$

$\therefore$ $$p = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}.$$ उत्तर

(ii) यदि घटनाएँ स्वतन्त्र हों, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

परन्तु $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$\therefore$ $$P(A) \cdot P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\frac{1}{2} \times p = \frac{1}{2} + p - \frac{3}{5}$$

या $$\frac{1}{2} \times p - p = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

या $$-\frac{1}{2}p = -\frac{1}{10} \text{ या } p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. मान लें A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$, और $P(B) = 0.4$, तब (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(A/B)$ (iv) $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए।

हल : A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गयीं हैं तथा

$$P(A) = 0.3 \text{ और } P(B) = 0.4$$

(i) $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$= 0.3 \times 0.4 = 0.12.$$ उत्तर

(ii) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 + 0.4 - 0.12$$
$$= 0.7 - 0.12 = 0.58.$$ उत्तर

(iii) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = \frac{12}{40} = 0.3$$ उत्तर

(iv) $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.3} = \frac{12}{30}$$
$$= 0.4.$$ उत्तर

प्रश्न 9. दी गई घटनाएँ A और B ऐसी हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, तब $P(A$-नहीं और B-नहीं$)$ ज्ञात कीजिए।

हल : घटना A-नहीं और B-नहीं का तात्पर्य है = $\overline{A} \cap \overline{B}$

दिया है : $$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2} \text{ तथा } P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

अब $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ और $P(A$- नहीं और B-नहीं$) = \frac{1}{4}$, क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं ?

हल : दिया है, $$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{12}$$

$\Rightarrow$ $$P(A\text{- नहीं और } B\text{-नहीं}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

अर्थात् $$\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{7}{12} + P(A \cap B)$$

या $$P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{3-6+7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

और $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

अत: A और B स्वतंत्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 11. A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$, तो

(i) $P(A$ और $B)$ (ii) $P(A$ और B-नहीं$)$

(iii) $P(A$ या $B)$ (iv) $P(A$ और B में से कोई भी नहीं$)$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$

A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं

(i) $\therefore$ $P(A \text{ और } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$= 0.3 \times 0.6 = 0.18$

$\therefore$ $P(A \text{ और } B) = 0.18.$ उत्तर

(ii) $P(A \text{ और } B \text{ नहीं}) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
$= 0.3 - 0.18 = 0.12.$ उत्तर

(iii) $P(A \text{ या } B) = P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.3 + 0.6 - 0.18$
$= 0.9 - 0.18 = 0.72.$ उत्तर

(iv) $P(A \text{ और } B \text{ में कोई नहीं}) = P(A' \cap B') = P(A' \cup B')$
$= 1 - P(A \cup B)$
$= 1 - 0.72 = 0.28.$ उत्तर

प्रश्न 12. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है तो कम-से-कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पासे की उछाल में प्राप्त सम संख्याएँ = 2, 4, 6

एक पासे के उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ एक सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

तीनों पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

तीनों पासों को उछालने पर कम-से-कम एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. दो गेंदें एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित किए निकाली जाती हैं। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंदें हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) दोनों गेंदे लाल हों

(ii) प्रथम काली एवं दूसरी लाल हो

(iii) एक काली तथा दूसरी लाल हो।

हल : (i) कुल गेंदों की संख्या = 8 + 10 = 18

मान लीजिए लाल तथा काली गेंदों को क्रमशः R तथा B से व्यक्त करें, तब पहली तथा दूसरी उछाल में दोनों लाल गेंदें प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$. **उत्तर**

(ii) पहली उछाल में काली गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता $P(B) = \frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

दूसरी उछाल में लाल गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता $P(R) = \frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

($\because$ गेंद मिला दी जाती है।)

$$\therefore \quad P(BR) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{81}.$$ **उत्तर**

(iii) P(एक काली तथा एक लाल) $= P(BR$ या $RB)$

$= P(BR) + P(RB)$

$= \frac{5}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}$

$= \frac{20+20}{81}=\frac{40}{81}$. **उत्तर**

प्रश्न 14. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) समस्या हल हो जाती है

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

हल : A और B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ और न हल करने की प्रायिकता क्रमशः $1-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ और $1-\frac{1}{3}$ या $\frac{2}{3}$ हैं।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ दोनों की समस्या हल होने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. **उत्तर**

(ii) यदि समस्या के हल होने को S और न हल होने को F निरूपित करें तो तथ्यतः उस समस्या को हल $SF + FS$ ढंग से हल किया जाएगा।

$$\text{इसकी प्रायिकता} = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 15. ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। निम्नलिखित में से किन दशाओं में घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं ?

(i) E : निकाला गया पत्ता हुकुम का है

F : निकाला गया पत्ता इक्का है

(ii) E : निकाला गया पत्ता काले रंग का है

F : निकाला गया पत्ता एक बादशाह है

(iii) E : निकाला गया पत्ता एक बादशाह या एक बेगम है

F : निकाला गया पत्ता एक बेगम या एक गुलाम है

हल : ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52 पत्ते हैं।

उस गड्डी में 13 पत्ते हुकुम के हैं

$\therefore$ $P(E) = P($एक पत्ता हुकुम का निकाला गया$)$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$\because$ ताश की गड्डी में 4 इक्के हैं।

$\therefore$ $P(F) = P$ (निकाला गया पत्ता इक्का है)

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ताश की गड्डी में हुकुम का इक्का एक होता है।

$\therefore$ $P(E \cap F) = P($हुकुम का इक्का निकाला गया$) = \frac{1}{52}$

$$P(E) \times P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = P(E \cap F)$$

$\therefore$ $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

अत: E और F स्वतंत्र हैं।

(ii) ताश की गड्डी में काले रंग के पत्ते = 26

$\therefore$ $P(E) = P($काले रंग का पत्ता निकालना$) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ताश की गड्डी में कुल बादशाह = 4

$\therefore$ $P(F) = P($निकाला गया पत्ता एक बादशाह है$) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

काले रंग के बादशाहों की संख्या = 2

$\therefore$ $P(E \cap F) = P($काले रंग का बादशाह निकालना$) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

$$P(E) \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26} = P(E \cap F)$$

$\therefore$ $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

अत: E और F स्वतंत्र हैं।

(iii) ताश की गड्डी में बादशाह व बेगम की संख्या = 8

$\therefore$ $P(E) = P($बादशाह या बेगम का पत्ता निकालना$)$

$$= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

बेगम व गुलाम के पत्तों की संख्या = 8

$\therefore P(F) = P(\text{बेगम या गुलाम का पत्ता निकालना}) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

घटना E और F में 4 पत्ते बेगम के उभयनिष्ठ हैं।

$$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

अब

$$P(E) \times P(F) = \frac{2}{13} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{169}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{13}$$

$$\therefore \quad P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

अतः E और F स्वतंत्र नहीं हैं।

प्रश्न 16. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।

(a) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।

(b) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(c) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए H हिन्दी और E अंग्रेजी के अखबार पढ़ने को व्यक्त करने वाली घटनाएँ हैं।

प्रश्नानुसार

$$P(H) = 60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(E) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(H \cap E) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

(a)

$$P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E)$$
$$= 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$$

$$1 - P(H \cap E) = 1 - 0.8 = 0.2 = \frac{1}{5}. \qquad \text{उत्तर}$$

इससे स्पष्ट होता है कि $\frac{1}{5}$ अर्थात् 20% विद्यार्थी अखबार नहीं पढ़ते।

(b) P(यदि अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तथा हिन्दी का अखबार भी पढ़ती है)

$$= P(E/H)$$

$$= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}. \qquad \text{उत्तर}$$

(c) P(यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तथा अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ती है)

$$= P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}. \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 17. यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

हल : $\because$ सम अभाज्य संख्या = 2

$\therefore$ सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

अर्थात् दोनों पासों को उछालने पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

अतः विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्न 18. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं यदि

(A) A और B परस्पर अपवर्जी हैं

(B) $P(A' \cap B') = [1 - P(A)] [1 - P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$

(D) $P(A) + P(B) = 1$

हल : जब दोनों घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

या

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$
$$= [1 - P(A)] [1 - P(B)]$$

अतः विकल्प (B) सही है। उत्तर

प्रश्नावली 13·3

प्रश्न 1. एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती हैं तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद की लाल होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : $\therefore$ लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \text{...(i)}$$

इसके पश्चात् दो लाल रंग की गेंद रख दी गईं। अब कलश में 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। दूसरी बार में एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{7}{12} \qquad \text{...(ii)}$$

पुनः माना कि पहली बार में एक काली गेंद निकाली जाती है और फिर उसे कलश में रख दिया जाता है। लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \text{...(iii)}$$

इसके पश्चात् कलश में 2 काली गेंदें रख दी जाती हैं। अब कलश में 5 लाल और 7 काली गेंदें हैं।

दूसरी बार में एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{12} \qquad \text{...(iv)}$$

कलश में दूसरी लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{12}$$

$$= \frac{7+5}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

उत्तर

प्रश्न 2. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है ?

हल : मान लीजिए पहले थैले के चुनने की घटना को E_1 से और दूसरे थैले को चुनने की घटना को E_2 से व्यक्त करते हैं, तथा लाल गेंद निकालने की घटना को E से दर्शाते हैं।

एक थैले को चुनने की प्रायिकता,

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

पहले थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदे हैं।

$\therefore$ लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$P(E/E_1) = \frac{1}{2}$$

दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

$\therefore$ एक लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

अर्थात् $P(E/E_2) = \frac{1}{4}$

पहले थैले से लाल गेंद निकाले जाने की प्रायिकता $= P(E_1E)$

अब बेज प्रमेय से

$$P(E_1) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}.$$

उत्तर

प्रश्न 3. यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों से, 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते हैं। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रों में से 30% और छात्रावास में न रहने वाले छात्रों में से 20% छात्रों ने A-ग्रेड लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A-ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है ?

हल : मान लीजिए E_1 : छात्रावास में रहने वाले छात्र

E_2 : छात्रावास में नहीं रहने वाले छात्र

$P(E_1) = 60\% = 0.6, P(E_2) = 40\% = 0.4$

A/E_1 = वह विद्यार्थी जो A-ग्रेड पाता है और छात्रावास में रहता है।

A/E_2 = वह विद्यार्थी जो A-ग्रेड पाता है और छात्रावास में नहीं रहता है।

$$P(A/E_1) = 30\% = 0.3, P(A/E_2) = 20\% = 0.2$$

$P(E_1/A) = P($A-ग्रेड पाने वाला विद्यार्थी छात्रावास में रहता है।

अब बेज प्रमेय से

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{0.6\times0.3}{0.6\times0.3+0.4\times0.2}$$

$$= \frac{0.18}{0.18+0.08} = \frac{0.18}{0.26} = \frac{9}{13}.$$ उत्तर

प्रश्न 4. एक बहुविकल्पीय प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है और अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। मान लें कि छात्र के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया ?

हल : मान लीजिए उत्तर जानने तथा अनुमान लगाने की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 हैं, तब

$$P(E_1) = \frac{3}{4}, P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A/E_1) = 1, P(A/E_2) = \frac{1}{4}$$

यहाँ $P\left(\frac{A}{E_1}\right)$ विद्यार्थी के उत्तर जानने की प्रायिकता है।

घटना E_1/A = विद्यार्थी जानता है कि उत्तर सही है।

अब बेज प्रमेय से

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(E_1/A)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\times1}{\frac{3}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{16}{13} = \frac{12}{13}.$$ उत्तर

प्रश्न 5. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किन्तु 0.5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत रिपोर्ट देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रस्त बतलाता है। यदि किसी जनसमुदाय में 0.1% लोग उस रोग से ग्रस्त हैं तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है ?

हल : मान लीजिए रोगी तथा निरोगी व्यक्तियों की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 हों और घटना A रक्त की जाँच की रिपोर्ट पोजीटिव हो, तब

$$P(E_1) = P(\text{व्यक्ति रोगी है}) = 0.1\% = 0.001$$
$$P(E_2) = P(\text{व्यक्ति रोगी नहीं है}) = 1 - 0.001$$
$$= 0.999\%$$

$\therefore$ $$P(A/E_1) = 99\% = 0.99$$

$P(A/E_2) = P(\text{रक्त की जाँच की गई है पर रोगी नहीं है}) = 0.5\% = 0.005$

P(व्यक्ति रोगी है और असरदार रक्त जाँच हुई है)

अब बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$
$$= \frac{0.001 \times 0.99}{0.001 \times 0.99 + 0.999 \times 0.005}$$
$$= \frac{9.9}{9.9+49.95} = \frac{9.9}{59.85}$$
$$= \frac{990}{5985} = \frac{198}{1197}.$$

उत्तर

प्रश्न 6. तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है ?

हल : माना पहला, दूसरा तथा तीसरा सिक्के के चुनने की घटनाएँ क्रमशः E_1, E_2 तथा E_3 हों और घटना A, सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना हो, तब

तीन सिक्कों में से एक सिक्का चुनने की प्रायिकता,

अर्थात् $$P(E_1) = \frac{1}{3},\ P(E_2) = \frac{1}{3},\ P(E_3) = \frac{1}{3}$$

पहले सिक्के के दोनों ओर चित है $= P(A/E_1) = 1$

दूसरा सिक्का इस प्रकार अनभिनत है कि

$$P(A/E_2) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

तीसरा सिक्का अनभिनत है जिसकी प्रायिकता, $P(A/E_3) = \dfrac{1}{3}$

P(सिक्के पर चित हो और पहला सिक्का हो) तो

बेज प्रमेय से,

$$\mathrm{P(E_1/A)} = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)+P(E_3)P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. एक बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए घटनाएँ E_1, E_2, E_3 तथा E क्रमशः स्कूटर चालक का बीमा होना, कार चालक का बीमा होना, ट्रक चालक का बीमा होना, और दुर्घटनाग्रस्त होना हों, तब

कुल बीमाकृत चालकों की संख्या = 2000 + 4000 + 6000
= 12000

$$P(E_1) = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_3) = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$$

P(स्कूटर चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_1) = 0.01$
P(कार चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_2) = 0.03$
P(ट्रक चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_3) = 0.15$
P(दुर्घटनाग्रस्त स्कूटर चालक है) तो

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)+P(E_3)P(E/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\times 0.01}{\frac{1}{6}\times 0.01+\frac{1}{3}\times 0.03+\frac{1}{2}\times 0.15}$$

$$= \frac{1}{1+6+45} = \frac{1}{52}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. एक कारखाने में A और B दो मशीनें लगी हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A और 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% और मशीन B का 1% उत्पादन खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : मान लीजिए मशीन A और B के उत्पादन की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 और खराब उत्पादन की घटना E से व्यक्त करें, तब

$$P(E_1) = 60\% = 0.6$$
$$P(E_2) = P(\text{मशीन } B \text{ का प्रतिशत उत्पादन})$$
$$= 40\% = 0.4$$

$$P(E/E_1) = P(\text{मशीन } A \text{ का उत्पादन खराब है})$$
$$= 0.02$$
$$P(E/E_2) = P(\text{मशीन } B \text{ का उत्पादन खराब है})$$
$$= 0.01$$

हमें प्रायिकता ज्ञात करनी है कि ख़राब उत्पादन मशीन A का है।

अतः बेज प्रमेय से
$$P(E_2/E) = \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_1)\times P(E/E_1)+P(E_2)\times P(E/E_2)}$$
$$= \frac{0.4\times 0.01}{0.6\times 0.02+0.4\times 0.01}$$
$$= \frac{0.004}{0.016} = \frac{1}{4}.$$
उत्तर

प्रश्न 9. दो दल एक निगम के निदेशक मण्डल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किया गया था।

हल : मान लीजिए E_1 = पहले दल के जीतने की घटना

E_2 = दूसरे दल के जीतने की घटना

E = एक नए उत्पाद का प्रारम्भ होना

E/E_1 = पहला दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा।

E/E_2 = दूसरा दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा, तब

$P(E_1) = 0.6,\qquad P(E_2) = 0.4$

$P(E/E_1) = 0.7\qquad P(E/E_2) = 0.3$

अब बेज प्रमेय से,
$$P(E_2/E) = P(\text{नया उत्पाद दूसरे दल ने प्रारम्भ किया})$$
$$= \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_2)P(E/E_2)+P(E_1)P(E/E_1)}$$
$$= \frac{0.4\times 0.3}{0.4\times 0.3+0.6\times 0.7}$$
$$= \frac{12}{12+42} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}.$$
उत्तर

प्रश्न 10. मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'चितों' की संख्या नोट करती है। यदि उसे 1, 2, 3, या 4 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ। यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : एक पासे को उछालने से 6(1, 2, 3, 4, 5, 6) परिणाम प्राप्त होते हैं।

मान लीजिए घटना E_1 : 5 या 6 का प्राप्त होना

तथा घटना E_2 : 1, 2, 3, 4 का प्राप्त होना

E : सिक्का/सिक्के उछालने पर चित प्राप्त होना

$P(E_1)$: P(पासा उछालने पर 5, 6 का प्राप्त होना) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(E_2)$: P(पासा उछालने पर 1, 2, 3, 4 का प्राप्त होना) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

जब सिक्का तीन बार उछाला जाए तो कुल परिणाम {TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH} = 8 हैं।

एक चित प्राप्त होने के तरीके HTT, THT, TTH अर्थात् 3 तरीके

अर्थात् $P(E/E_1) = P$(पासा फेंकने पर 5, 6 प्राप्त होने तथा तीन सिक्के उछालने पर 1 चित का प्राप्त होना) $= \frac{3}{8}$

जब एक सिक्का फेंका जाए तो चित आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अर्थात् $P(A/E_1) = P$(पासा फेंकने पर 1, 2, 3, 4 आना तथा 1 सिक्के के फेंकने से चित आना)

$$= \frac{1}{2}$$

अत: बेज प्रमेय से,

$$P(E_2/E) = \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_2)P(E/E_2) + P(E_1)P(E/E_1)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{24}} = \frac{1}{3} \times \frac{24}{11} = \frac{8}{11}.$$

उत्तर

प्रश्न 11. एक व्यावसायिक निर्माता के पास *A*, *B* तथा *C* मशीन ऑपरेटर हैं। प्रथम ऑपरेटर A, 1% खराब सामग्री उत्पादित करता है तथा ऑपरेटर *B* और *C* क्रमश: 5% और 7% खराब सामग्री उत्पादित करता है। कार्य पर *A* कुल समय का 50% लगाता है, *B* कुल समय का 30% तथा *C* कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक खराब सामग्री उत्पादित है तो इसे A द्वारा उत्पादित किए जाने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए तीन मशीनों द्वारा समय के अनुसार घटनाएँ E_1, E_2, E_3 घटती हों, तब

$P(E_1) = P$(पहले ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 50% = 0.5

$P(E_2) = P$(दूसरे ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 30% = 0.3

$P(E_3) = P$(तीसरे ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 20% = 0.2

यहाँ माना घटना E खराब उत्पाद के होने की हो, तब

$$P(E/E_1) = 0.01,\ P(E/E_2) = 0.05,\ P(E/E_3) = 0.07$$

P(खराब उत्पाद पहले ऑपरेटर द्वारा बना है) $= P\left(\frac{E_1}{E}\right)$

अत: बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + P(E_3)P(E/E_3)}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.01}{0.5 \times 0.01 + 0.3 + 0.05 \times 0.2 \times 0.07}$$

$$= \frac{5}{5+15+14} = \frac{5}{34}.$$ उत्तर

प्रश्न 12. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए घटना E_1 = खोया हुआ पत्ता ईंट का पत्ता है।

ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

ईंट के पत्तों की संख्या = 13

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

घटना E_2 = खोया हुआ पत्ता ईंट का नहीं है।

ईंट के अतिरिक्त दूसरे पत्तों की संख्या = 39

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

(i) जब ईंट का पत्ता खो गया हो तब 51 पत्तों में से 12 पत्ते ईंट के रह जायेंगे।

$$\therefore \quad P(A/E_1) = \frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2} = \frac{12 \times 11}{51 \times 50} = \frac{22}{425}$$

(ii) जब ईंट का पत्ता न खोया गया हो तो 51 पत्तों में से 13 पत्ते ईंट के हैं।

$$\therefore \quad P(A/E_2) = \frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2} = \frac{13 \times 12}{51 \times 50} = \frac{26}{425}$$

अतः बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{22}{425}}{\frac{1}{4} \times \frac{22}{125} + \frac{3}{4} \times \frac{26}{425}}$$

$$= \frac{22}{22+78} = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है—

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

हल : माना A के सत्य बोलने तथा सत्य न बोलने की घटनाएँ E_1 तथा E_2 हों, तब

$$P(E_1) = \frac{4}{5}, P(E_2) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

जब E चित होने की घटना दर्शाता हो, तब

$$P\left(\frac{E}{E_1}\right) = \frac{1}{2} \text{ और } P\left(\frac{E}{E_2}\right) = \frac{1}{2}$$

अत: चित आने की अभीष्ट प्रायिकता,

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{E}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{E}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{E}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 14. यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$, तो निम्न में से कौन ठीक है ?

(A) $P(A/B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ **(B)** $P(A/B) < P(A)$

(C) $P(A/B) \geq P(A)$ **(D)** इनमें से कोई नहीं।

हल : $\because$ $A \subset B$ अर्थात् $A \cap B = A$

या $$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

परन्तु $P(B) \leq 1$

अर्थात् $$P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. A और B इस प्रकार घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$, $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए यदि (i) A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है (ii) $A \cap B = \phi$.

हल : (i) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ [$\because$ A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है।]

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$ उत्तर

(ii) $A \cap B = \phi$ अर्थात् $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

$\Rightarrow$ $$P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$ उत्तर

प्रश्न 2. एक दम्पति के दो बच्चे हैं

(i) दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि दोनों बच्चों में से कम-से-कम एक बच्चा लड़का है।

(ii) दोनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।

हल : (i) मान लीजिए लड़का होने तथा लड़की होने की घटना क्रमशः A तथा B हों, और उन्हें B तथा G से व्यक्त करें, तब

घटना A = दोनों बच्चे लड़के हैं = $\{B, B\}$

B = दोनों बच्चों में से कम-से-कम एक लड़का है

$= \{BG, GB, BB\}$

$\therefore$ $A \cap B = \{BB\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

(ii) माना कि A = दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं = $\{GG\}$

B = बड़ा बच्चा लड़की है = $\{GG, GB\}$

$A \cap B = \{GG\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$\therefore$ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ उत्तर

प्रश्न 3. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफेद हैं। एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छिक चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता क्या है ? यह मान लें कि पुरुषों और महिलाओं की संख्या समान है।

हल : मान लीजिए पुरुषों की संख्या समान है।

घटना E_1 = पुरुष का होने, E_2 = महिला का होना

A : सफेद बाल का होना

$\therefore$ $$P(E_1) = \frac{1}{2}, \ P(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/E_1) = 5\% = 0.05$$

$$P(A/E_2) = 0.25\% = 0.0025$$

अतः बेज प्रमेय से, $$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0.05}{\frac{1}{2} \times 0.05 + \frac{1}{2} \times 0.0025}$$

$$= \frac{500}{500+25} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}.$$ उत्तर

प्रश्न 4. मान लीजिए कि 90% लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि 10 लोगों में से यादृच्छया चुने गए अधिक-से-अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हों ?

हल : व्यक्ति के दाहिने हाथ से काम करने की प्रायिकता (p)

$$= 90\% = 0.9 = \frac{9}{10}$$

$\therefore$ $$q = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ और } n = 10$$

P(अधिक-से-अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करते हैं)

$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$= 1 - [P(7) + P(8) + P(9) + P(10)]$

$$= 1 - \left[{}^{10}C_7\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^7 + {}^{10}C_8\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^8 + {}^{10}C_9\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^9 + {}^{10}C_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right].$$

$$= 1 - \sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$$ उत्तर

Ques 5 **यदि एक लीप वर्ष को यादृच्छया चुना गया हो तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उस वर्ष में 53 मंगलवार होंगे।**

हल : एक लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। इसमें 52 पूर्ण सप्ताह हैं और 2 दिन शेष रहते हैं। इन दोनों दिनों को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

(सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, बृहस्पतिवार), (बृहस्पतिवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार) (शनिवार, रविवार), (रविवार, सोमवार)

इस प्रकार के कुल समूहों की संख्या = 7

इनमें से मंगलवार दो बार आता है। यानी (सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार)

अतः लीप वर्ष में 53 मंगलवार आने की प्रायिकता = $\frac{2}{7}$. **उत्तर**

Ques 6 मान लीजिए हमारे पास A, B, C और D बक्से हैं जिसमें रखी संगमरमर की लाल, सफेद और काली टुकड़ियों का विवरण निम्न तरीके से है। यादृच्छया एक बॉक्स चुना जाता है तथा इससे एक टुकड़ा निकाला जाता है। यदि टुकड़ा लाल हो तो इसे बॉक्स A, बॉक्स B, बॉक्स C से निकाले जाने की क्या प्रायिकता है ?

बॉक्स	संगमरमर की टुकड़ियों का रंग		
	लाल	सफेद	काला
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

हल : दिए गए 4 बॉक्स में से एक बॉक्स चुने जाने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$

अर्थात् $$P(E) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

मान लीजिए A घटना लाल रंग की टुकड़ी निकलना है, बॉक्स A में कुल 10 टुकड़ियाँ हैं जिनमें 1 लाल है।

$\therefore$ $$P(A/E_1) = \frac{1}{10}$$

इसी प्रकार $P(A/E_2) = \frac{6}{10}$, $P(A/E_3) = \frac{8}{10}$ और $P(A/E_4) = 0$

∴ बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)+P(E_3)P(A/E_3)+P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times 0}$$

$$= \frac{1}{1+6+8} = \frac{1}{15}.$$

(ii) पुनः बेज प्रमेय से $P(E_2A)$

$$= \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)+P(E_3)P(A/E_3)+P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times 0}$$

$$= \frac{6}{1+6+8} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

तथा (iii) बेज प्रमेय से $P(E_3/A)$

$$= \frac{P(E_3)P(A/E_3)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)+P(E_3)P(A/E_3)+P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times 0}$$

$$= \frac{8}{1+6+8} = \frac{8}{15}.$$

अतः लाल रंग की टुकड़ी बॉक्स A, बॉक्स B, बॉक्स C से चुने जाने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ और $\frac{8}{15}$ है।

उत्तर

Ques 7 मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है। यह मान लिया जाता है कि ध्यान और योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देता है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है। किसी भी समय रोगी इन दोनों में से किसी एक विकल्प का चयन करता है। यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रसित हो जाता है। रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए घटना E_1, E_2 तथा E क्रमशः ध्यान व योग से लाभ की घटना, दवा द्वारा इलाज की घटना और दिल का दौरा पड़ने की घटनाएँ हों, तब

$$P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}, P(E) = 40\% = 0.4$$

दिया गया है कि ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ने का खतरा 30% कम हो जाता है।
अर्थात् दिल का दौरा 70% खतरा है।
या E/E_1 = ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ता है।

$$\therefore \quad P(E/E_1) = 0.40 \times 7.0 = 0.28$$

तथा दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने का 25% खतरा कम हो जाता है।
अर्थात् दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने से खतरा 75% है।

$$\therefore \quad P(E/E_2) = 0.4 \times 0.75 = 0.30$$

इस प्रकार $\quad P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}$

$$P(E/E_1) = 0.28, P(E/E_2) = 0.30$$

अतः बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 0.28}{\frac{1}{2}\times 0.28 + \frac{1}{2}\times 0.30} = \frac{28}{28+30}$$

$$= \frac{28}{58} = \frac{14}{29}.$$ उत्तर

Ques 8

यदि दो कोटि के एक सारणिक के सभी अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का धनात्मक मान होने की क्या प्रायिकता है ? (मान लीजिए कि सारणिक के प्रत्येक अवयव स्वतंत्र रूप से चुने जा सकते हैं तथा प्रत्येक की चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।)

हल : चूँकि 2 कोटि के एक सारणिक में अवयवों की संख्या = 4
$\therefore$ सारणिकों द्वारा बनी संख्या = $2^4 = 16$

जिसके धनात्मक सारणिक केवल $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ और $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

इस प्रकार उपरोक्त सारणिक के प्रत्येक अवयव को चुनने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता = $3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$. उत्तर

Ques 9 एक इलेक्ट्रॉनिक एसेंबली के दो सहायक निकाय A और B हैं। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात हैं :

$P(A$ के असफल होने की) = 0.2
$P(B$ के अकेले असफल होने की) = 0.15
$P(A$ और B के असफल होने की) = 0.15
तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :
(i) $P(A$ असफल/B असफल हो चुकी हो)
(ii) $P(A$ के अकेले असफल होने की)।

हल : मान लीजिए घटना A और B के असफल होने को क्रमशः A', B' से व्यक्त किया गया है।

प्रश्नानुसार $P(A') = 0.2$

P(A और B के असफल होना) $= P(A' \cap B') = 0.15$

P(B के अकेले असफल होना) $= P(B') - P(A' \cap B') = 0.15$

या $P(B') - 0.15 = 0.15$

$\therefore$ $P(B') = 0.15 + 0.15 = 0.30$

(i) $$P(A'/B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$$

$$= \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2} = 0.5.$$ उत्तर

(ii) P(A अकेले असफल होता है) $= P$(A अकेले ही)

$= P(A') - P(A' \cap B')$

$= 0.2 - 0.15 = 0.05.$ उत्तर

Ques 10

थैले 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं तथा थैला 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं।

तथा थैले 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं।

मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और काली गेंद निकालने की हों, तब

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{3}{7}, \; P(E_2) = \frac{4}{7}$$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना

एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई। इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गईं।

$$\therefore \quad P(A/E_1) = \frac{5}{10}$$

एक काली गेंद थैले 1 से निकालकर थैला 2 में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

$$\therefore \quad P(A/E_2) = \frac{4}{10}$$

बेज प्रमेय से,
$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{7} \times \frac{5}{10} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{10}} = \frac{16}{15+16}$$

$$= \frac{16}{31}.$$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर का चुनाव कीजिए :

Ques 11 यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0, P(B/A) = 1$ तब :

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$

(C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

हल : $P(B/A) = 1$

$\Rightarrow$ $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$$

जहाँ $A \subset B, A \cap B = P(A)$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A)$

अत: विकल्प (A) सही है। उत्तर

Ques 12 यदि $P(A/B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है ?

(A) $P(B/A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$

(C) $P(B/A) > P(B)$ (D) $P(B/A) = P(B)$

हल : $P(A/B) > P(A)$

$\Rightarrow$ $$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

$\therefore$ $P(A \cap B) > P(A).P(B)$

या $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$$

$\Rightarrow$ $P(B/A) > P(B)$

अत: विकल्प (C) सही है। उत्तर

Ques 13 यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B) = P(A)$ तब :

(A) $P(B/A) = 1$ (B) $P(A/B) = 1$

(C) $P(B/A) = 0$ (D) $P(A/B) = 0$

हल : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$

$\Rightarrow$ $P(B) - P(A \cap B) = 0$

या $P(A \cap B) = P(B)$

या $$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

या $$P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$$

अत: विकल्प (B) सही है। उत्तर