

अवकलज के अनुप्रयोग

प्रश्नावली 6.1

प्रश्न 1. वृत्त के क्षेत्रफलन के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(i) $r = 3$ सेमी है।

(ii) $r = 4$ सेमी है।

हल मान लीजिए कि A वृत्त का क्षेत्रफल निरूपित करता है जब वृत्त की त्रिज्या r है, तब $A = \pi r^2$

अब, क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष हो जाती है।

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

(i) जब $r = 3$ सेमी, $\left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=3} = 2\pi(3) = 6\pi$ सेमी² प्रति सेमी

इसलिए, वृत्त का क्षेत्रफल 6 सेमी²/सेमी की दर से परिवर्तित हो रहा है। जब इसकी त्रिज्या 3 सेमी है।

(ii) जब $r = 4$ सेमी, $\left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=4} = 2\pi(4) = 8\pi$ सेमी²/सेमी

इसलिए जब वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी हो, तो वृत्त का क्षेत्रफल 8 सेमी²/सेमी की दर से परिवर्तित हो रहा है।

प्रश्न 2. एक घन का आयतन 8 सेमी³/से की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है, जबकि इसके कोर की लंबाई 12 सेमी है?

(a) सूत्र $V = a^3$ का अवकलन करके घन की कोर की दर परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

(b) पृष्ठ क्षेत्रफल तथा घन, के मध्य संबंध का अवकलन करके $\frac{dA}{dt}$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए कि घन के कोर की लंबाई x है, आयतन V है और पृष्ठ क्षेत्रफल S है।

$\therefore V = x^3$ और $S = 6x^2$ (\because वर्ग के 6 वर्ग फलक होते हैं जिसकी प्रत्येक भुजा x है।)

जहाँ, x समय t का फलन है।

यह दिया गया है कि $\frac{dV}{dt} = 8$ सेमी³/से

तब, श्रृंखला नियम का प्रयोग करने पर,

$$8 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = 3x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{8}{3x^2} \quad \dots(i)$$

अब, $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = 12x \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 12x \left(\frac{8}{3x^2} \right) = \frac{32}{x} \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$\text{जब } x = 12 \text{ सेमी, } \frac{dS}{dt} = \frac{32}{12} \text{ सेमी}^2/\text{से} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{8}{3} \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

अतः यदि घन के कोर की लंबाई 12 सेमी है, तब पृष्ठ क्षेत्रफल $\frac{8}{3}$ सेमी²/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 सेमी है?

हल मान लीजिए कि t समय पर वृत्त की त्रिज्या r है और वृत्त का क्षेत्रफल A है,

$$\text{वृत्त } A \text{ का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

अब, समय t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर इस प्रकार दी जाती है।

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad (\text{शृंखला नियम से})$$

यह दिया गया है कि वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

$$\therefore \text{अतः } \frac{dr}{dt} = 3 \text{ सेमी/से} \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi(3) = 6\pi \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

$$\text{इसलिए, जब } r = 10 \text{ सेमी; } \frac{dA}{dt} = 6\pi(10) = 60\pi \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

अतः, जब वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है, तो वृत्त का क्षेत्रफल 60π सेमी²/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 4. एक परिवर्तनशील घन की कोर 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जबकि कोर 10 सेमी लंबी है?

हल मान लीजिए घन की कोर की लंबाई x है, और आयतन V है, तब $V = x^3$

\therefore समय के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (\text{शृंखला नियम से})$$

यह दिया गया है कि घन की कोर 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 3 \text{ सेमी/से} \quad \therefore \frac{dV}{dt} = 3x^2(3) = 9x^2 \text{ सेमी}^3/\text{से}$$

$$\text{इसलिए, जब } x = 10 \text{ सेमी, } \frac{dV}{dt} = 9 \times (10)^2 = 900$$

अतः जब कोर की लंबाई 10 सेमी है, तो घन का आयतन 900 सेमी³/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 5 सेमी/से की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है, तो उस क्षण, तरंग द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

वृत्त का क्षेत्रफल और इसकी त्रिज्या के मध्य सूत्र $A = \pi r^2$ का अनुप्रयोग कीजिए।

अब, समय t के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करके अभीष्ट परिणाम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या r है और क्षेत्रफल A है।

तब,
$$A = \pi r^2$$

इसलिए समय (t) के सापेक्ष क्षेत्रफल (A) के परिवर्तन की दर इस प्रकार दी जाती है।

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad (\text{शृंखला नियम से})$$

यह दिया गया है कि तरंगों 5 सेमी/से की गति से वृत्तों में चलती हैं।

$\therefore \frac{dr}{dt} = 5 \text{ सेमी/से} \therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r \times 5 = 10\pi r \text{ सेमी}^2/\text{से}$

इसलिए, जब $r = 8$ सेमी, $\frac{dA}{dt} = 10\pi(8) = 80\pi \text{ सेमी}^2/\text{से}$

अतः जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है। तरंग द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल $80\pi \text{ सेमी}^2/\text{से}$ की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ सेमी है?

वृत्त की परिधि और त्रिज्या के मध्य सूत्र $c = 2\pi r$ का अनुप्रयोग कीजिए।

अब, समय t के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करके अभीष्ट परिणाम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए समय (t) पर वृत्त की त्रिज्या r है और इसकी परिधि c है।

तब,
$$c = 2\pi r$$

परिधि की वृद्धि की दर, $\frac{dc}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$ (t के सापेक्ष अवकलन करने पर, शृंखला नियम द्वारा)

जहाँ, $\frac{dr}{dt}$ त्रिज्या की वृद्धि की दर है।

$\therefore \frac{dr}{dt} = 0.7 \text{ सेमी/से}$

$$\frac{dc}{dt} = 2\pi(0.7) \text{ सेमी/से} = 1.4\pi \text{ सेमी/से} \quad \left(\therefore \frac{dr}{dt} = 0.7 \text{ सेमी/से, दिया है} \right)$$

\therefore अतः, परिधि की वृद्धि की दर 1.4π सेमी/से है।

प्रश्न 7. एक आयत की लंबाई x , 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y , 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ सेमी और $y = 6$ सेमी है, तब आयत के (a) परिमाण (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि किसी समय t पर, आयत की लंबाई, चौड़ाई, परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः x, y, P और A है, तब $P = 2(x + y)$ और $A = xy$... (i)

आयत का परिमाप = $2(\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$ और क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई

यह दिया है कि $\frac{dx}{dt} = 5$ सेमी/मिनट (-ve चिन्ह दर्शाता है कि लंबाई घट रही है)

और $\frac{dy}{dt} = 4$ सेमी/मिनट

(a) अब, $P = 2(x + y)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\text{परिमाप के परिवर्तन की दर } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-5 + 4) \text{ सेमी/मिनट} = -2 \text{ सेमी/मिनट} \quad \left(\therefore \frac{dx}{dt} = -5 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 4\right)$$

अतः, आयत का परिमाप 2 सेमी/मिनट की दर से घट (-ve चिन्ह) रहा है।

(b) यहाँ, आयत का क्षेत्रफल $A = xy$,

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\text{क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर } \frac{dA}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8 \times 4 + 6 \times (-5) \quad \left(\therefore \frac{dx}{dt} = 5 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 4\right)$$

$$= 32 - 30 = 2 \text{ सेमी}^2/\text{मिनट}$$

अतः, आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी²/मिनट की दर से बढ़ रही है।

नोट यदि परिवर्तन की दर बढ़ रही है, तो हम (+ve चिन्ह) लेते हैं और यदि परिवर्तन की दर घट रही है, तो हम (-ve चिन्ह) लेते हैं।

प्रश्न 8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 सेमी³ प्रति सेकण्ड गैस भरकर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 सेमी है।

हल मान लीजिए कि किसी समय t पर गुब्बारे की त्रिज्या r है और आयतन V है, तब गुब्बारे का आयतन $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$

गुब्बारे को एक पंप द्वारा 900 सेमी³ प्रति सेकण्ड गैस भरकर फुलाया जाता है।

दिया है, समय t के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर 900 सेमी³/से है

t के सापेक्ष आयतन (V) का अवकलन करने पर आयतन के परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right) \text{ है जब } r = 15 \text{ सेमी, तो } 900 = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left\{3 \times (15)^2 \frac{dr}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{900}{3 \times (15)^2} \times \frac{3}{4\pi}$$

⇒ त्रिज्या (r) के परिवर्तन की दर

$$\frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi \times (15)^2} = \frac{225}{\pi \times 225}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ सेमी/से}$$

अतः जब गुब्बारे की त्रिज्या 15 सेमी है, तो गुब्बारे की त्रिज्या $\frac{1}{\pi}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

हल मान लीजिए कि गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या r और आयतन V है।

$$\text{तब, } r = 10 \text{ सेमी और } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)3r^2$ (r के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$$= 4\pi r^2 = 4\pi(10)^2 = 400\pi \quad (\because r = 10 \text{ सेमी})$$

अतः गुब्बारे का आयतन 400π सेमी³/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 10. एक 5 मी लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी दूर है?

सीढ़ी, जो दीवार के सहारे झुकी होती है, समकोण त्रिभुज का निर्माण करती है। सीढ़ी की लंबाई = त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज का आधार = सीढ़ी के पाद से दीवार की दूरी,

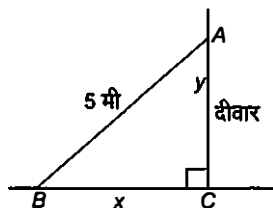
त्रिभुज की ऊँचाई = सीढ़ी के ऊपरी भाग से जमीन की दूरी

समीकरण बनाने के लिए पाइथागोरस प्रमेय का अनुप्रयोग करें और तब अवकलन करें।

हल मान लीजिए $AB = 5$ मी सीढ़ी की लंबाई है और y दीवार की ऊँचाई है जिस पर सीढ़ी झुकी है और सीढ़ी का पाद B पर है, जहाँ से C की दूरी (दीवार से) x है।

दिया गया है कि सीढ़ी का नीचे का सिरा जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से की दर से खींचा जाता है।

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2 \text{ सेमी/से}$$



जैसा कि हम जानते हैं कि $\triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है, इसलिए पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \dots (i)$$

$$\text{जब } x = 4, \text{ तब } y^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 - 16} \Rightarrow y = 3 \text{ मी}$$

समी (i) को समय (t) के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 4 \times 2 + 3 \times \frac{dy}{dt} = 0 \quad \left(\because x = 4 \text{ और } \frac{dx}{dt} = 2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$$

\Rightarrow दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$ सेमी/से की दर से घट रही है।

(ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{8}{3}$ सेमी/से की दर से घट रही है)

प्रश्न 11. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x -निर्देशांक की तुलना में y -निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

समय (t) के सापेक्ष x -निर्देशांक और y -निर्देशांक के परिवर्तन की दर $\frac{dx}{dt}$ और $\frac{dy}{dt}$ है

और $\frac{dy}{dt} = 8 \frac{dx}{dt}$ का अनुप्रयोग कीजिए।

हल दिया है, $6y = x^3 + 2$ और $\frac{dy}{dt} = 8 \frac{dx}{dt}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$6 \frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow 6 \times 8 \frac{dx}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16, x = \pm 4$$

$$\text{जब } x = 4, \text{ तब } 6y = (4)^3 + 2 \Rightarrow 6y = 64 + 2 \Rightarrow y = \frac{66}{6} = 11$$

$$\text{जब } x = -4, \text{ तब } 6y = (-4)^3 + 2 \Rightarrow 6y = -64 + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-62}{6} = \frac{-31}{3}$$

अतः वक्र पर बिंदु $(4, 11)$ और $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ हैं।

प्रश्न 12. हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का

आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जबकि त्रिज्या 1 सेमी है?

हल हवा का बुलबुला गोले के आकार का है।

मान लीजिए कि बुलबुले की त्रिज्या r है और गोले का आयतन V है।

दिया है किसी समय t पर तब त्रिज्या के परिवर्तन की दर, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$ सेमी/से और $r = 1$ सेमी

अब, गोले का आयतन, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

आयतन की बढ़ती दर,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi(1)^2\frac{1}{2} \quad \left(r=1 \text{ और } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\pi \text{ सेमी}^3/\text{से}\end{aligned}$$

अतः, बुलबुले का आयतन 2π सेमी³/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{गोले का आयतन} &= \frac{4}{3}\pi (\text{त्रिज्या})^3 \text{ सूत्र का अनुप्रयोग करके गोले के आयतन} \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^3 \text{ का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।}\end{aligned}$$

हल दिया है, गुब्बारे का व्यास $= \frac{3}{2}(2x+1)$

$$\therefore \text{त्रिज्या} = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(2x+1)\right] = \frac{3}{4}(2x+1)$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi (\text{त्रिज्या})^3 = \frac{4}{3}\pi \left[\frac{3}{4}(2x+1)\right]^3 \Rightarrow V = \frac{9\pi}{16}(2x+1)^3$$

आयतन के परिवर्तन की दर के लिए, x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{9\pi}{16} \times 3(2x+1)^2 \times 2 = \frac{27\pi}{8}(2x+1)^2$$

अतः, आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{27\pi}{8}(2x+1)^2$ है।

प्रश्न 14. एक पाइप से रेत 12 सेमी²/से की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?

हल मान लीजिए कि त्रिज्या r , ऊँचाई h और आयतन V है।

यह दिया है, $\frac{dV}{dt} = 12 \text{ सेमी}^3/\text{से}$ और $h = \frac{1}{6}r \Rightarrow r = 6h$

$$\text{अब, } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h)^2 h = 12\pi h^3$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dV}{dt} = (12\pi)\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = 36\pi h^2\frac{dh}{dt}$

$$\therefore 12 = 36\pi(4)^2 \frac{dh}{dt} \quad \left(\because h = 4 \text{ सेमी और } \frac{dV}{dt} = 12 \text{ सेमी/से} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{12}{36\pi \times 16} = \frac{1}{48\pi} \text{ सेमी/से}$$

अतः जब ऊँचाई 4 सेमी है, तो रेत से बने शंकु की ऊँचाई $\frac{1}{48\pi}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 15. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंधित कुल लागत $c(x)$ (₹ में) $c(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्रदत्त है।

सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

सीमांत लागत परिणाम के सापेक्ष कुल लागत के परिवर्तन की दर है।

हल सीमांत लागत = $\frac{dc}{dt}$

$$\frac{dc}{dt} = 0.007(3x^2) - 0.003(2x) + 15 = 0.021x^2 - 0.006x + 15$$

जब $x = 17$, सीमांत लागत = $0.021(17)^2 - 0.006(17) + 15$

$$= 0.021(289) - 0.006(17) + 15 = 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$$

अतः जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत ₹ 20.967 है।

प्रश्न 16. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

सीमांत आय इकाइयों की संख्या के विक्रय के सापेक्ष कुल आय के परिवर्तन की दर है।

हल सीमांत आय = $\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(13x^2 + 26x + 15) = 13 \times 2x + 26 = 26x + 26$

जब $x = 7$, तो सीमांत आय = $26(7) + 26 = 182 + 26 = 208$;

अतः सीमांत आय ₹ 208 है।

निर्देश (प्र.सं. 17-18) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 17. एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ सेमी है, r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है

- (a) 10π (b) 12π (c) 8π (d) 11π

हल (b) यदि वृत्त की त्रिज्या r और वृत्त का क्षेत्रफल A है तब $A = \pi r^2$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

$r = 6$ रखने पर, $\frac{dA}{dr} = 2\pi(6) = 12\pi$ सेमी²/सेमी

अतः, r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर 12 सेमी²/सेमी है।

प्रश्न 18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

- (a) 116 (b) 96 (c) 90 (d) 126

हल (b) दिया है, $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$

$$\therefore \text{सीमांत आय} = \frac{dR}{dx}; \quad \frac{dR}{dx} = 3 \times 2x + 36 = 6x + 36$$

जब $x = 15$, तो सीमांत आय $= 6 \times 15 + 36 = 126$

अतः सीमांत आय = ₹ 126

प्रश्नावली 6.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए R पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

जब $f(x)$ वर्धमान है, तब $f'(x) \geq 0$ और जब $f(x)$ निरंतर वर्धमान है, तब $f'(x) > 0$

हल मान लीजिए कि R में, x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं, जहाँ $x_1 < x_2$

तब, $f(x) = 3x + 17 \Rightarrow f(x_1) = 3x_1 + 17$

और $f(x_2) = 3x_2 + 17$ [$\because f(x) = 3x + 17$, दिया है]

अब, हम देखते हैं कि $f(x_1) < f(x_2)$ अतः R पर f निरंतर वर्धमान है।

वैकल्पिक विधि

दिया है, $f(x) = 3x + 17$, x के सापेक्ष अवकलन करने पर $f'(x) = 3 > 0$

अतः R के प्रत्येक अन्तराल पर फलन निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि R पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

हल मान लीजिए R पर, x_1 और x_2 दो संख्याएँ हैं

जहाँ, $x_1 < x_2$

दिया है, $f(x) = e^{2x}$

तब, $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

अतः R पर f निरंतर वर्धमान है।

वैकल्पिक विधि

दिया है, $f(x) = e^{2x}$

x के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर, $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (e^{2x}) = f'(x) = 2e^{2x}$

$$(i) \text{ जब } x > 0, \text{ तब } 2e^{2x} = 2 \left[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots \right] > 0 \therefore f'(x) > 0$$

$$(ii) \text{ जब } x = 0, \text{ तब } 2e^{2x} = 2 \times 1 = 2; \quad 2 > 0 \therefore f'(x) > 0$$

$$(iii) \text{ जब } x < 0, \text{ तब } 2e^{2x} = 2e^{2(-z)}; \quad 2e^{-2z} = \frac{2}{e^{2z}}$$

$$= \left[\frac{2}{1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \dots} \right] > 0 \therefore f'(x) > 0$$

अतः, x के प्रत्येक मान के लिए, $f'(x) > 0$

इसलिए $f(x)$, R पर निरंतर वर्धमान फलन है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन

$$(i) \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ में निरंतर वर्धमान है} \quad (ii) \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ में निरंतर हासमान है}$$

(iii) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

$f(x)$ अंतराल (a, b) में निरंतर वर्धमान है, यदि $f'(x) > 0$ और अंतराल (a, b) में निरंतर हासमान है, यदि $f'(x) < 0$

हल दिया गया फलन $f(x) = \sin x$ है।

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \cos x$$

(i) अतः प्रत्येक $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ के लिए $\cos x > 0$ ($\because \cos x$ प्रथम चतुर्थांश में घनात्मक है)

$$f'(x) > 0$$

इसलिए, f , $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) अतः, प्रत्येक $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ के लिए $\cos x < 0$ ($\because \cos x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है)

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

इसलिए, f , $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ में निरंतर हासमान है।

(iii) जब $x \in (0, \pi)$ हम देखते हैं कि $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ में $f'(x) > 0$ और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ में $f'(x) < 0$

इसलिए $f'(x)$, $(0, \pi)$ में घनात्मक और ऋणात्मक है।

इसलिए $(0, \pi)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

प्रश्न 4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(i) निरंतर वर्धमान

(ii) निरंतर हासमान

हल दिया है, $f(x) = 2x^2 - 3x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x) = 4x - 3$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$$4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/4$$

बिंदु $x = 3/4$, वास्तविक रेखा को दो अलग अंतराल में विभाजित करती है,

जो $(-\infty, \frac{3}{4})$ और $(\frac{3}{4}, \infty)$ है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, \frac{3}{4})$	(-) ऋणात्मक	निरंतर हासमान
$(\frac{3}{4}, \infty)$	(+) धनात्मक	निरंतर वर्धमान

अतः $f(x)$, $(\frac{3}{4}, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है और $(-\infty, \frac{3}{4})$ में निरंतर हासमान है।

प्रश्न 5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(i) निरंतर वर्धमान है।

(ii) निरंतर हासमान है।

हल दिया है, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

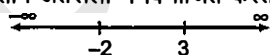
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 - 36x + 7) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 36 \times 1 + 0$$

$$= 6x^2 - 6x - 36; f'(x) = 6(x-3)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ रखने पर, } 6(x-3)(x+2) = 0$$

$x = 3$ और $x = -2$ जोकि वास्तविक रेखा को तीन अंतरालों में विभाजित करता है।

जोकि $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ और $(3, \infty)$ है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	(-)(-) = + ve ($\because x < -2$ अर्थात x के $-3, -4, -5, \dots$ इन मानों के लिए $(x-3)$ और $(x-2)$ दोनों ऋणात्मक होंगे।)	निरंतर वर्धमान
$(-2, 3)$	(-)(+) = - ve ($\because 3 > x > -2$ अर्थात x के, $1, 2, 0, -1, \dots$ इन मानों के लिए $(x-3)$ ऋणात्मक और $(x+2)$ धनात्मक होंगे।)	निरंतर हासमान
$(3, \infty)$	(+)(+) = + ve ($\because x > 3$ अर्थात, x के, $4, 5, 6, \dots$ इन मानों के लिए $(x-3)$ और $(x+2)$ दोनों धनात्मक होंगे।)	निरंतर वर्धमान

इसलिए, दिया गया फलन f अंतराल $(-\infty, -2)$ में और $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है जबकि फलन f अंतराल $(-2, 3)$ में निरंतर हासमान है।

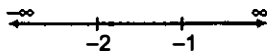
(iii) दिया है, $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = -2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x - 12 = -6x^2 - 18x - 12$$

$$f'(x) = 0 \text{ रखने पर, } -6x^2 - 18x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow -6(x+2)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow x = -2, -1$ जोकि वास्तविक रेखा को तीन अंतराल $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ और $(-1, \infty)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-)(-)(-) = -ve$	निरंतर हासमान
$(-2, -1)$	$(-)(-)(+) = +ve$	निरंतर वर्धमान
$(-1, \infty)$	$(-)(+)(+) = -ve$	निरंतर हासमान

इसलिए, $-2 < x < -1$ पर $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और $x < -2$ और $x > -1$ में $f(x)$ निरंतर हासमान है

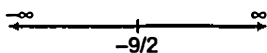
(iv) दिया गया है, $f(x) = 6 - 9x - x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = -9 - 2x,$$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$-9 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$$

जोकि वास्तविक रेखा को दो अलग अंतराल $(-\infty, -\frac{9}{2})$ और $(-\frac{9}{2}, \infty)$ में विभाजित करती है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -\frac{9}{2})$	+ve	निरंतर वर्धमान
$(-\frac{9}{2}, \infty)$	+ve	निरंतर हासमान

इसलिए, जब $x < -\frac{9}{2}$, तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x > -\frac{9}{2}$, तो $f(x)$ निरंतर हासमान है।

(v) दिया है, $f(x) = (x+1)^3(x-3)^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

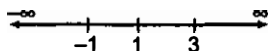
$$f'(x) = (x+1)^3 \cdot 3(x-3)^2 + (x-3)^3 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1$$

$$= 3(x-3)^2(x+1)^2\{(x+1) + (x-3)\}$$

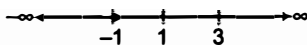
$$= 3(x-3)^2(x+1)^2(2x-2) = 6(x-3)^2(x+1)^2(x-1)$$

अब,

$$f'(x) = 0 \text{ रखने पर, } x = -1, 1, 3$$



जोकि वास्तविक रेखा को चार अलग अंतराल $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$-\infty < x < -1$	$(-)(-)(-) = -ve$	निरंतर हासमान
$-1 < x < 1$	$(+)(+)(-) = -ve$	निरंतर हासमान
$1 < x < 3$	$(+)(+)(+) = +ve$	निरंतर वर्धमान
$3 < x < \infty$	$(+)(+)(+) = +ve$	निरंतर वर्धमान

इसलिए, $(1, 3)$ और $(3, \infty)$ पर $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और $(-\infty, -1)$ तथा $(-1, 1)$ पर $f(x)$ निरंतर हासमान है।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$, अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

यदि संपूर्ण प्रांत में $y' > 0$ हो, तो y अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $y = \log(1+x) - \frac{2x}{(2+x)}$

अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \left[\log(1+x) - \frac{2x}{2+x} \right]$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x) \frac{d}{dx}(2x) - 2x \frac{d}{dx}(2+x)}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{4+2x-2x}{(2+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{4+x^2+4x-4-4x}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

जब $x \in (-1, \infty)$, तब $\frac{x^2}{(2+x)^2} > 0$ और $(1+x) > 0 \therefore y' > 0$ जब $x > -1$

अतः, y अपने संपूर्ण $(x > -1)$ प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

प्रश्न 8. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

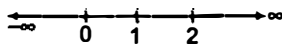
हल दिया है, $y = [x(x-2)]^2 = [x^2 - 2x]^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2(x^2 - 2x) \frac{d}{dx} (x^2 - 2x) \\ &= 2(x^2 - 2x)(2x - 2) = 4x(x-2)(x-1)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ रखने पर, } x = 0, 1 \text{ और } 2$$

जोकि वास्तविक रेखा को चार अलग अंतराल $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ और $(2, \infty)$ में विभाजित करता है



अंतराल	$y'(x)$ का चिन्ह	$y(x)$ की प्रकृति
$-\infty, 0$	$(-)(-)(-) = -ve$	निरंतर हासमान
$(0, 1)$	$(+)(-)(-) = +ve$	निरंतर वर्धमान
$(1, 2)$	$(+)(-)(+) = -ve$	निरंतर हासमान
$(2, \infty)$	$(+)(+)(+) = +ve$	निरंतर वर्धमान

इसलिए, $(0, 1)$ और $(2, \infty)$ पर $y(x)$ वर्धमान फलन है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $y = \frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left[\frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta \right] \\ y' &= \frac{(2 + \cos \theta) \frac{d}{d\theta} (4 \sin \theta) - 4 \sin \theta \frac{d}{d\theta} (2 + \cos \theta)}{(2 + \cos \theta)^2} - 1 \\ &= \frac{4 \cos \theta (2 + \cos \theta) - 4 \sin \theta (-\sin \theta)}{(2 + \cos \theta)^2} - 1 \\ &= \frac{8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}{(2 + \cos \theta)^2} - 1\end{aligned}$$

$$= \frac{8 \cos \theta + 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(2 + \cos \theta)^2} - 1 = \frac{8 \cos \theta + 4}{(2 + \cos \theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8 \cos \theta + 4 - (2 + \cos \theta)^2}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{8 \cos \theta + 4 - 4 - \cos^2 \theta}{(2 + \cos \theta)^2} - 4 \cos \theta$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{d\theta} = \frac{4 \cos \theta - \cos^2 \theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta (4 - \cos \theta)}{(2 + \cos \theta)^2}$$

अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में, $\cos \theta > 0$, $\therefore 4 > \cos \theta \Rightarrow (4 - \cos \theta) > 0$

$$\therefore \cos \theta (4 - \cos \theta) \geq 0 \text{ और } (2 + \cos \theta)^2 > 0 \Rightarrow \frac{\cos \theta (4 - \cos \theta)}{(2 + \cos \theta)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} \geq 0$$

अतः, दिया गया फलन अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में वर्धमान है।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

हल माना कि $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

जब $x \in (0, \infty)$, तो $f'(x) > 0$, इसलिए, $(0, \infty)$ में $f(x)$ निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ में $f(x) = x^2 - x + 1$ में प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

हल दिया है, $f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर, $x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ दिए गए अंतराल को दो अंतरालों $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ में विभाजित करता है।

अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	-ve	निरंतर हासमान
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	+ve	निरंतर वर्धमान

\therefore संपूर्ण अंतराल $(-1, 1)$ में $f'(x)$ का समान चिन्ह नहीं है।

अतः अंतराल $(-1, 1)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न हासमान है।

प्रश्न 12. निम्नलिखित में कौन-से फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है?

- (i) $\cos x$ (ii) $\cos 2x$ (iii) $\cos 3x$ (iv) $\tan x$

हल (i) मान लीजिए $f(x) = \cos x$, तब $f'(x) = -\sin x$, अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) < 0$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

(ii) मान लीजिए कि $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x$ अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में

$$f'(x) < 0$$

क्योंकि $\sin 2x$ प्रथम चतुर्थांश में या द्वितीय चतुर्थांश में होगा जोकि एक धनात्मक मान देगा। इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

(iii) मान लीजिए कि $f(x) = \cos 3x \Rightarrow f'(x) = -3 \sin 3x$ अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में

$f'(x) < 0$, इसलिए, $\sin 3x$ प्रथम चतुर्थांश में या द्वितीय चतुर्थांश में होगा जो एक धनात्मक मान देगा।

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

जब $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, तब $f'(x) > 0$

क्योंकि $\sin 3x$ तृतीय चतुर्थांश में होगा।

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान नहीं है।

(iv) मान लीजिए $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

अंतराल $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान नहीं है।

प्रश्न 13. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर ह्रासमान है?

- (i) $(0, 1)$ (ii) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (iii) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (iv) इनमें से कोई नहीं

हल (d) दिया है, $f(x) = x^{100} + \sin x - 1 \Rightarrow f'(x) = 100x^{99} + \cos x$

(i) अंतराल $(0, 1)$ में, $\cos x > 0$ और $100x^{99} > 0 \therefore f'(x) > 0$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\cos x > 0$ या $(0, 1.57)$ में $\cos x > 0$

$\therefore (0, 1)$ में $\cos x > 0$

इसलिए, अंतराल $(0, 1)$ में फलन f निरंतर वर्धमान है।

(ii) अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में, $\cos x < 0$ और $100x^{99} > 0$ और $100x^{99} > \cos x$

$$\therefore \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ में } f'(x) > 0$$

इसलिए, अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में फलन f निरंतर वर्धमान है।

(iii) अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\cos x > 0$ और $100x^{99} > 0$ $\therefore 100x^{99} + \cos x > 0$

$$\Rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में } f'(x) > 0$$

इसलिए, अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में f निरंतर वर्धमान है।

अतः दिए हुए अंतराल में फलन f निरंतर ह्रासमान नहीं है।

प्रश्न 14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल $(1, 2)$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

सबसे पहले, हम $f'(x)$ ज्ञात करते हैं, तब $1 < x < 2$ के लिए, $f'(x) > 0$ रखकर a का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = x^2 + ax + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + a$

अंतराल $(1, 2)$ में, $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4$

$$\Rightarrow (2 + a) < (2x + a) < (4 + a)$$

अतः $f(x)$ निरंतर वर्धमान फलन है, तब $(2 + a) > 0$ $[(2x + a) > (2 + a)$ के लिए, $f'(x) > 0]$

$$\therefore (2 + a) > 0 \Rightarrow a > -2 \text{ इसलिए, } a \text{ का न्यूनतम मान } a = -2$$

प्रश्न 15. मान लीजिए $[-1, 1]$ से असंयुक्त एक अंतराल I हो, तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \frac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f , निरंतर वर्धमान है।

हल दिया है, $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अतः अंतराल $(-1, 1)$ से असंयुक्त है। इसलिए, यदि $x < -1$, तब $f'(x) > 0$

यदि $x > 1$, तब $f'(x) > 0$

अतः अंतराल I में $f(x)$ निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान और

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

हल दिया है, $f(x) = \log(\sin x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x}(\cos x) = \cot x \quad (x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर})$$

$$\text{अंतराल } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में, } f'(x) = \cot x > 0$$

क्योंकि $\cot x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होता है।

$$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में } f \text{ निरंतर वर्धमान है।}$$

$$\text{अंतराल } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ में, } f'(x) = \cot x < 0$$

क्योंकि $\cot x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है।

$$\therefore \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ पर } f \text{ निरंतर ह्रासमान है।}$$

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log |\cos x|$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

$$\text{हल दिया है, } f(x) = \log(\cos x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x \quad (x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर})$$

$$\text{अंतराल } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में, } \tan x > 0 \quad (\because \tan x \text{ प्रथम चतुर्थांश में है})$$

$$\Rightarrow -\tan x < 0 \quad (\because \tan x \text{ प्रथम चतुर्थांश में है})$$

$$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में } f'(x) < 0,$$

$$\text{अतः } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ में } f \text{ निरंतर ह्रासमान है।}$$

$$\text{अब अंतराल } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ में } \tan x < 0$$

$$\Rightarrow -\tan x > 0 \quad (\because \tan x \text{ द्वितीय चतुर्थांश में है})$$

$$\therefore \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ में } f'(x) > 0,$$

$$\text{इसलिए, } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ में } f \text{ निरंतर वर्धमान है।}$$

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

हल दिया है, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

$x \in R$ में $(x - 1)^2 > 0$, क्योंकि एक पूर्ण वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः R पर $f'(x) > 0$ इसलिए, दिया गया फलन f वर्धमान फलन है।

प्रश्न 19. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(2, \infty)$ (d) $(0, 2)$

हल (d) दिया है, $y = x^2 e^{-x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x) = x e^{-x}(-x + 2) = x(2 - x)e^{-x}$$

वर्धमान फलन के लिए, $\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow x e^{-x} (2 - x) > 0$

$\Rightarrow x > 0$ या $2 - x > 0 \Rightarrow x > 0$ या $-x > -2 \Rightarrow x > 0$ या $x < -2$

क्योंकि e^{-x} शून्य नहीं हो सकता है, इसलिए फलन अंतराल $(0, 2)$ में वर्धमान है।

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1. वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

वक्र में किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ द्वारा दिया जाता है। किसी विशेष बिंदु

पर प्रवणता ज्ञात करने के लिए उस बिंदु का मान $\frac{dy}{dx}$ में रखें।

हल दिया गया वक्र है, $y = 3x^4 - 4x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 4x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \times 4x^3 - 4 \times 1 = 12x^3 - 4$$

$\therefore x = 4$ पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 12 \times (4)^3 - 4 = 764$$

प्रश्न 2. वक्र $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ के $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया वक्र, $y = \frac{x-1}{x-2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x-2) \frac{d}{dx}(x-1) - (x-1) \frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-2) \times 1 - (x-1) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} \quad (\text{शेषफल नियम से}) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

$x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} = \frac{-1}{(10-2)^2} = \frac{-1}{(8)^2} = \frac{-1}{64}$

अतः $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $-\frac{1}{64}$ है।

प्रश्न 3. वक्र $y = x^3 - x + 1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 2 है।

हल दिया गया वक्र, $y = x^3 - x + 1$ है

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

\therefore बिंदु $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 3(2)^2 - 1 = 11$

इसलिए, $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 11 है।

प्रश्न 4. वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 3 है।

हल दिया गया वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ है।

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

\therefore बिंदु $x = 3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 3 \times (3)^2 - 3 = 24$$

अतः $x = 3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 24 है।

प्रश्न 5. वक्र $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

(i) यह प्राचलिक समीकरण है, पहले $\frac{dx}{d\theta}$ और $\frac{dy}{d\theta}$ ज्ञात करें।

(ii) अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$ का अनुप्रयोग करके वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

(iii) वक्र पर अभिलंब की प्रवणता किसी बिंदु पर $-\frac{dx}{dy}$ के मान द्वारा दी जाती है।

हल दिया है, $x = a \cos^3 \theta$ और $y = a \sin^3 \theta$

θ के सापेक्ष x और y दोनों का अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a \cos^2 \theta (-\sin \theta) = -3a \cos^2 \theta \sin \theta$$

और $\frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} ; \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

अतः बिंदु $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta = \frac{\pi}{4}}} = \frac{-1}{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

प्रश्न 6. $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर वक्र $x = 1 - a \sin \theta$, $y = b \cos^2 \theta$ के अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया है, $x = 1 - a \sin \theta$ और $y = b \cos^2 \theta$

θ के सापेक्ष x और y दोनों का अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (1 - a \sin \theta) = -a \cos \theta \quad \text{और} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (b \cos^2 \theta)$$

$$= 2b \cos \theta (-\sin \theta) = -2b \cos \theta \sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2b \cos \theta \sin \theta}{-a \cos \theta} = \frac{2b \sin \theta}{a}$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta = \pi/2}} = \frac{-1}{\frac{2b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{a}} = \frac{-a}{2b}$$

प्रश्न 7. वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ x अक्ष के समांतर हैं। वक्र पर स्पर्श रेखाएँ x अक्ष के समांतर हैं जब स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 है

हल वक्र का समीकरण है $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$... (i)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

अतः स्पर्श रेखा x अक्ष के समांतर है, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 है या हम कह सकते हैं कि,
 $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, -1$$

जब $x = 3$, तब समी (i) से,

$$y = 3^3 - (3)(3)^2 - 9 \cdot 3 + 7$$

$$y = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

जब $x = -1$, तब समी (i) से,

$$y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7$$

$$y = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

अतः बिंदुओं $(3, -20)$ और $(-1, 12)$ जिन पर स्पर्श रेखाएँ x - अक्ष के समांतर हैं।

प्रश्न 8. वक्र $y = (x - 2)^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा, बिंदुओं $(2, 0)$ और $(4, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समांतर है।

बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, स्पर्श रेखा के समांतर होती है। यदि इसकी स्पर्श रेखा की प्रवणता, बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता के बराबर हों।

हल यदि स्पर्श रेखा बिंदुओं $(2, 0)$ और $(4, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समांतर है, तो स्पर्श रेखा की प्रवणता = दोनों बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

बिंदु $(2, 0)$ और $(4, 4)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \dots (i)$$

वक्र $y = (x - 2)^2$

अब, दिए गए वक्र पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु (x, y) पर इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - 2)$$

अब, समी (i) से, $2(x - 2) = 2$

$$\Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

जब $x = 3$, तब $y = (3 - 2)^2 = 1$ [वक्र का समीकरण $y = (x - 2)^2$]

अतः आवश्यक बिंदु $(3, 1)$ है।

प्रश्न 9. वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिंदु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

वक्र पर स्पर्श रेखा की प्रवणता = वक्र की प्रवणता का प्रयोग कीजिए।

हल वक्र का समीकरण $y = x^3 - 11x + 5$... (i)

रेखा $y = mx + c$ से दी गई रेखा, $y = x - 11$

तुलना करने पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = 1$ है।

अब, दिए गए वक्र के बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11$

$$\Rightarrow 3x^2 - 11 = 1 \left(m = \frac{dy}{dx} = 1 \right) \Rightarrow 3x^2 - 11 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = (+2)^3 - 11 \times 2 + 5 = -9$

जब $x = -2$, तब समी (i) से, $y = (-2)^3 - 11(2) + 5 = 19$ अतः बिंदु $(2, -9)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - (-9) = 1(x - 2)$ या $y = x - 11$

जबकि बिंदु $(-2, 19)$ रेखा $y = x - 11$ को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रश्न 10. प्रवणता -1 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq -1$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq -1$... (i)

किसी बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता $= -1$ है, $-1 = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x-1 = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \pm 1 = 2, 0$$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = \frac{1}{2-1} = 1$

जब $x = 0$, तब समी (i) से, $y = \frac{1}{0-1} = -1$

इसलिए, दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता -1 है, पर बिंदु $(2, 1)$ और $(0, -1)$ हैं।

\therefore $(2, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - 1 = -1(x - 2)$ या $x + y - 3 = 0$

और $(0, -1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण, $y - (-1) = -1(x - 0)$ या $x + y + 1 = 0$

अतः आवश्यक रेखाओं का समीकरण $x + y - 3 = 0$ और $x + y + 1 = 0$ है।

प्रश्न 11. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र की समीकरण है, $y = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$

किसी बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता 2 है, के लिए; $2 = \frac{-1}{(x-3)^2} \Rightarrow 2(x-3)^2 = -1$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = \frac{-1}{2} \text{ जोकि असंभव है}$$

जैसा कि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः दिए गए वक्र पर प्रवणता 2 वाली कोई स्पर्श रेखा नहीं है।

प्रश्न 12. प्रवणता 0 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$... (i)

दिए गए वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x^2 - 2x + 3)^2} \cdot dx(x^2 - 2x + 3) = \frac{-(2x-2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

अतः शून्य प्रवणता वाली स्पर्श रेखाओं के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow -2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

जब $x = 1$, तो समी (i) से, $y = \frac{1}{1^2 - 2 \times 1 + 3} = \frac{1}{2}$

दिए गए वक्र के बिंदु $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा जिनकी प्रवणता 0 है, का समीकरण निम्न है।

$$y - \frac{1}{2} = 0(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

अतः, आवश्यक रेखा का समीकरण $y = \frac{1}{2}$ है।

प्रश्न 13. वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(i) x -अक्ष के समांतर है

(ii) y -अक्ष के समांतर है

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

... (i)

$\Rightarrow x$ के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{9} + \frac{1}{16} \left(2y \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{8} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{9} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-16x}{9y}$$

... (ii)

(i) स्पर्श रेखाएँ, जो x -अक्ष के समांतर है, के लिए,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-16x}{9y} = 0 \Rightarrow x = 0$$

\Rightarrow जब $x = 0$, तब समी (i) से, $\frac{0^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 16$

$$\Rightarrow y = \pm 4$$

अतः वक्र (i) के बिंदु $(0, 4)$ और $(0, -4)$ पर, स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष के समांतर हैं

(ii) स्पर्श रेखाएँ, जो y -अक्ष के समांतर है, के लिए $\frac{dx}{dy} = 0$

$$\Rightarrow \frac{-9y}{16x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

जब $y = 0$, तब समी (i) से, $\frac{x^2}{9} + \frac{0^2}{16} = 1$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

अतः वक्र (i) के बिंदु $(3, 0)$ और $(-3, 0)$ पर स्पर्श रेखा y -अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 14. दिए वक्रों के निर्दिष्ट बिंदुओं पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के $(0, 5)$ पर

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के $(1, 3)$ पर

(iii) $y = x^3$ के $(1, 1)$ पर,

(iv) $y = x^2$ के $(0, 0)$ पर

(v) $x = \cos t$, $y = \sin t$ के $t = \frac{\pi}{4}$ पर

हल (i) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 - 10 + 26x$

\therefore बिंदु $(0, 5)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{(0, 5)} = 0 - 0 + 0 - 10 = -10$$

इसलिए, बिंदु $(0, 5)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता -10 है। अब, स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 5 = -10(x - 0) \Rightarrow 10x + y - 5 = 0$$

पुनः बिंदु (0, 5) पर अभिलंब की प्रवणता

$$\frac{-1}{(0, 5) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{10} = \frac{1}{10}$$

इसलिए, बिंदु (0, 5) पर अभिलंब का समीकरण, $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$

$$\Rightarrow x - 10y + 50 = 0$$

(ii) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$
 x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$$

∴ बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1, 3)} = 4 - 18 + 26 - 10 = 2$

इसलिए, बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है, अब स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow y = 2x + 1$$

पुनः (1, 3) पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{(1, 3) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{2}$$

अतः अभिलंब का समीकरण,

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 6 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$$

(iii) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^3$
 x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

∴ बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1, 1)} = 3(1)^2 = 3$

इसलिए, बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 3 है और स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 2$$

पुनः बिंदु (1, 1) पर, अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{(1, 1) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{3}$$

इसलिए बिंदु (1, 1) पर, अभिलंब का समीकरण

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 3 = -x + 1 \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$$

(iv) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

∴ बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 2 \times 0 = 0$

अतः बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$$

बिंदु (0, 0) पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{(0, 0) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{0}$$

जोकि अपरिभाषित है।

इसलिए, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ पर अभिलंब का समीकरण $x = x_0 = 0$ है।

(v) दिए गए वक्र का समीकरण है,

$$x = \cos t, y = \sin t \quad \dots(i)$$

$$x = \cos \frac{\pi}{4}, y = \sin \frac{\pi}{4} \quad \left(t = \frac{\pi}{4} \text{ रखने पर}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t, \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t = \frac{\pi}{4}} = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

∴ $t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता -1 है।

इसलिए, $t = \frac{\pi}{4}$ पर दिए गए वक्र पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \Rightarrow x + y - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 & \Rightarrow x + y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0; \quad x + y - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

पुनः $t = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{t = \frac{\pi}{4} \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

इसलिए, $t = \frac{\pi}{4}$ पर दिए गए वक्र के अभिलंब का समीकरण है।

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

प्रश्न 15. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है।

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ पर लंब है।

(i) यदि वक्र की स्पर्श रेखा समांतर है रेखा $2x - y + 9 = 0$ से, तब इसकी प्रवणता इस रेखा की प्रवणता के बराबर होगी।

(ii) यदि वक्र की स्पर्श रेखा अभिलंब है रेखा $5y - 15x = 13$ पर, तब दोनों वक्रों की प्रवणता का गुणनफल -1 बराबर होगी।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^2 - 2x + 7$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0 \Rightarrow y = 2x + 9$ की तुलना रेखा

$y = mx + c$ से करने पर,

\therefore रेखा की प्रवणता, $m = 2$

यदि स्पर्श रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है। तब दोनों स्पर्श रेखाओं की प्रवणता बराबर होगी

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow 2x - 2 = 2$

$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = 2^2 - 2 \times 2 + 7 = 7$

अतः दिए गए वक्र के बिंदु $(2, 7)$ पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणता बराबर है तथा बिंदु $(2, 7)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$y - 7 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

इसलिए, $y - 2x - 3 = 0$ दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण जो दी गई रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है,

(ii) दी गई रेखा का समीकरण है, $5y - 15x = 13 \Rightarrow y = 3x + \frac{13}{5}$

यह समीकरण $y = mx + c$ के प्रकार का है।

\therefore रेखा की प्रवणता 3 है।

यदि स्पर्श रेखा दी गई रेखा $5y - 15x = 13$ पर अभिलंब है,

तब स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{3}$ (प्रवणता का गुणनफल, $m_1 \times m_2 = 1, m_2 = \frac{-1}{m_1}$)

$\therefore 2x - 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

जब $x = \frac{5}{6}$, तब समी (i) से,

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{25}{36} - \frac{5}{3} + 7 = \frac{25 - 60 + 252}{36} = \frac{217}{36}$$

अतः बिंदु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर दिए वक्र की स्पर्श रेखा दी हुई रेखा पर अभिलंब है और स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - \frac{217}{36} = \frac{-1}{3} \left(x - \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{217}{36} = -\frac{x}{3} + \frac{5}{18} \Rightarrow 12x + 36y - 227 = 0$$

अतः $36y + 12x - 227 = 0$ दिए गए वक्र के स्पर्श रेखा का समीकरण है जोकि दी गई रेखा $5y - 15x = 13$ पर अभिलंब है।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं, जहाँ $x = 2$ तथा $x = -2$ हैं।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = 7x^3 + 11$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 7 \times 3x^2 = 21x^2$$

$\therefore (x_0, y_0)$ पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$

$$\therefore x = 2 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 21(2)^2 = 84$$

$$\therefore x = -2 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2} = 21(-2)^2 = 84$$

यह पाया जाता है कि स्पर्श रेखा की प्रवणता उन बिंदुओं पर, जहाँ $x = 2$ और $x = -2$ बराबर है, अतः दोनों स्पर्श रेखा समांतर है।

प्रश्न 17. वक्र $y = x^3$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु के y -निर्देशांक के बराबर है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^3$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता इस प्रकार दी जाती है $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)} = 3x^2$

जब स्पर्श रेखा की प्रवणता y -अक्ष के बिंदु के बराबर हो, तब $y = 3x^2$

$$\Rightarrow 3x^2 = x^3$$

($\because y = x^3$ दिया है)

$$\Rightarrow x^3(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ या } x = 3$$

जब $x = 0$, तब समी (i) से, $y = 0^3 = 0$

अतः, आवश्यक बिंदु $(0, 0)$ और $(3, 27)$ हैं।

प्रश्न 18. वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ मूलबिंदु से होकर जाती हैं।

वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करें और स्पर्श रेखा की सामान्य समीकरण लिखें। स्पर्श रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है, इसलिए $(0, 0)$ समीकरण को संतुष्ट करेगा।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = 4x^3 - 2x^5$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x^4$$

इसलिए, बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $12x^2 - 10x^4$ है।

बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$Y - y = (12x^2 - 10x^4)(X - x) \quad \dots (ii)$$

जब स्पर्श रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है, तब $x = y = 0$

इसलिए समी (i) से, $-y = (12x^2 - 10x^4)(-x)$

$$\Rightarrow y = 12x^3 - 10x^5$$

$$\text{और } y = 4x^3 - 2x^5$$

$$\therefore 12x^3 - 10x^5 = 4x^3 - 2x^5$$

$$\Rightarrow 8x^5 - 8x^3 = 0 \Rightarrow x^5 - x^3 = 0$$

$$x^3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$$

$$\text{जब } x = 0, y = 4(0)^3 - 2(0)^5 = 0$$

$$\text{जब } x = 1, y = 4(1)^3 - 2(1)^5 = 2$$

$$\text{जब } x = -1, y = 4(-1)^3 - 2(-1)^5 = -2$$

अतः, आवश्यक बिंदु $(0, 0)$, $(1, 2)$ और $(-1, -2)$ हैं।

प्रश्न 19. वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ पर वे x - अक्ष के समांतर हैं।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{2y} = \frac{1-x}{y}$$

स्पर्श रेखा x -अक्ष के समांतर होने के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$x=1$ समी (i) में रखने पर,

$$1^2 + y^2 - 2 \times 1 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 4 = 0$$
$$y = \pm 2$$

अतः वो बिंदु जिस पर स्पर्श रेखा x -अक्ष के समांतर (1,2) और (1,-2) है।

प्रश्न 20. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए वक्र का समीकरण है, $ay^2 = x^3$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $a(2y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$

बिंदु (am^2, am^3) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(am^2, am^3)} = \frac{3(am^2)^2}{2a(am^3)} = \frac{3}{2}m$$

$$\therefore (am^2, am^3) \text{ पर अभिलंब की प्रवणता, } = \frac{-1}{\frac{3m}{2}} = \frac{-2}{3m}$$

$\therefore (am^2, am^3)$ पर अभिलंब का समीकरण

$$y - am^3 = -\frac{2}{3m}(x - am^2)$$

$$\Rightarrow 3my - 3am^4 = -2x + 2am^2$$

$$\Rightarrow 2x + 3my - 3am^4 - 2am^2 = 0$$

प्रश्न 21. वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^3 + 2x + 6$... (i)

दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु (x, y) पर इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$$

\therefore किसी बिंदु पर (x, y) दिए गए वक्र की अभिलंब की प्रवणता

$$= \frac{-1}{\text{बिन्दु}(x, y) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{3x^2 + 2}$$

दी गई रेखा का समीकरण है, $x + 14y + 4 = 0$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{14}x - \frac{4}{14} \text{ जोकि समीकरण } y = mx + c \text{ के प्रकार का है।}$$

$$\therefore \text{ दी गई रेखा की प्रवणता} = \frac{-1}{14}$$

यदि अभिलंब रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है तब अभिलंब की प्रवणता उस रेखा की प्रवणता के बराबर होगी।

$$\therefore \frac{-1}{3x^2 + 2} = \frac{-1}{14} \Rightarrow 3x^2 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{जब } x = 2, y = 8 + 4 + 6 = 18$$

$$\text{जब } x = -2, y = -8 - 4 + 6 = -6$$

इसलिए, दिए गए वक्र में दो अभिलंब है जिसकी प्रवणता $\frac{-1}{14}$ है। और बिंदु $(2, 18)$ और $(-2, -6)$ से होकर गुजरती है।

इसलिए, अभिलंब का समीकरण है जोकि बिंदु $(2, 18)$ से होकर गुजरता है।

$$y - 18 = \frac{-1}{14}(x - 2)$$

$\Rightarrow 14y - 252 = -x + 2 \Rightarrow x + 14y - 254 = 0$ और, अभिलंब का समीकरण है जोकि बिंदु $(-2, -6)$ से होकर गुजरता है।

$$y - (-6) = \frac{-1}{14}[x - (-2)] \Rightarrow y + 6 = \frac{-1}{14}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 14y + 84 = -x - 2 \Rightarrow x + 14y + 86 = 0$$

अतः दिए गए वक्र के अभिलंब के समीकरण $x + 14y - 254 = 0$ और $x + 14y + 86 = 0$ है जो दी गई रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है।

प्रश्न 22. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण,

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1) \text{ और } y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = (x - x_1)$$

हल दिए गए परवलय का समीकरण है,

$$y^2 = 4ax \quad \dots(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

\therefore बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(at^2, 2at)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$

अतः बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \Rightarrow yt - 2at^2 = x - at^2. \Rightarrow x - ty + at^2 = 0$$

और $(at^2, 2at)$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$= \frac{-1}{\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -t$$

$\therefore (at^2, 2at)$ पर अभिलंब का समीकरण,

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

$$\Rightarrow tx + y - 2at - at^3 = 0$$

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि $8k^2 = 1$ है।

जब वक्र समकोण पर कटता है, तो कटे हुए बिंदु पर स्पर्श रेखाएँ अभिलंब होते हैं, अतः उनके प्रवणताओं के गुणफल -1 के बराबर होता है।

हल दिए गए वक्रों के समीकरण है,

$$x = y^2 \quad \dots(i)$$

$$\text{और} \quad xy = k \quad \dots(ii)$$

दोनों वक्रों का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करने के लिए, $\frac{k}{y} = y^2$

[समी (i) से x का मान (ii) में रखने पर]

$$\Rightarrow y^3 = k \Rightarrow y = k^{1/3}$$

अब, y का मान समी (i) में रखने पर, $x = (k^{1/3})^2 = k^{2/3}$

\therefore समी (i) और समी (ii) बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर काटते हैं।

समी (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1 = 2y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

\therefore प्रथम वक्र के बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{1}{2k^{1/3}} \quad \dots(iii)$

समी (ii) से,

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-k}{x^2}$$

$$\therefore \text{द्वितीय वक्र के बिंदु } (k^{2/3}, k^{1/3}) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{-k}{(k^{2/3})^2} = \frac{-k}{k^{4/3}} = \frac{-1}{k^{1/3}}$$

हम जानते हैं कि दो वक्र एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि वक्रों की स्पर्श रेखा, कटे हुए बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर एक-दूसरे पर अभिलंब हैं।

यह दर्शाता है कि स्पर्श रेखा के गुणनफल $= -1$ होना चाहिए।

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2k^{1/3}}\right)\left(-\frac{1}{k^{1/3}}\right) = -1 \Rightarrow 1 = 2k^{2/3}$$

$$\Rightarrow 1^3 = (2k^{2/3})^3 \Rightarrow 1 = 8k^2$$

अतः, दिए गए दो वक्र समकोण पर काटते हैं, यदि $8k^2 = 1$

प्रश्न 24. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\therefore (x_0, y_0) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता,} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

अतः (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \Rightarrow \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = (x - x_0) \frac{x_0}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y - y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x x_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

[$\because (x_0, y_0)$ समी (i) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को संतुष्ट करता है]

अब, (x_0, y_0) पर अभिलंब का समीकरण,

$$\frac{-1}{(x_0, y_0) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$$

इसलिए, (x_0, y_0) पर अभिलंब का समीकरण

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{y - y_0}{a^2 y_0} = -\frac{x - x_0}{b^2 x_0} \Rightarrow \frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$$

प्रश्न 25. वक्र $y = \sqrt{3x - 2}$ पर उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समांतर है।

पहले दिए गए वक्र का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। जहाँ $\frac{dy}{dx}$ रेखा की प्रवणता के बराबर है। इनको हल करने पर x_1 और y_1 का मान ज्ञात कीजिए तब आवश्यक स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए समीकरण $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ का अनुप्रयोग कीजिए।

हल दिए हुए वक्र का समीकरण है, $y = \sqrt{3x - 2}$

बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x - 2)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$$

\therefore रेखा का समीकरण $4x - 2y + 5 = 0$

$$\Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \quad (y = mx + c \text{ समीकरण के प्रकार का है})$$

\therefore रेखा की प्रवणता $m = 2$ है।

अब, वक्र की स्पर्श रेखा, रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समांतर है। इसलिए

$$\frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} = 2 \Rightarrow 3 = 4\sqrt{3x - 2}$$

$$\Rightarrow 3x - 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow 3x - 2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow 3x = 2 + \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{41}{48}$$

अब, $x = \frac{41}{48}$, $y = \sqrt{3x - 2}$ में रखने पर,

$$y = \sqrt{3\left(\frac{41}{48}\right) - 2} = \sqrt{\frac{41}{16} - 2}$$

$$\sqrt{\frac{41 - 32}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

∴ स्पर्श रेखा का समीकरण जो बिंदु $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$ से होकर गुजरती है जिसकी प्रवणता 2 है, इस प्रकार दिया जाता है।

$$y - \frac{3}{4} = 2\left(x - \frac{41}{48}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = 2x - \frac{41}{24} \Rightarrow 48x - 24y = 23$$

अतः, आवश्यक स्पर्श रेखा का समीकरण $48x - 24y = 23$ है।

निर्देश (प्र. सं. 26-27) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

प्रश्न 26. वक्र $y = 2x^2 + 3 \sin x$ के $x = 0$ पर अभिलंब की प्रवणता है

- (a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) -3 (d) $-\frac{1}{3}$

हल (d) दिए हुए वक्र का समीकरण है,

$$y = 2x^2 + 3 \sin x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3 \cos x.$$

$x = 0$ पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 0 + 3 \cos 0 = 3$$

$x = 0$ पर दिए गए वक्र के अभिलंब की प्रवणता,

$$= \frac{-1}{\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -\frac{1}{3}$$

प्रश्न 27. किस बिंदु पर $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है?

- (a) (1, 2) (b) (2, 1) (c) (1, -2) (d) (-1, 2)

हल (a) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y^2 = 4x$... (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

∴ बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

Vividh Prashnavali

Ques 1

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{\log x}{x}$ द्वारा प्रदत्त फलन $x = e$ पर उच्चतम है।

हल मान लीजिए $f(x) = \frac{\log x}{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \frac{x \left(\frac{1}{x} \right) - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) - (1 - \log x) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-x - 2x + 2x \log x}{x^4} = \frac{x(2 \log x - 3)}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3} \end{aligned}$$

उच्चतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$x = e \text{ पर, } f''(e) = \frac{2 \log e - 3}{e^3} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$$

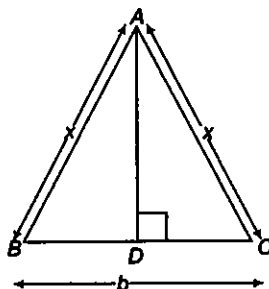
इसलिए द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = e$ पर, f उच्चतम है।

Ques 2

किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 सेमी/से की दर से घट रही हैं। उस समय जब त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर हैं। उसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से घट रहा है?

हल मान लीजिए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जहाँ BC निश्चित लंबाई b का आधार है।

पुनः मान लीजिए कि $\triangle ABC$ की दो बराबर भुजा x हैं



$AD \perp BC$ खींचिए।

अब, $\triangle ADC$ में, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर,

$$AD = \sqrt{x^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल (A)} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{b}{2} \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$$

t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} b \times \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{xb}{\sqrt{4x^2 - b^2}} \frac{dx}{dt}$$

यह दिया गया है कि त्रिभुज की दो बराबर भुजाएँ 3 सेमी/से की दर से घट रही हैं।

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -3 \text{ सेमी/से (ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि भुजाएँ घट रही हैं)}$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{-3xb}{\sqrt{4x^2 - b^2}} \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

$$\text{जब } x = b, \text{ तब } \frac{dA}{dt} = \frac{-3b^2}{\sqrt{3b^2}} = -\sqrt{3}b \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

अतः त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर है, तब उसका क्षेत्रफल $\sqrt{3} b$ सेमी²/से की दर से घट रहा है।

$$\Rightarrow x \cos \theta + y \sin \theta = a(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow x \cos \theta + y \sin \theta = a$$

$$\Rightarrow x \cos \theta + y \sin \theta - a = 0$$

$$\text{अब, मूलबिंदु से अभिलंब की दूरी} = \frac{|-a|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{|-a|}{\sqrt{1}} = |-a| \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$$

जोकि θ से स्वतंत्र है। अतः मूलबिंदु से अभिलंब अचर दूरी पर है।

Ques 3

अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = \frac{4 \sin x - 2x - x \cos x}{2 + \cos x}$ से प्रदत्त फलन $f(x)$

(i) वर्धमान (ii) हासमान है।

उस अंतराल में $f(x)$ वर्धमान है जहाँ $f'(x) > 0$ हो और उस अंतराल में $f(x)$ हासमान है।
जहाँ $f'(x) < 0$ हो।

$$\begin{aligned} \text{हल दिया है, } f(x) &= \frac{4 \sin x - 2x - x \cos x}{2 + \cos x} \\ &= \frac{4 \sin x - x(2 + \cos x)}{2 + \cos x} = \frac{4 \sin x}{2 + \cos x} - \frac{x(2 + \cos x)}{2 + \cos x} = \frac{4 \sin x}{2 + \cos x} - x \end{aligned}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \left[\frac{(2 + \cos x) \cos x - \sin x (0 - \sin x)}{(2 + \cos x)^2} \right] - 1 \\ &= 4 \left[\frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} \right] - 1 \quad (\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\ &= \frac{8 \cos x + 4}{(2 + \cos x)^2} - 1 = \frac{8 \cos x + 4 - (2 + \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2} \\ &= \frac{8 \cos x + 4 - 4 - \cos^2 x - 4 \cos x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{4 \cos x - \cos^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{\cos x(4 - \cos x)}{(2 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

हम जानते हैं कि $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Rightarrow 4 - \cos x > 0 \text{ और } (2 + \cos x)^2 > 0$$

(i) वर्धमान के लिए

$$f'(x) > 0 \text{ जब } \cos x > 0 \quad (\because \text{प्रथम और चतुर्थ चतुर्थांश में } \cos x \text{ धनात्मक है)}$$

\therefore अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ और $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ में $f(x)$ वर्धमान है।

(ii) हासमान के लिए

$$f'(x) < 0 \text{ जब } \cos x < 0 \quad (\because \text{द्वितीय और तृतीय चतुर्थांश में } \cos x \text{ ऋणात्मक है})$$

\therefore अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में $f(x)$ हासमान है

Ques 4

अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ से प्रदत्त फलन

(i) वर्धमान

(ii) हासमान है।

हल दिया गया है, $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$$

(i) $f(x)$ वर्धमान है यदि $f'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - \frac{3}{x^4} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^6 \geq 1$$

$$\Rightarrow (x^2)^3 \geq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$\therefore (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ में या $x < -1$ और $x > 1$ के लिए f वर्धमान है।

(ii) $f(x)$ हासमान है यदि $f'(x) \leq 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - \frac{3}{x^4} \leq 0 \Rightarrow x^6 \leq 1$$

$$\Rightarrow (x^2)^3 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$\therefore -1 < x < 1$ के लिए f हासमान है।

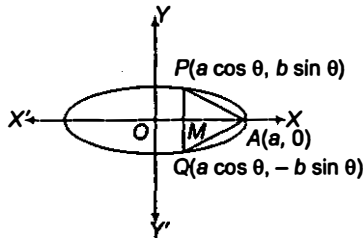
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात

Ques 5

कीजिए जिसका शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा है।

हल मान लीजिए कि दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है, तब कोई बिंदु P दीर्घवृत्त पर $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ है।

P से $PM \perp OX$ खींचिए और इसे आगे बढ़ाकर दीर्घवृत्त से Q पर मिलाए, तब $\triangle APQ$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, मान लीजिए कि S इसका क्षेत्रफल है, तब



$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times AM \times MP = (OA - OM) \times MP$$

$$= (a - a \cos \theta) \cdot b \sin \theta$$

$$\Rightarrow S = ab (\sin \theta - \sin \theta \cos \theta) = ab \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dS}{d\theta} = ab (\cos \theta - \cos 2\theta)$$

पुनः θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = ab (-\sin \theta + 2 \sin 2\theta)$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dS}{d\theta} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos 2\theta \Rightarrow 2\theta = 2\pi - \theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ पर, } \left(\frac{d^2S}{d\theta^2} \right)_{\theta = \frac{2\pi}{3}} = ab \left[-\sin \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \left(2 \times \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= ab \left[-\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= ab \left(-\sin \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \left[\begin{array}{l} \because \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} \end{array} \right]$$

$$= ab \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} \right) = ab \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}ab}{2} < 0$$

\therefore जब $\theta = \frac{2\pi}{3}$ हो, तो S उच्चतम है

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, निर्माण का व्यय, } C &= ₹ [70 \times xy + 45 \times 4(x + y)] \\ &= ₹ [70xy + 180(x + y)] \end{aligned} \quad \dots(ii)$$

समी (i) से y का मान समी (ii) में रखने पर,

$$C = 70 \times 4 + 180 \left(x + \frac{4}{x} \right) = 280 + 180 \left(x + \frac{4}{x} \right) \quad \dots(iii)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dC}{dx} = 0 + 180 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) = 180 \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)$$

निम्नतम व्यय के लिए $\frac{dC}{dx} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow 180 \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$x = 2$ पर, $\frac{dC}{dx}$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से घनात्मक परिवर्तित करता है।

$\therefore x = 2$ पर C न्यूनतम है।

(टंकी की लंबाई ऋणात्मक नहीं हो सकती है इसलिए, हम $x = -2$ नहीं लेंगे)

$$x = 2 \text{ और } y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

इसलिए, टंकी एक 2 मी भुजा वाली घन है।

समी (iii) से निर्माण में न्यूनतम व्यय

$$= ₹ \left[280 + 180 \left(2 + \frac{4}{2} \right) \right] = ₹ [280 + 720] = ₹ 1000$$

Ques 7

एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योग k है, जहाँ k एक अचर है। सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दोगुनी है।

हल मान लीजिए कि वर्ग की भुजा x और r वृत्त की त्रिज्या है।

$$\therefore \text{वृत्त की परिधि} = 2\pi r \quad \text{और वर्ग का परिमाप} = 4x$$

$$\text{दिया है, } 2\pi r + 4x = k \Rightarrow x = \frac{k - 2\pi r}{4} \quad \dots(i)$$

$$\therefore A = x^2 + \pi r^2 = \left(\frac{k - 2\pi r}{4} \right)^2 + \pi r^2 = \left(\frac{1}{16} \right) (k^2 - 4k\pi r + 4\pi^2 r^2) + \pi r^2$$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dA}{dr} = \left(\frac{1}{16} \right) (-4k\pi + 8\pi^2 r) + 2\pi r$$

पुनः से r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{1}{16} (0 + 8\pi^2) + 2\pi = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dA}{dr} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow 2\pi r \frac{4k\pi}{16} + \frac{8\pi^2 r}{16} = 0$$

$$\Rightarrow r \left(2\pi + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{k\pi}{4}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\left(\frac{k\pi}{4} \right)}{2\pi + \frac{\pi^2}{2}} = \frac{k}{8 + 2\pi} \quad \dots(ii)$$

अब, $\left(\frac{d^2A}{dr^2} \right)_{\left(r = \frac{k}{8+2\pi} \right)}$ = घनात्मक

\therefore जब $r = \frac{k}{8 + 2\pi}$ हो, तो A निम्नतम होगा

और इसे समी (i) में रखने पर,

$$x = \frac{k - 2\pi r}{4} = \frac{1}{4} \left(k - 2\pi \times \frac{k}{8 + 2\pi} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{8k + 2\pi k - 2\pi k}{8 + 2\pi} \right)$$

$$= \frac{2k}{8 + 2\pi} = 2 \left(\frac{k}{8 + 2\pi} \right) = 2r \quad \text{[समी (ii) से]}$$

इसलिए, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दोगुनी हो, तो उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम होगा।

Ques 8

..... किसी आयत के ऊपर बने अर्द्धवृत्त के आकार वाली खिड़की है। खिड़की का संपूर्ण परिमाण 10 मी है। पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि अर्द्धवृत्त की त्रिज्या = r

\therefore आयत की एक भुजा = $2r$ और दूसरी भुजा = x

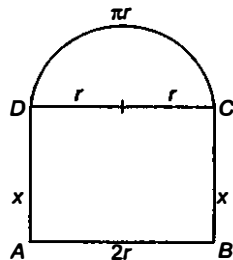
$\therefore P =$ परिमाण = 10 (दिया है)

$$\Rightarrow 2x + 2r + \frac{1}{2} (2\pi r) = 10$$

$$\Rightarrow 2x = 10 - r(\pi + 2) \quad \dots(i)$$

पुनः मान लीजिए कि A दर्शाया गया चित्र का क्षेत्रफल है

$\therefore A =$ अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल + आयत का क्षेत्रफल



$$= \frac{1}{2} \pi r^2 + 2rx$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} (\pi r^2) + r[10 - r(\pi + 2)] \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{1}{2} (\pi r^2) + 10r - r^2 \pi - 2r^2 = 10r - \frac{\pi r^2}{2} - 2r^2$$

r के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर,

$$\frac{dA}{dr} = 10 - \pi r - 4r \quad \dots \text{(ii)}$$

और $\frac{d^2A}{dr^2} = -\pi - 4 \quad \dots \text{(iii)}$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dA}{dr} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow 10 - \pi r - 4r = 0 \Rightarrow 10 = (4 + \pi)r \Rightarrow r = \frac{10}{4 + \pi}$$

समी (iii) में $r = \frac{10}{4 + \pi}$ रखने पर, $\frac{d^2A}{dr^2} =$ ऋणात्मक

इसलिए, जब $r = \frac{10}{4 + \pi}$ हो, तो A का स्थानीय मान उच्चतम होगा।

\therefore अर्द्धवृत्त की त्रिज्या $= \frac{10}{4 + \pi}$ हो, तो $\dots \text{(iv)}$

और आयत की एक भुजा $= 2r = 2r = \frac{2 \times 10}{4 + \pi} = \frac{20}{4 + \pi}$

समी (i) द्वारा आयत की दूसरी भुजा

$$x = \frac{1}{2} [10 - r(\pi + 2)] = \frac{1}{2} \left[10 - \left(\frac{10}{\pi + 4} \right) (\pi + 2) \right] \quad \text{[समी (iv) से]}$$

$$= \frac{10\pi + 40 - 10\pi - 20}{2(\pi + 4)}; x = \frac{20}{2(\pi + 4)} = \frac{10}{\pi + 4}$$

प्रकाश उच्चतम होगा जब क्षेत्रफल उच्चतम है। इसलिए, खिड़की की विमाएँ निम्न हैं

$$\text{लंबाई} = 2r = \frac{20}{\pi + 4}, \text{ चौड़ाई} = x = \frac{10}{\pi + 4}$$

त्रिभुज की भुजाओं से a और b दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। सिद्ध

Ques 9

कीजिए कि कर्ण की न्यूनतम लंबाई $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$ है।

हल मान लीजिए समकोण $\triangle ABC$ के कर्ण AC में P एक बिंदु इस प्रकार है कि

$$PL \perp AB = a \text{ और } PM \perp BC = b$$

पुनः मान लीजिए $\angle APL = \angle ACB = \theta$

$$AP = a \sec \theta, PC = b \operatorname{cosec} \theta$$

पुनः मान लीजिए कि कर्ण की लंबाई l है, तब

$$l = AP + PC \Rightarrow l = a \sec \theta + b \operatorname{cosec} \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dl}{d\theta} = a \sec \theta \tan \theta - b \operatorname{cosec} \theta \cot \theta$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dl}{d\theta} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow a \sec \theta \tan \theta = b \operatorname{cosec} \theta \cot \theta$$

$$\Rightarrow \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{b \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \tan^3 \theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

$$\text{अब, } \frac{d^2l}{d\theta^2} = a (\sec \theta \times \sec^2 \theta + \tan \theta \times \sec \theta \tan \theta)$$

$$- b [\operatorname{cosec} \theta (-\operatorname{cosec}^2 \theta) + \cot \theta (-\operatorname{cosec} \theta \cot \theta)]$$

$$= a \sec \theta (\sec^2 \theta + \tan^2 \theta) + b \operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta)$$

चूँकि $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ है इसलिए त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होंगे

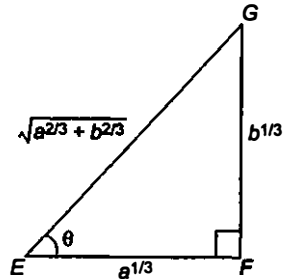
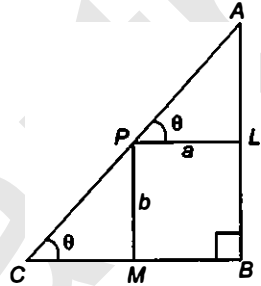
और $a > 0, b > 0$

$\therefore \frac{d^2l}{d\theta^2}$ धनात्मक है।

\Rightarrow जब $\tan \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ हो, तो l न्यूनतम है।

$\therefore l$ का न्यूनतम मान $= a \sec \theta + b \operatorname{cosec} \theta$

$$= a \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}} + b \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$



$$= \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} (a^{2/3} + b^{2/3}) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

$$\left[\because \Delta EFG \text{ में, } \sec \theta = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}} \text{ तथा } \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}} \right]$$

Ques 10

उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$ द्वारा प्रदत्त फलन f का,

- (i) स्थानीय उच्चतम बिंदु है।
- (ii) स्थानीय निम्नतम बिंदु है।
- (iii) नति परिवर्तन बिंदु है।
 - (i) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर स्थानीय निम्नतम का बिंदु है।
 - (ii) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में परिवर्तित करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर स्थानीय उच्चतम का बिंदु है।
 - (iii) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह परिवर्तन नहीं करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर नति परिवर्तन है।

हल दिया गया समीकरण है, $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)^4 \cdot 3(x+1)^2 + (x+1)^3 \cdot 4(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3 (x+1)^2 \{3(x-2) + 4(x+1)\} = (x-2)^3 (x+1)^2 (7x-2) \end{aligned}$$

अतः $f'(x)$ प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर विद्यमान है।

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow (x-2)^3 (x+1)^2 (7x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, -1, \frac{2}{7}$$

$x = 2$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x-2)$	परिणाम
x किंचित < 2	-ve	+ve	+ve	-ve
x किंचित > 2	+ve	+ve	+ve	+ve

$\therefore f'(x)$ ऋणात्मक से धनात्मक चिन्ह बदलता है अतः $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम होगा।

$x = -1$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x-2)$	परिणाम
x किंचित < -1	-ve	+ve	-ve	+ve
x किंचित > -1	-ve	+ve	-ve	+ve

$\therefore f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता है अतः $x = -1$ पर नति परिवर्तन होगा।

$x = \frac{2}{7}$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x-2)$	परिणाम
x किंचित $< \frac{2}{7}$	-ve	+ve	-ve	+ve
x किंचित $> \frac{2}{7}$	-ve	+ve	+ve	-ve

$\therefore f'(x)$ अपना चिन्ह घनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। इसलिए, $x = 2/7$ स्थानीय उच्चतम का बिंदु है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि x का मान -1 पर बदल रहा है $x = -1$ तथा $f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता है।

Ques 11

$f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ द्वारा प्रदत्त फलन f का निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \text{अब,} \quad f'(x) &= 2 \cos x (-\sin x) + \cos x \\ &= -2 \sin x \cos x + \cos x \end{aligned}$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow -2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (-2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ या } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मान के लिए, हम

$$f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi) \text{ ज्ञात करते हैं}$$

$$x = 0 \text{ पर,} \quad f(0) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1^2 + 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ पर,} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ पर,} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2} = 0^2 + 1 = 1$$

$$x = \pi \text{ पर,} \quad f(\pi) = \cos^2 \pi + \sin \pi = (-1)^2 + 0 = 1$$

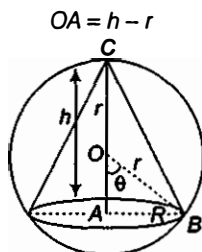
अतः f का निरपेक्ष उच्चतम मान 1.25 है जो $x = \frac{\pi}{6}$ पर घटित हो रहा है और निरपेक्ष निम्नतम मान 1 है जो $x = 0, \frac{\pi}{2}$ और π पर घटित हो रहा है।

Ques 12

सिद्ध कीजिए कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ है।

हल मान लीजिए कि शंकु की त्रिज्या R और ऊँचाई h है।

∴



अब $\triangle OAB$ में, $r^2 = R^2 + (h - r)^2$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 + h^2 + r^2 - 2rh \Rightarrow R^2 = 2rh - h^2$$

शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

$$= \frac{1}{3} \pi h (2rh - h^2) = \frac{1}{3} \pi (2rh^2 - h^3)$$

h के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3} \pi (4rh - 3h^2)$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dV}{dh} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow 4rh = 3h^2 \Rightarrow 4r = 3h$$

$$\therefore h = \frac{4r}{3}$$

($h \neq 0$)

अब, $\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{1}{3} \pi (4r - 6h)$

$$h = \frac{4r}{3} \text{ पर, } \left(\frac{d^2V}{dh^2} \right)_{h=\frac{4r}{3}} = \frac{1}{3} \pi \left(4r - 6 \times \frac{4r}{3} \right) = \frac{\pi}{3} (4r - 8r) = \frac{-4\pi}{3} < 0$$

जब $h = \frac{4r}{3}$ हो, तो V उच्चतम होगा।

अतः शंकु का आयतन उच्चतम होगा। जब $h = \frac{4r}{3}$ जोकि शंकु की ऊँचाई है।

Ques 13

मान लीजिए $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलन f इस प्रकार है। कि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर f एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $[a, b]$ पर, $f'(x) > 0$

$\therefore [a, b]$ पर, f एक अवकलनीय फलन है और प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है। इसलिए f , $[a, b]$ पर सतत् है।

मान लीजिए कि $x_1, x_2 \in [a, b]$ और $x_2 > x_1$, तब लेगरेन्ज के औसत मान प्रमेय द्वारा, एक $c \in [a, b]$ इस प्रकार है कि

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ जैसा कि } x_2 > x_1$$

$$\text{और } f'(x) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$$\therefore x_1 < x_2 \text{ के लिए } \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

इसलिए (a, b) पर f वर्धमान फलन है।

Ques 14

सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

h ऊँचाई और r त्रिज्या वाले बेलन का चित्र बनाएँ जोकि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत है। अब, आयतन V को A और h के पदों में लिखकर द्वितीय अवकलन परीक्षण करके आवश्यक परिणाम सिद्ध कीजिए।

हल मान लीजिए कि गोले के अंतर्गत बेलन की लंबाई h है और x व्यास है। तब,

$$h^2 + x^2 = (2R)^2 \Rightarrow h^2 + x^2 = 4R^2 \quad \dots(i)$$

बेलन का आयतन $= \pi$ (त्रिज्या)² \times ऊँचाई

$$\Rightarrow V = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 \cdot h = \frac{1}{4} \pi x^2 h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4} \pi h (4R^2 - h^2) \quad \dots (ii)$$

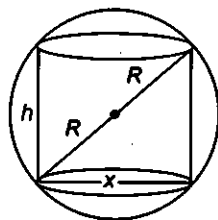
[समी (i) से, $x^2 = 4R^2 - h^2$]

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h - \frac{1}{4} \pi h^3$$

h के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3}{4} \pi h^2 = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4} h^2 \right)$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \text{ रखने पर } \Rightarrow R^2 = \frac{3}{4} h^2 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$



तथा $\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{4} \times 2\pi h$

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ पर, } \frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{4} \times 2\pi \left(\frac{2R}{\sqrt{3}} \right) = -\sqrt{3}\pi R = \text{ऋणात्मक}$$

\Rightarrow जब $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ हो, तो v उच्चतम है

तथा $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ पर उच्चतम आयतन

$$V = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{2R}{\sqrt{3}} \right) \left(4R^2 - \frac{4R^2}{3} \right) \quad \text{[समी (ii) से]}$$

$$= \frac{\pi R}{2\sqrt{3}} \left(\frac{8R^2}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \text{ वर्ग इकाई}$$

इसलिए, जब $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ है, तब बेलन का आयतन उच्चतम होगा।

Ques 15

सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंबवृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु के ऊँचाई की एक-तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$ है।

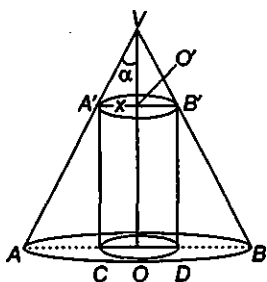
हल मान लीजिए कि VAB शंकु की ऊँचाई h , अर्द्धशीर्ष कोण α है और मान लीजिए कि $A'B'DC$ बेलन के आधार की त्रिज्या x है जोकि शंकु के अंतर्गत है, तब OO' बेलन की ऊँचाई है जहाँ

$$OO' = VO - VO' = h - xcot\alpha$$

बेलन का आयतन $V = \pi x^2 (h - xcot\alpha) \quad \dots (i)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi xh - 3\pi x^2 cot\alpha$$



उच्चतम या न्यूनतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow 2\pi xh - 3\pi x^2 \cot \alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{2h}{3} \tan \alpha \quad (\because x \neq 0)$$

अब $\frac{d^2V}{dx^2} = 2\pi h - 6\pi x \cot \alpha$

$$x = \frac{2h}{3} \tan \alpha \text{ पर, } \frac{d^2V}{dx^2} = \pi (2h - 4h) = -2\pi h < 0$$

\Rightarrow जब $x = \frac{2h}{3} \tan \alpha$ हो, तो V उच्चतम होगा।

$$\text{अब, } OO' = h - x \cot \alpha = h - \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}$$

\therefore बेलन का उच्चतम आयतन

$$V = \pi \left(\frac{2h}{3} \tan \alpha \right)^2 \left(h - \frac{2h}{3} \right) = \frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$$

निर्देश (प्र. सं. 19-24) निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर चुनिए।
Ques 16

..... एक 10 मी त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 मी³/घंटा की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है

(a) 1 मी³/घंटा

(b) 0.1 मी³/घंटा

(c) 1.1 मी³/घंटा

(d) 0.5 मी³/घंटा

हल (a) मान लीजिए कि किसी समय t घंटे पर, बेलन में गेहूँ की गहराई h मी है, तब गेहूँ का आयतन V मी³ है

$$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (10)^2 h = 100 \pi h$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow 314 = 100\pi \frac{dh}{dt} \quad \left(\text{दिया है, } \frac{dV}{dt} = 314 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{314}{100(3.14)} = 1 \text{ मी}^3/\text{घंटा}$$

\therefore गेहूँ की गहराई 1 मी³/घंटा की दर से बढ़ रही है।