

गणित

(पाठ - 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 से 2 तक में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

उत्तर 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर} \\ = 2 \times (-1) - 4 \times (-5) = -2 + 20 = 18$$

प्रश्न 2:

$$(i) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$(ii) \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

उत्तर 2:

$$(i) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos \theta \times \cos \theta - \sin \theta \times (-\sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(ii) \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix} = (x^2 - x + 1) \times (x + 1) - (x - 1) \times (x + 1) \\ = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 - (x^2 + x - x - 1) \\ = x^3 - x^2 + 2$$

प्रश्न 3:

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ तो दिखाइए } |2A| = 4|A|$$

उत्तर 3:

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर} \\ = 2 \times 4 - 4 \times 8 = 8 - 32 = -24 \quad \dots (1)$$

$$4|A| = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर} \\ = 4(1 \times 2 - 2 \times 4) = 4(-6) = -24 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से, $|2A| = 4|A|$

प्रश्न 4:

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ हो, तो दिखाइए } |3A| = 27|A|$$

उत्तर 4:

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर} \\ = 3(36 - 0) - 0(0 - 0) + 1(0 - 0) = 108 \quad \dots (1)$$

$$27|A| = 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर} \\ = 27\{1(4 - 0) - 0(0 - 0) + 1(0 - 0)\} = 27(4) = 108 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से, $|3A| = 27|A|$

प्रश्न 5:

निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

$$(i) \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (iii) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (iv) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

उत्तर 5:

$$(i) \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}$$
$$= 3(0 - 5) + 1(0 + 3) - 2(0 - 0) = -15 + 3 - 0 = -12$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}$$
$$= 3(1 + 6) + 4(1 + 4) + 5(3 - 2) = 21 + 20 + 5 = 46$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}$$
$$= 0(0 + 9) - 1(0 - 6) + 2(-3 - 0) = 0 + 6 - 6 = 0$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}$$
$$= 2(0 - 5) + 1(0 + 3) - 2(0 - 6) = -10 + 3 + 12 = 5$$

प्रश्न 6:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ हो, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए

उत्तर 6:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}$$
$$= 1(-9 + 12) - 1(-18 + 15) - 2(8 - 5) = 3 + 3 - 6 = 0$$

प्रश्न 7:

x के मान ज्ञात कीजिए यदि

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$$

उत्तर 7:

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow 2 - 20 = 2x^2 - 24 \quad \Rightarrow x^2 = 3 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow 10 - 12 = 5x - 6x \quad \Rightarrow -2 = -x \quad \Rightarrow x = 2$$

प्रश्न 8:

यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है:

(A) 6

(B) ± 6

(C) -6

(D) 0

उत्तर 8:

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x^2 - 36 = 36 - 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = \pm 6$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ - 4) (सारांशिक)

(कक्षा 12)

Exercise 4.2

प्रश्न 1:

निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3)

(ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (-2, -3), (3, 2), (-1, -8)

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(i) A(1, 0), B(6, 0), C(4, 3)

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [1(0 - 3) - 0(6 - 4) + 1(18 - 0)] = \frac{1}{2} (15) = 7.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

(ii) A(2, 7), B(1, 1), C(10, 8)

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [2(1 - 8) - 7(1 - 10) + 1(8 - 10)] = \frac{1}{2} (47) = 23.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

(iii) A(-2, -3), B(3, 2), C(-1, -8)

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [-2(2 + 8) + 3(3 + 1) + 1(-24 + 2)] = \frac{1}{2} (-30) = -15$$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 15 वर्ग इकाई

प्रश्न 2:

दर्शाइए कि बिंदु A(a, b + c), B(b, c + a) और C(c, a + b) सरिख हैं।

उत्तर 2:

यदि बिंदु A(a, b + c), B(b, c + a) और C(c, a + b) सरिख हैं। तो ABC से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b + c & 1 \\ b & c + a & 1 \\ c & a + b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & a + b + c & 1 \\ b & a + b + c & 1 \\ c & a + b + c & 1 \end{vmatrix} \quad [C_2 \rightarrow C_1 + C_2 \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1}{2} (a + b + c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad [C_2 \text{ से } a + b + c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= 0 \quad [\because C_1 = C_3]$$

अतः, बिंदु A(a, b + c), B(b, c + a) और C(c, a + b) सरिख हैं।

प्रश्न 3:

प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिंदु निम्नलिखित हैं:

(i) $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$

(ii) $(-2, 0), (0, 4), (0, k)$

उत्तर 3:

(i) $A(k, 0), B(4, 0), C(0, 2)$

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [k(0-2) - 0(4-0) + 1(8-0)] = \frac{1}{2} (-2k+8) = -k+4$$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई

$$\text{इसलिए, } |-k+4| = 4 \Rightarrow -k+4 = \pm 4$$

$$\Rightarrow -k+4 = 4 \quad \text{या} \quad -k+4 = -4$$

$$\Rightarrow k = 0 \quad \text{या} \quad k = 8$$

अतः, k का मान 0 या 8 है।

(ii) $A(-2, 0), B(0, 4), C(0, k)$

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [-2(4-k) - 0(0-0) + 1(0-0)] = \frac{1}{2} (-8+2k) = -4+k$$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई

$$\text{इसलिए, } |-4+k| = 4 \Rightarrow -4+k = \pm 4$$

$$\Rightarrow -4+k = 4 \quad \text{या} \quad -4+k = -4$$

$$\Rightarrow k = 8 \quad \text{या} \quad k = 0$$

अतः, k का मान 0 या 8 है।

प्रश्न 4:

(i) सारणिकों का प्रयोग करके $(1, 2)$ और $(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके $(3, 1)$ और $(9, 3)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

(i) माना, $A(1, 2)$ और $B(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा पर कोई बिंदु $P(x, y)$ है। अतः, बिंदु A, B और P संरेख होंगे और इनसे बनने वाले त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\text{इसलिए, त्रिभुज } ABP \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [1(6-y) - 2(3-x) + 1(3y-6x)] = 0$$

$$\Rightarrow 6-y-6+2x+3y-6x = 0$$

$$\Rightarrow -4x+2y = 0$$

$$\Rightarrow 2x = y$$

(ii) माना, $A(3, 1)$ और $B(9, 3)$ को मिलाने वाली रेखा पर कोई बिंदु $P(x, y)$ है। अतः, बिंदु A, B और P संरेख होंगे और इनसे बनने वाले त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\text{इसलिए, त्रिभुज } ABP \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [3(3 - y) - 1(9 - x) + 1(9y - 3x)] = 0$$

$$\Rightarrow 9 - 3y - 9 + x + 9y - 3x = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow x = 3y$$

प्रश्न 5:

यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है:

(A) 12

(B) -2

(C) -12, -2

(D) 12, -2

उत्तर 5:

$A(2, -6), B(5, 4), C(k, 4)$

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [2(4 - 4) + 6(5 - k) + 1(20 - 4k)] = \frac{1}{2} (30 - 6k + 20 - 4k) = 25 - 5k$$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 35 वर्ग इकाई

$$\text{इसलिए, } |25 - 5k| = 35 \Rightarrow 25 - 5k = \pm 35$$

$$\Rightarrow 25 - 5k = 35 \quad \text{या} \quad 25 - 5k = -$$

$$\Rightarrow k = \frac{-10}{5} = -2 \quad \text{या} \quad k = \frac{60}{5} = 12$$

अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ - 4) (सारणिक)

(कक्षा 12) Exercise 4.3

निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड लिखिए।

प्रश्न 1:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

उत्तर 1:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है एवं a_{ij} का सहखंड $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ है। इसलिए,
 अवयव a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = 3$ तथा a_{11} का सहखंड $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$ है।
 अवयव a_{12} का उपसारणिक $M_{12} = 0$ तथा a_{12} का सहखंड $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 0$ है।
 अवयव a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = -4$ तथा a_{21} का सहखंड $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 4$ है।
 अवयव a_{22} का उपसारणिक $M_{22} = 2$ तथा a_{22} का सहखंड $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$ है।

(ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

अवयव a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = d$ तथा a_{11} का सहखंड $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = d$ है।
 अवयव a_{12} का उपसारणिक $M_{12} = b$ तथा a_{12} का सहखंड $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -b$ है।
 अवयव a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = c$ तथा a_{21} का सहखंड $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -c$ है।
 अवयव a_{22} का उपसारणिक $M_{22} = a$ तथा a_{22} का सहखंड $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a$ है।

प्रश्न 2:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

उत्तर 2:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

यहाँ,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

एवं $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, इसलिए

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 0 & A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -1 & A_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = 0 & A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 1 & A_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = 0 & A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -1 & A_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \end{aligned}$$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

यहाँ,

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \end{aligned}$$

एवं $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, इसलिए

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 11 & A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -6 & A_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = 3 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = 4 & A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 2 & A_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = -20 & A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = 13 & A_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = 5 \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

यहाँ, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$ तथा

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 16) = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 3) = -7$$

$$\text{इसलिए, } \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + 0(7) + 1(-7) = 7$$

प्रश्न 4:

तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

यहाँ, $a_{13} = yz$, $a_{23} = zx$, $a_{33} = xy$ तथा

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - y$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -(z - x) = x - z$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x$$

$$\begin{aligned}
\text{इसलिए, } \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x) \\
&= yz^2 - y^2z + zx^2 - xz^2 + xy^2 - x^2y \\
&= zx^2 - x^2y - xz^2 + xy^2 + yz^2 - y^2z \\
&= x^2(z-y) - x(z^2 - y^2) + yz(z-y) \\
&= (z-y)[x^2 - x(z+y) + yz] \\
&= (z-y)[x^2 - xz - xy + yz] \\
&= (z-y)[x(x-z) - y(x-z)] \\
&= (x-z)(z-y)(x-y) \\
&= (x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}$$

प्रश्न 5:

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखंड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

(B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$

(D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

उत्तर 5:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है: $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ - 4) (सारणीक)

(कक्षा 12) Exercise 4.4

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज (adjoint) ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर 1:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, इसलिए, $A_{11} = 4$ $A_{12} = -3$ $A_{21} = -2$ $A_{22} = 1$

आव्यूह A का सहखंडज $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर 2:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, इसलिए

$$A_{11} = 3$$

$$A_{12} = -12$$

$$A_{13} = 6$$

$$A_{21} = 1$$

$$A_{22} = 5$$

$$A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -11$$

$$A_{32} = -1$$

$$A_{33} = 5$$

आव्यूह A का सहखंडज $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A(adj A) = (adj A).A = |A|.I$ है।

प्रश्न 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

उत्तर 3:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = -6$ $A_{12} = 4$ $A_{21} = -3$ $A_{22} = 2$

$$|A| = -12 + 12 = 0$$

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(adj A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 + 12 & -6 + 6 \\ 24 - 24 & 12 - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(adj A).A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 + 12 & -18 + 18 \\ 8 - 8 & 12 - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A|.I = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः, } A(adj A) = (adj A).A = |A|.I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर 4:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, इसलिए $|A| = 1(0 - 0) + 1(9 + 2) + 2(0 - 0) = 11$

$$A_{11} = 0$$

$$A_{12} = -11$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 3$$

$$A_{22} = 1$$

$$A_{23} = -1$$

$$A_{31} = 2$$

$$A_{32} = 8$$

$$A_{33} = 3$$

$$\text{आव्यूह } A \text{ का सहखंडज} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 11 + 0 & 3 - 1 - 2 & 2 - 8 + 6 \\ 0 + 0 + 0 & 9 + 0 + 2 & 6 + 0 - 6 \\ 0 + 0 + 0 & 3 + 0 - 3 & 2 + 0 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A).A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 9 + 2 & 0 + 0 + 0 & 0 - 6 + 6 \\ -11 + 3 + 8 & 11 + 0 + 0 & -22 - 2 + 24 \\ 0 - 3 + 3 & 0 + 0 + 0 & 0 + 2 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|A|.I = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः, } A(\text{adj } A) = (\text{adj } A).A = |A|.I = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर 5:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = 3$ $A_{12} = -4$ $A_{21} = 2$ $A_{22} = 2$

$|A| = 6 + 8 = 14 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6:

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर 6:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = 2$ $A_{12} = 3$ $A_{21} = -5$ $A_{22} = -1$

$|A| = -2 + 15 = 13 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

उत्तर 7:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 1(10 - 0) - 2(0 - 0) + 3(0 - 0) = 10 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 10$

$A_{12} = 0$

$A_{13} = 0$

$A_{21} = -10$

$A_{22} = 5$

$A_{23} = 0$

$A_{31} = 2$

$A_{32} = -4$

$A_{33} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

उत्तर 8:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 1(-3 - 0) - 0(-3 - 0) + 0(6 - 15) = -3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = -3$

$A_{12} = 3$

$A_{13} = -9$

$A_{21} = 0$

$A_{22} = -1$

$A_{23} = -2$

$A_{31} = 0$

$A_{32} = 0$

$A_{33} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर 9:

$$\text{यहाँ, } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

इसलिए $|A| = 2(-1-0) - 1(4-0) + 3(8-7) = -3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A_{11} = -1$$

$$A_{12} = -4$$

$$A_{13} = 1$$

$$A_{21} = 5$$

$$A_{22} = 23$$

$$A_{23} = -11$$

$$A_{31} = 3$$

$$A_{32} = 12$$

$$A_{33} = -6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर 10:

$$\text{यहाँ, } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

इसलिए $|A| = 1(8-6) + 1(0+9) + 2(0-6) = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A_{11} = 2$$

$$A_{12} = -9$$

$$A_{13} = -6$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = -2$$

$$A_{23} = -1$$

$$A_{31} = -1$$

$$A_{32} = 3$$

$$A_{33} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

उत्तर 11:

$$\text{यहाँ, } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ इसलिए}$$

$|A| = 1(-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 0(0-0) + 0(0-0) = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A_{11} = 1$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = -\cos \alpha$$

$$A_{23} = -\sin \alpha$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{32} = -\sin \alpha$$

$$A_{33} = \cos \alpha$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

प्रश्न 12:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

उत्तर 12:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, इसलिए, $A_{11} = 5$ $A_{12} = -2$ $A_{21} = -7$ $A_{22} = 3$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, इसलिए, $B_{11} = 9$ $B_{12} = -7$ $B_{21} = -8$ $B_{22} = 6$

$|B| = 54 - 56 = -2 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{45}{2} - 8 & \frac{63}{2} + 12 \\ \frac{35}{2} + 6 & -\frac{49}{2} - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 49 & 24 + 63 \\ 12 + 35 & 16 + 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$|AB| = 67 \times 61 - 87 \times 47 = 4087 - 4089 = -2 \neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$C_{11} = 61 \quad C_{12} = -47 \quad C_{21} = -87 \quad C_{22} = 67$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj } AB = \frac{1}{|AB|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

अतः, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

प्रश्न 13:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

$$\text{LHS} = A^2 - 5A + 7I = AA - 5A + 7I$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 - 1 & 3 + 2 \\ -3 - 2 & -1 + 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 - 15 + 7 & 5 - 5 + 0 \\ -5 + 5 + 0 & 3 - 10 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O = \text{RHS}$$

$$\Rightarrow A^2 - 5A + 7I = O \Rightarrow A^2 - 5A = -7I$$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$$AAA^{-1} - 5AA^{-1} = -7IA^{-1}$$

$$\Rightarrow AI - 5I = -7A^{-1} \quad \left[\text{क्योंकि } AA^{-1} = I \right]$$

$$\Rightarrow 7A^{-1} = 5I - A = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 14:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = O$ हो।

उत्तर 14:

दिया है: $A^2 + aA + bI = O$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9+2 & 6+2 \\ 3+1 & 2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a+b \\ 4+a+b & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4+a+b=0 \Rightarrow a=-4 \quad \text{और} \quad 3+a+b=0 \Rightarrow b=-3-a=-3+4=1$$

अतः, $a = -4$, $b = 1$

प्रश्न 15:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = O$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+2 & 1+2-1 & 1-3+3 \\ 1+2-6 & 1+4+3 & 1-6-9 \\ 2-1+6 & 2-2-3 & 2+3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2+2 & 4+4-1 & 4-6+3 \\ -3+8-28 & -3+16+14 & -3-24-42 \\ 7-3+28 & 7-6-14 & 7+9+42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\text{LHS} = A^3 - 6A^2 + 5A + 11I$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 12 & 6 \\ -18 & 48 & -84 \\ 42 & -18 & 84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & -15 \\ 10 & -5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-24+5+11 & 7-12+5+0 & 1-6+5+0 \\ -23+18+5+0 & 27-48+10+11 & -69+84-15+0 \\ 32-42+10+0 & -13+18-5+0 & 58-84+15+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O = \text{RHS}$$

$$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = O \quad \Rightarrow A^3 - 6A^2 + 5A = -11I$$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$$A^2AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 5AA^{-1} = -11A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^2I - 6AI + 5I = -11A^{-1} \quad [\text{क्योंकि } AA^{-1} = I]$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = -A^2 + 6A - 5I$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = -\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & 14 \\ -7 & 3 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & -18 \\ 12 & -6 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = \begin{bmatrix} -4+6-5 & -2+6+0 & -1+6+0 \\ 3+6-0 & -8+12-5 & 14-18+0 \\ -7+12+0 & 3-6+0 & -14+18-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16:

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\text{LHS} = A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 36 & -30 & 30 \\ -30 & 36 & -30 \\ 30 & -30 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9+0 & 21-30+9+0 \\ -21+30-9-0 & 22-36+18-4 & -21+30-9+0 \\ 21-30+9-0 & -21+30-9-0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O = \text{RHS}$$

$$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O \quad \Rightarrow A^3 - 6A^2 + 9A = 4I$$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$$A^2 AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 9AA^{-1} = 4I A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^2 I - 6AI + 9I = 4A^{-1}$$

$$\left[\text{क्योंकि } AA^{-1} = I \right]$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6-12+9 & -5+6+0 & 5-6+0 \\ -5+6+0 & 6-12+9 & -5+6+0 \\ 5-6+0 & -5+6+0 & 6-12+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 17:

यदि A , 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj A|$ का मान है:

(A) $|A|$

(B) $|A|^2$

(C) $|A|^3$

(D) $3|A|$

उत्तर 17:

हम जानते हैं कि $adj A = |A|I$

$$\Rightarrow (adj A)A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |(adj A)A| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

$\Rightarrow |adj A| = |A|^2$, अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 18:

यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर:

(A) $\det(A)$

(B) $\frac{1}{\det(A)}$

(C) 1

(D) 0

उत्तर 18:

दिया है: A व्युत्क्रमीय आव्यूह है, अतः, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$

A कोटि दो का आव्यूह है, माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

इसलिए, $|A| = ad - bc$ तथा $adj A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = |A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|^2} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} (ad - bc) = \frac{1}{|A|^2} |A| = \frac{1}{|A|}$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ - 4) (सारणीक) Exercise 4.5 (कक्षा 12)

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 6 तक दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए।

प्रश्न 1:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 2 \\ 2x + 3y &= 3\end{aligned}$$

उत्तर 1:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned}x + 2y &= 2 \\ 2x + 3y &= 3\end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

प्रश्न 2:

$$\begin{aligned}2x - y &= 5 \\ x + y &= 4\end{aligned}$$

उत्तर 2:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned}2x - y &= 5 \\ x + y &= 4\end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

प्रश्न 3:

$$\begin{aligned}x + 3y &= 5 \\ 2x + 6y &= 8\end{aligned}$$

उत्तर 3:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned}x + 3y &= 5 \\ 2x + 6y &= 8\end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$|A| = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

$$\text{अब, } adj A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(adj A)B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - 24 \\ -10 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$$

इसलिए, दी गई समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय असंगत हैं।

प्रश्न 4:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + 3y + 2z &= 2 \\ax + ay + 2az &= 4\end{aligned}$$

उत्तर 4:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + 3y + 2z &= 2 \\ax + ay + 2az &= 4\end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & 2a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(6a - 2a) - 1(4a - 2a) + 1(2a - 3a) = a \neq 0$$

⇒ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है।

प्रश्न 5:

$$\begin{aligned}3x - y - 2z &= 2 \\2y - z &= -1 \\3x - 5y &= 3\end{aligned}$$

उत्तर 5:

$$\begin{aligned}3x - y - 2z &= 2 \\2y - z &= -1 \\3x - 5y &= 3\end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(0 - 5) + 1(0 + 3) - 2(0 - 6) = -15 + 3 + 12 = 0$$

⇒ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है। अब,

$$\begin{array}{lll}A_{11} = -5 & A_{12} = -3 & A_{13} = -6 \\A_{21} = 10 & A_{22} = 6 & A_{23} = 12 \\A_{31} = 5 & A_{32} = 3 & A_{33} = 6\end{array}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 - 10 + 15 \\ -6 - 6 + 9 \\ -12 - 12 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \neq 0$$

इसलिए, दी गई समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 6:

$$\begin{aligned} 5x - y + 4z &= 5 \\ 2x + 3y + 5z &= 2 \\ 5x - 2y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

उत्तर 6:

$$\begin{aligned} 5x - y + 4z &= 5 \\ \text{दी गई समीकरण निकाय: } 2x + 3y + 5z &= 2 \\ 5x - 2y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(18 + 10) + 1(12 - 25) + 4(-4 - 15) = 140 - 13 - 76 = 51 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 14 तक प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

प्रश्न 7:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 4 \\ 7x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

उत्तर 7:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 4 \\ 7x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{आव्यूह } A \text{ व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, } A^{-1} \text{ का अस्तित्व है।}$$

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

$$\text{इसलिए, } A_{11} = 3 \quad A_{12} = -7 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, \quad y = -3$$

प्रश्न 8:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

उत्तर 8:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 8 + 3 = 11 \neq 0 \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

इसलिए, $A_{11} = 4$ $A_{12} = -3$ $A_{21} = 1$ $A_{22} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -8 + 3 \\ 6 + 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow x = -\frac{5}{11}, \quad y = \frac{12}{11}$$

प्रश्न 9:

$$4x - 3y = 3$$

$$3x - 5y = 7$$

उत्तर 9:

दी गई समीकरण निकाय: $4x - 3y = 3$
 $3x - 5y = 7$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$|A| = -20 + 9 = -11 \neq 0 \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

इसलिए, $A_{11} = -5$ $A_{12} = -3$ $A_{21} = 3$ $A_{22} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -15 + 21 \\ -9 + 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ \frac{19}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow x = -\frac{6}{11}, \quad y = \frac{19}{11}$$

प्रश्न 10:

$$5x + 2y = 3$$

$$3x + 2y = 5$$

उत्तर 10:

दी गई समीकरण निकाय: $5x + 2y = 3$
 $3x + 2y = 5$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 10 - 6 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

इसलिए, $A_{11} = 2$ $A_{12} = -3$ $A_{21} = -2$ $A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 - 10 \\ -9 + 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -1, \quad y = 4$$

प्रश्न 11:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= \frac{3}{2} \\ 3y - 5z &= 9 \end{aligned}$$

उत्तर 11:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ \text{दी गई समीकरण निकाय: } x - 2y - z &= \frac{3}{2} \\ 3y - 5z &= 9 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(10 + 3) - 1(-5 - 0) + 1(3 - 0) = 26 + 5 + 3 = 34 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है। इसलिए,

$$\begin{aligned} A_{11} &= 13 & A_{12} &= 5 & A_{13} &= 3 \\ A_{21} &= 8 & A_{22} &= -10 & A_{23} &= -6 \\ A_{31} &= 1 & A_{32} &= 3 & A_{33} &= -5 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 + 12 + 9 \\ 5 - 15 + 27 \\ 3 - 9 - 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 34 \\ 17 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{3}{2}$$

प्रश्न 12:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

उत्तर 12:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ \text{दी गई समीकरण निकाय: } 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(1+3) + 1(2+3) + 1(2-1) = 4+5+1 = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 4 & A_{12} = -5 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 0 & A_{23} = -2 \\ A_{31} = 2 & A_{32} = 5 & A_{33} = 3 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 1$$

प्रश्न 13:

$$2x + 3y + 3z = 5$$

$$x - 2y + z = -4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

उत्तर 13:

$$2x + 3y + 3z = 5$$

$$\text{दी गई समीकरण निकाय: } x - 2y + z = -4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 5 & A_{12} = 5 & A_{13} = 5 \\ A_{21} = 3 & A_{22} = -13 & A_{23} = 11 \\ A_{31} = 9 & A_{32} = 1 & A_{33} = -7 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = -1$$

प्रश्न 14:

$$\begin{aligned}x - y + 2z &= 7 \\ 3x + 4y - 5z &= -5 \\ 2x - y + 3z &= 12\end{aligned}$$

उत्तर 14:

$$\begin{aligned}x - y + 2z &= 7 \\ \text{दी गई समीकरण निकाय: } 3x + 4y - 5z &= -5 \\ 2x - y + 3z &= 12\end{aligned}$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(12 - 5) + 1(9 + 10) + 2(-3 - 8) = 7 + 19 - 22 = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$$\begin{aligned}A_{11} &= 7 & A_{12} &= -19 & A_{13} &= -11 \\ A_{21} &= 1 & A_{22} &= -1 & A_{23} &= -1 \\ A_{31} &= -3 & A_{32} &= 11 & A_{33} &= 7\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 49 - 5 - 36 \\ -133 + 5 + 132 \\ -77 + 5 + 84 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 1, z = 3$$

प्रश्न 15:

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित

$$\begin{aligned}2x - 3y + 5z &= 11 \\ \text{समीकरण निकाय को हल कीजिए। } 3x + 2y - 4z &= -5 \\ x + y - 2z &= -3\end{aligned}$$

उत्तर 15:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-4 + 4) + 3(-6 + 4) + 5(3 - 2) = 0 - 6 + 5 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$$\begin{aligned}A_{11} &= 0 & A_{12} &= 2 & A_{13} &= 1 \\ A_{21} &= -1 & A_{22} &= -9 & A_{23} &= -5 \\ A_{31} &= 2 & A_{32} &= 23 & A_{33} &= 13\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}2x - 3y + 5z &= 11 \\ \text{दी गई समीकरण निकाय: } 3x + 2y - 4z &= -5 \\ x + y - 2z &= -3\end{aligned}$$

(कक्षा 12)

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 5 + 6 \\ -22 - 45 + 69 \\ -11 - 25 + 39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

प्रश्न 16:

4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य ₹60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य ₹90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य ₹70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

माना, 1 kg प्याज का मूल्य = ₹ x ,

माना, 1 kg गेहूँ का मूल्य = ₹ y और

माना, 1 kg चावल का मूल्य = ₹ z है।

यहाँ, 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य ₹60 है। इसलिए, $4x + 3y + 2z = 60$

2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य ₹90 है। इसलिए, $2x + 4y + 6z = 90$ और

6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य ₹70 है। इसलिए, $6x + 2y + 3z = 70$

$$4x + 3y + 2z = 60$$

दी गई समीकरण निकाय: $2x + 4y + 6z = 90$

$$6x + 2y + 3z = 70$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4(12 - 12) - 3(6 - 36) + 2(4 - 24) = 0 + 90 - 40 = 50 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 30 \quad A_{13} = -20$$

$$A_{21} = -5 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = 10$$

$$A_{31} = 10 \quad A_{32} = -20 \quad A_{33} = 10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 - 450 + 700 \\ 1800 + 0 - 1400 \\ -1200 + 900 + 700 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 250 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 5, y = 8, z = 8$$

अतः, 1 kg प्याज का मूल्य ₹ 5, 1 kg गेहूँ का मूल्य ₹ 8 और 1 kg चावल का मूल्य ₹ 8 है।

गणित

(पाठ - 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & -x & 1 \\ \cos \theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

उत्तर 1:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x & \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & -x & 1 \\ \cos \theta & 1 & x \end{vmatrix} \\ &= x(-x^2 - 1) - \sin \theta (-x \sin \theta - \cos \theta) + \cos \theta (-\sin \theta + x \cos \theta) \\ &= -x^3 - x + x \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta + x \cos^2 \theta \\ &= -x^3 - x + x(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -x^3 - x + x = -x^3, \text{ जो } \theta \text{ से स्वतंत्र है।} \end{aligned}$$

Ques 2

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{vmatrix} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

Ans

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{vmatrix} \\ &= -\sin \alpha (-\sin \alpha \sin^2 \beta - \sin \alpha \cos^2 \beta) - 0(\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin^2 \beta) \\ &\quad [C_3 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}] \\ &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Ques 3

यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans

$$\text{यहाँ, } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

इसलिए $|B| = 1(3 - 0) - 2(-1 - 0) - 2(2 - 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$B_{11} = 3$$

$$B_{12} = 1$$

$$B_{13} = 2$$

$$B_{21} = 2$$

$$B_{22} = 1$$

$$B_{23} = 2$$

$$B_{31} = 6$$

$$B_{32} = 2$$

$$B_{33} = 5$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

हम जानते हैं कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, इसलिए

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-30+30 & -3+12-12 & 3-10+12 \\ 3-15+10 & -1+6-4 & 1-5+4 \\ 6-30+25 & -2+12-10 & 2-10+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ques 4

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यपित कि

(i) $(adj A)^{-1} = adj(A^{-1})$

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

Ans

(i) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, इसलिए

$$|A| = 1(15-1) + 2(-10-1) + 1(-2-3) = -13 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ का अस्तित्व है।}$$

$$A_{11} = 14$$

$$A_{12} = 11$$

$$A_{13} = -5$$

$$A_{21} = 11$$

$$A_{22} = 4$$

$$A_{23} = -3$$

$$A_{31} = -5$$

$$A_{32} = -3$$

$$A_{33} = -1$$

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

माना, $B = adj A$, इसलिए, $B = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, इसलिए

$$|B| = 14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20) = -182 + 286 + 65 = 169 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} \text{ का अस्तित्व है।}$$

$$B_{11} = -13$$

$$B_{12} = 26$$

$$B_{13} = -13$$

$$B_{21} = 26$$

$$B_{22} = -39$$

$$B_{23} = -13$$

$$B_{31} = -13$$

$$B_{32} = -13$$

$$B_{33} = -65$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{169} \begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (adj A)^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

$$\text{माना, } C = A^{-1}, \text{ इसलिए, } C = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}, \text{ इसलिए}$$

$$C_{11} = -\frac{14}{13}$$

$$C_{12} = -\frac{11}{13}$$

$$C_{13} = \frac{5}{13}$$

$$C_{21} = -\frac{11}{13}$$

$$C_{22} = -\frac{4}{13}$$

$$C_{23} = \frac{3}{13}$$

$$C_{31} = \frac{5}{13}$$

$$C_{32} = \frac{3}{13}$$

$$C_{33} = \frac{1}{13}$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Adj } C = \text{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) और (3) से, $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$

(ii) समीकरण (1) से,

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{माना, } D = A^{-1}, \text{ इसलिए, } D = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}, \text{ इसलिए}$$

$$|D| = -\left(\frac{1}{13}\right)^3 [14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)]$$

$$= -\left(\frac{1}{13}\right)^3 (169) = -\frac{1}{13} \neq 0 \Rightarrow D^{-1} \text{ का अस्तित्व है।}$$

$$D_{11} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{12} = \frac{2}{13}$$

$$D_{13} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{21} = \frac{2}{13}$$

$$D_{22} = -\frac{3}{13}$$

$$D_{23} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{31} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{32} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{33} = -\frac{5}{13}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1/13} \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Ques 5

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

Ans

$$\text{दिया है: } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix} && [C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}] \\
&= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} && [C_1 \text{ से } 2(x+y) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}] \\
&= 2(x+y) \begin{vmatrix} 0 & -x & y \\ 0 & y & x-y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix} && [R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \text{ द्वारा}] \\
&= 2(x+y) \{(-x)(x-y) - y \cdot y\} && [C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}] \\
&= 2(x+y)(-x^2 + xy - y^2) \\
&= -2(x+y)(x^2 - xy + y^2) \\
&= -2(x^3 + y^3)
\end{aligned}$$

Ques 6

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

Ans

$$\begin{aligned}
&\text{दिया है: } \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -y & 0 \\ 0 & y & -x \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix} && [R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \text{ द्वारा}] \\
&= \{(-y)(-x) - y \cdot 0\} && [C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}] \\
&= xy
\end{aligned}$$

Ques 7

निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

Ans

दी गई समीकरण निकाय:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(120 - 45) - 3(-80 - 30) + 10(36 + 36) = 150 + 330 + 720 = 1200 \neq 0$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।

अतः, A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$$A_{11} = 75$$

$$A_{12} = 110$$

$$A_{13} = 72$$

$$A_{21} = 150$$

$$A_{22} = -100$$

$$A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 75$$

$$A_{32} = 30$$

$$A_{33} = -24$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1200} \begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{bmatrix} = \frac{1}{1200} \begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1200} \begin{bmatrix} 300 + 150 + 150 \\ 440 - 100 + 60 \\ 288 + 0 - 48 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1200} \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow x = 2, y = 3, z = 5$$

निम्नलिखित प्रश्नों 17 से 19 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

Ques 8

यदि x, y, z शून्यतर वास्तविक संख्याएँ हों तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है:

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(B) $xyz \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

(D) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ans

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$|A| = x(yz - 0) - 0(0 - 0) + 0(0 - 0) = xyz \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है। इसलिए,

$$A_{11} = yz$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = xz$$

$$A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{32} = 0$$

$$A_{33} = xy$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

अतः, विकल्प (A) सही है।

Ques 9

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & 1 & \sin \theta \\ -1 & -\sin \theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ हो तो:

(A) $\det(A) = 0$

(B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$

(D) $\det(A) \in [2, 4]$.

Ans

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & 1 & \sin \theta \\ -1 & -\sin \theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(1 + \sin^2 \theta) + \sin \theta (-\sin \theta + \sin \theta) + 1(\sin^2 \theta + 1)$$

[C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= 2(1 + \sin^2 \theta)$$

दिया है: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 \theta \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2(1 + \sin^2 \theta) \leq 4$$

$$\Rightarrow \det(A) \in [2, 4]$$

अतः, विकल्प (D) सही है।