अध्याय-8

समाकलनों के अनुप्रयोग

(Application of Integrals)

(Important Formulae and Definitions)

1. निश्चित समाकल योग की एक सीमा है।
2. वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_{x=a}^{x=b} y\,dx$ है।
3. $x = a$ समाकलन की निम्न सीमा तथा $x = b$ समाकलन की उच्च सीमा कहलाती है।
4. वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = a$ और $y = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_{y=a}^{y=b} x\,dy$ है।
5. दो वक्रों $y = f_1(x)$ तथा $y = f_2(x)$ एवं रेखाएँ $x = a, x = b$ के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$ है।

उत्तर

Ques 1

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

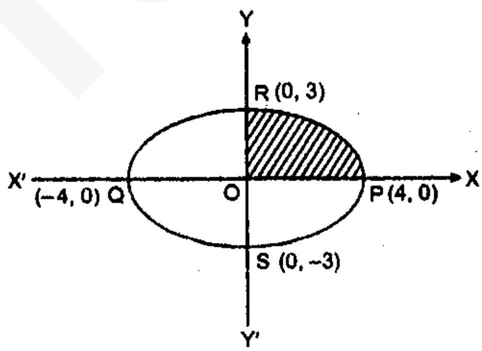
$\because$ वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि समीकरण में x तथा y की समघात है।

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\therefore \quad \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16}=\frac{16-x^2}{16}$$

$$\text{या} \quad \frac{y}{3}=\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}=\frac{1}{4}.\sqrt{16-x^2}$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$



अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4\ OPR$ का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= 3\left[\left(0+8\sin^{-1}\frac{4}{4}\right)-0\right] = 24\sin^{-1}1$$

$$= 24\times\frac{\pi}{2} = 12\pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

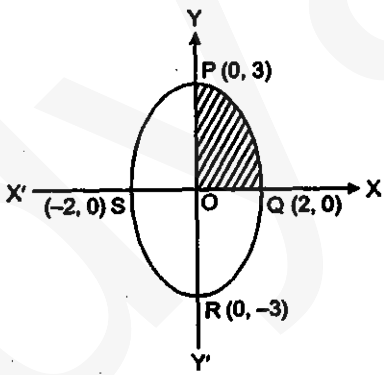
Ques 2

. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$\therefore$
$$\frac{y^2}{9} = 1-\frac{x^2}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$



इसका केन्द्र (0, 0) है।
अर्द्ध दीर्घ अक्ष की लम्बाई 3 और अर्द्ध लघु अक्ष की लम्बाई 2 है।
अतः दीर्घवृत्त द्वारा घेरा गया अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4 \times \text{क्षेत्रफल } POQ \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= 4\int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 6\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 6\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 6[(0+2\sin^{-1}1)-0] = 12\sin^{-1}1$$

$$= 12\times\frac{\pi}{2} = 6\pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{20+12-5}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{27}{6}\right)$$

$= \frac{9}{8}$ वर्ग इकाई। उत्तर

प्रश्न 12. एवं 13 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

Ques 3 **प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :**

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

हल : वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 = 4$

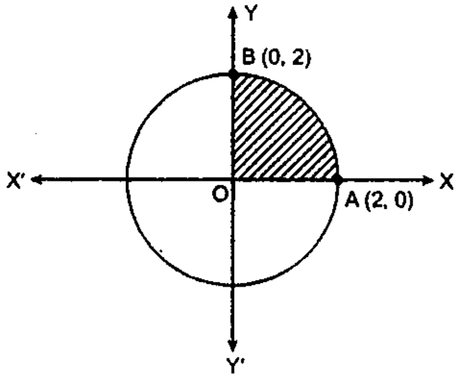
$\therefore$ $y^2 = 4 - x^2$

या $y = \sqrt{4 - x^2}$

जब $x = 0$ हो, तब $y = 2$

और जब $x = 2$ हो, तब $y = 0$

अत: प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 0) और (0, 2) हैं।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^2 y\,dx$

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 0 + 2\sin^{-1}(1)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

अतः विकल्प (A) सही है। उत्तर

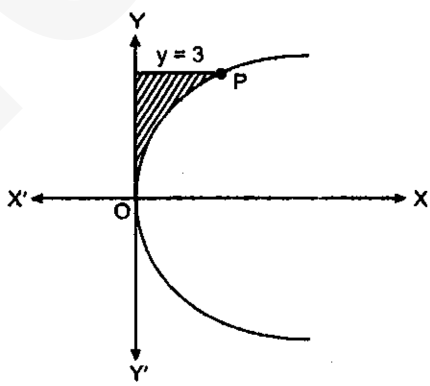
Ques 4 **वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :**

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

हल : दिया गया वक्र का समीकरण,

$$y^2 = 4x$$

अर्थात् $$x = \frac{1}{4}y^2$$



अब रेखा $y = 3$ तथा वक्र $y^2 = 4x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x\,dy$$

$$= \int_0^3 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{4}\int_0^3 y^2 dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}[27-0]$$

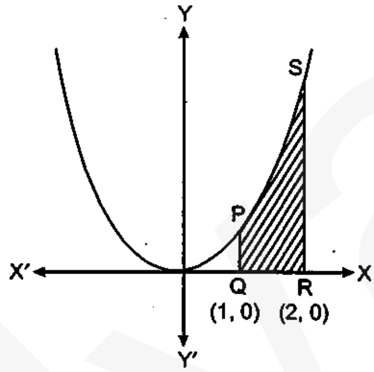
$$= \frac{1}{12} \times 27 = \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$

अत: विकल्प (B) सही है। उत्तर

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) $y = x^2, x = 1, x = 2$ एवं x-अक्ष
(ii) $y = x^4, x = 1, x = 5$ एवं x-अक्ष

हल : प्रश्नानुसार परवलय $y = x^2$ का शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा OY है।



$y = x^2, x = 1, x = 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{क्षेत्र } PQRS \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_1^2 y\,dx$$

$$= \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{7}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

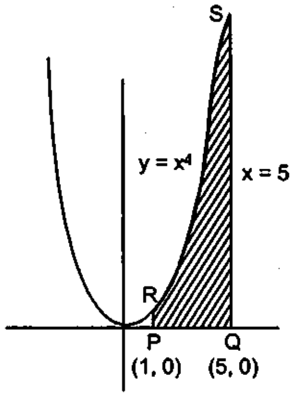
(ii) दिया है : $y = x^4$ बिन्दु (0, 0) से होकर जाता है। इसकी सममित रेखा OY है।
$y = x^4$ हेतु x तथा y के निम्नलिखित मान हैं :

x	−1	0	1	2	3
y	1	0	1	16	81

तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{क्षेत्र } PQRS \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_1^5 y\,dx = \int_1^5 x^4 dx = \left|\frac{x^5}{5}\right|_1^5$$



$$= \left(\frac{5^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = 625 - \frac{1}{5}$$

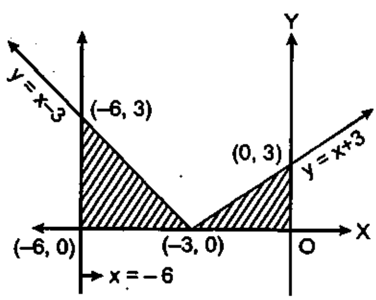
$$= \frac{3125-1}{5} = \frac{3124}{5}$$

$= 624.8$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

Ques 2 $y = |x+3|$ का ग्राफ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3|\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $y = |x+3|$

$$= \begin{cases} (x+3), & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$$



जब $x < -3$ अर्थात् $y = -x-3$

x	-4	-5	-6
y	1	2	3

और जब $x \geq -3$

x	-1	-2	-3
y	2	1	0

अभीष्ट क्षेत्रफल,

$$\therefore \quad \int_{-6}^{0}|x+3|\,dx = \int_{-6}^{0}|x+3|\,dx + \int_{-1}^{0}|x+3|\,dx$$

$$= -\int_{-6}^{-3} -(x+3)dx + \int_{-3}^{0}(x+3)\,dx$$

$$= -\left|\frac{x^2}{2}+3x\right|_{-6}^{-3} + \left|\frac{x^2}{2}+3x\right|_{-3}^{0}$$

$$= -\left[\frac{9}{2}-9-18+18\right]+\left[0+0+\frac{9}{2}+4\right]$$

$$= \frac{9}{2}+\frac{9}{2} = 9 \text{ वर्ग इकाई।}$$

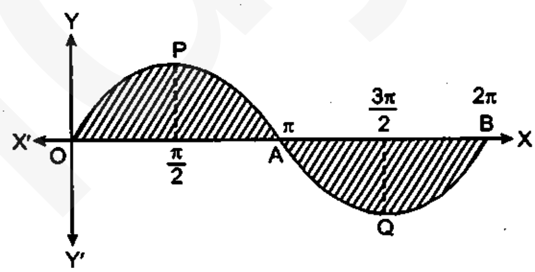
उत्तर

Ques 3

$x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \sin x$ के ग्राफ पर x के कुछ मानों के संगत y के मान निम्न प्रकार हैं। इन बिन्दुओं को वक्र द्वारा मिलाने से निम्नानुसार ग्राफ प्राप्त होता है :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y	0	0.5	0.7	0.8	1	0.5	0.7	0.8	0



$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^{\pi} y\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-y)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$

$$= |-\cos x|_0^{\pi} - |-\cos x|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (-\cos\pi + \cos\theta) + \cos 2\pi - \cos\pi)$$

$$= [-(-1)+1] + [1-(-1)]$$

$$= (1+1)+(1+1)$$

$$= 4 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

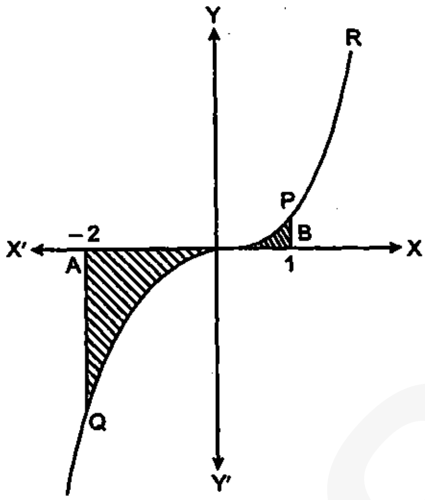
प्रश्न 16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए—

Ques 4 वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$, $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

(A) -9 (B) $-\frac{15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

हल : दिया गया वक्र $y = x^3$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 3x^2 =$ धनात्मक है।



∴ दिया वक्र वर्द्धमान है,

$$\frac{dy}{dx} = 0, x = 0$$

∴ x-अक्ष पर स्पर्श रेखा है।

$$f(-x) = -f(x) \therefore (-x)^3 = -x^3$$

$y = x^3$, द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= AQOA$ का क्षेत्रफल + BPO का क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = 0 - \frac{(-2)^4}{4} + \left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

अतः विकल्प (D) सही है। उत्तर

Ques 5 **वक्र $y = x|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :**

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

हल : जब $x > 0$, $|x| = x$

∴ वक्र का दिया गया समीकरण है : $y = x^2$

$$y = +x^2$$

जब $x < 0$, $|x| = -x$,

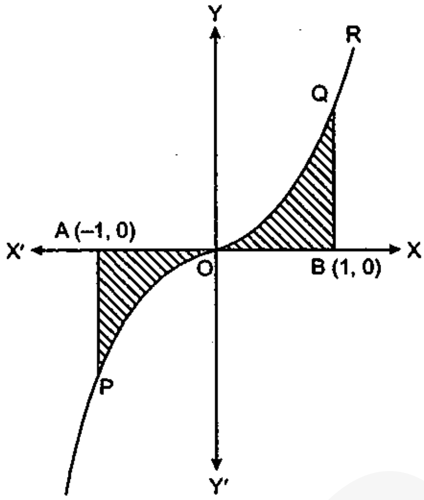
∴ वक्र का दिया गया समीकरण है :

$$y = -x^2$$

x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल

$= POA$ का क्षेत्रफल + ΔBQO का क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 2 \times \int_{0}^{1} x^2 dx$$



$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**