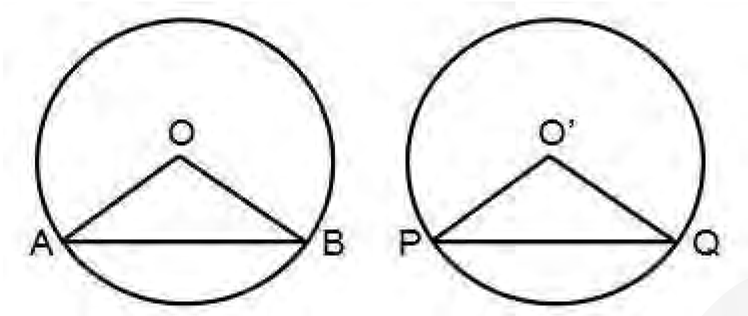
9. वृत्त

प्रश्नावली 9.1

Q1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

हल :



दिया है : O और O' वाले दो सर्वांगसम

वृत्त हैं जिनकी बराबर जीवाएं AB = PQ है |

सिद्ध करना है :

$\angle AOB = \angle PO'Q$ है |

प्रमाण : ΔAOB तथा $\Delta PO'Q$ में

AO = PO' (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या बराबर होती है)

BO = QO' (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या)

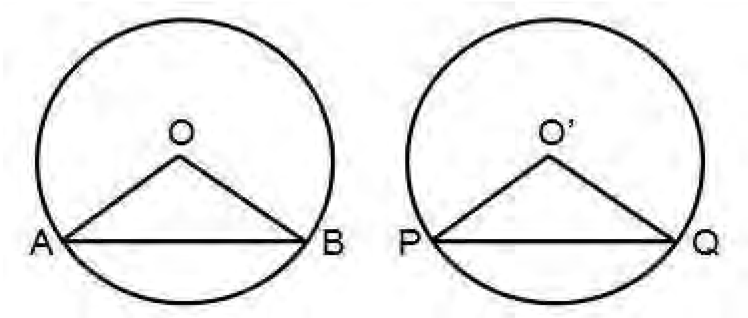
AB = PQ (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOB \cong \Delta PO'Q$

अत: $\angle AOB = \angle PO'Q$ (BY CPCT) **Proved**

Q2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।



हल :

दिया है : O और O' वाले दो सर्वांगसम

वृत्त हैं जिनमें $\angle AOB = \angle PO'Q$ है |

सिद्ध करना है :

AB = PQ है |

प्रमाण : ΔAOB तथा $\Delta PO'Q$ में

AO = PO' (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या बराबर होती है)

BO = QO' (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या)

$\angle AOB = \angle PO'Q$ (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

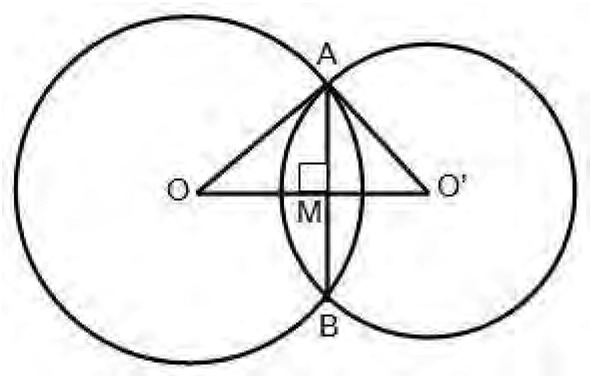
$\Delta AOB \cong \Delta PO'Q$

अत: AB = PQ (BY CPCT) **Proved**

Exercise – 9.2

Q1. 5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल :



AO = 5 cm

AO' = 3 cm

OO' = 4 cm

AB = ?

$$S = \frac{a+b+C}{2} = \frac{5+4+3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$\Delta OAO'$ का क्षेत्रफल (हेरॉन सूत्र से)

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$

$$= \sqrt{6(1)(2)(3)}$$

$$= \sqrt{6 \times 6}$$

$$= 6 \text{ cm}^2$$

$\Delta OAO'$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times AM$

या $\quad 6 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times AM$

या $\quad 2\ AM = 6 \text{ cm}^2$

या $\quad AM = \frac{6}{2} \text{ cm}^2$

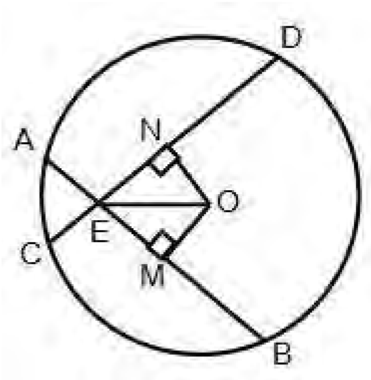
या $\quad AM = 3 \text{ cm}^2$

अत: $AB = 2\ AM = 2 \times 3 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$

अत: उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई 6 cm^2 है |

Q2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।

हल :



दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की दो बराबर

जीवाएं AB तथा CD हैं | जो एक दुसरे को

बिंदु E पर प्रतिच्छेद करती हैं |

सिद्ध करना है : AE = CE और BE = DE है |

रचना : O से M तथा N को मिलाया |

प्रमाण : $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है |

(जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है |)

ΔEOM तथा ΔEON में

OM = ON (बराबर जीवाओं की केंद्र से दुरी)

EO = EO (उभयनिष्ठ)

$\angle OME = \angle ONE$ (प्रत्येक 90°)

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta EOM \cong \Delta EON$

इसलिए, EM = EN ..... (1) By CPCT

जबकि AB = CD .... (दिया है)

या $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ CD

या AM = CN ...... (2)

या BM = DN .... (3)

अब समीकरण (2) में से (1) घटाने पर

AM – EM = CN – EN

या AE = CE **Proved (i)**

अब समीकरण (3) में (1) जोड़ने पर

BM + EM = DN + EN

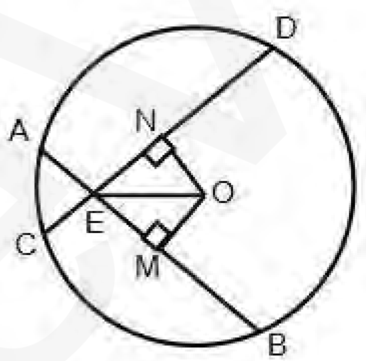
या BE = DE **Proved (ii)**

अत: AE = CE और BE = DE है |

इसलिए जीवा के संगत अंत:खंड बराबर हैं |

Q3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।

हल :



दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की दो बराबर जीवायें

AB तथा CD वृत्त के अन्दर बिंदु E पर

प्रतिच्छेद करती हैं |

रचना : E को केंद्र O से मिलाया |

सिद्ध करना है : $\angle MEO = \angle NEO$

प्रमाण : $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है |

(जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है |)

ΔEOM तथा ΔEON में

$OM = ON$ (बराबर जीवाओं की केंद्र से दुरी)

$EO = EO$ (उभयनिष्ठ)

$\angle OME = \angle ONE$ (प्रत्येक $90°$)

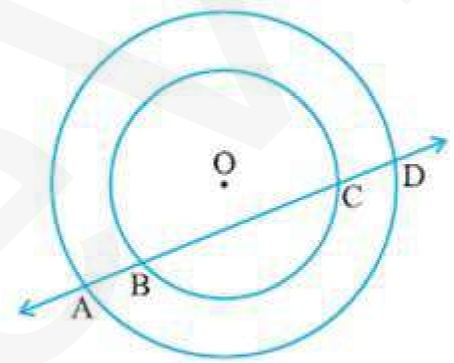
RHS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta EOM \cong \Delta EON$

अत: $\angle MEO = \angle NEO$ By CPCT **Proved**

Q4. यदि एक रेखा दो संकेंद्री वृतों (एक ही केंद्र वाले वृत्त) को, जिनका केंद्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए AB = CD है |

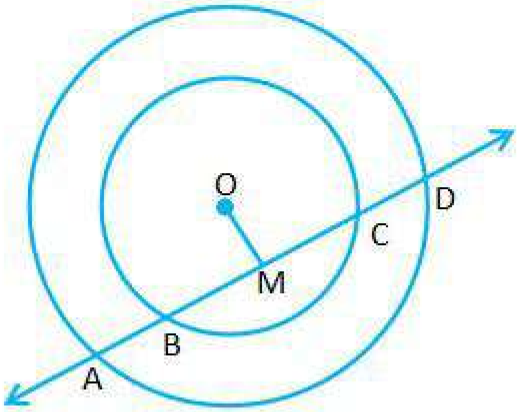
हल :



दिया है : दो संकेंद्री वृत्त जिनका केंद्र O है |

एक रेखा वृत्त को A, B, C और D पर प्रतिच्छेद

करती हैं |



सिद्ध करना है : AB = CD

रचना : OM $\perp$ AD खिंचा |

प्रमाण : OM $\perp$ AD .... (रचना से)

इसलिए, AM = DM .... (1)

(जीवा पर लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

इसीप्रकार, BM = CM .... (2)

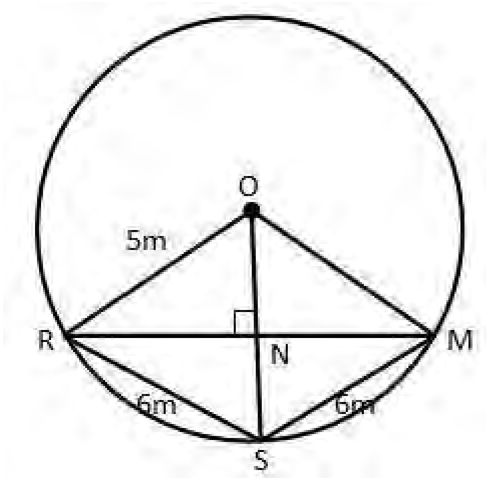
समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

AM - BM = DM - CM

या AB = CD Proved

Q5. एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

हल :



वृत्त का केंद्र O और और माना कि वृत्त पर

रेशमा (R), सलमा (S) और मनदीप (M) है |

RS = 6 m, SM = 6 m और RM = ?

OR = OS = 5 cm है |

ΔROS में,

a = 5 cm, b = 5cm और c = 6 cm

इसलिए, $S = \frac{a+b+C}{2} = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm

ΔROS का क्षेत्रफल (हेरॉन सूत्र से)

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}$

$= \sqrt{8(3)(3)(2)}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 4 \times 4}$

$= 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2$

अब, ΔROS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$12 = \frac{1}{2} \times OS \times RN$$

$$12 = \frac{1}{2} \times 5 \times RN$$

$$RN = 12 \times \frac{2}{5}$$

$$RN = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ m}$$

RM = 2 × RN

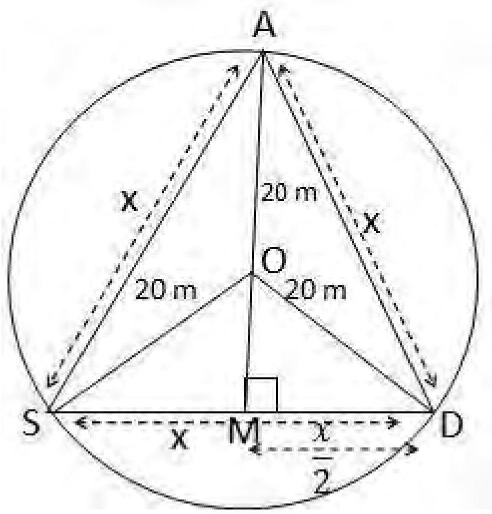
RM = 2 × 4.8

= 9.6 m

अत: रेशमा और मनदीप की बीच की दुरी 9.6 है |

Q6. 20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैयद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल :



माना अंकुर की स्थिति A, सैयद की S और डेविड की D है |

अत: फोन की डोरी की लंबाई AS = SD = AD = x m है |

वृत्त की त्रिज्या AO = OS = OD = 20 m है |

रचना : $OM \perp SD$ खिंचा ।

चूँकि ΔASD एक समबाहु है ।

इसलिए ΔASD का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \text{ m}^2$$

अब, चूँकि $OM \perp SD$ है ।

इसलिए, समकोण ΔDOM में, $OD = 20$ m $DM = \frac{x}{2}$ m

अत: पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OD^2 = OM^2 + DM^2$$

या $20^2 = OM^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

या $400 = OM^2 + \frac{x^2}{4}$

या $OM^2 = 400 - \frac{x^2}{4}$

या $OM^2 = \frac{1600 - x^2}{4}$

या OM = $\sqrt{\frac{1600 - x^2}{4}}$

या OM = $\frac{\sqrt{1600 - x^2}}{2}$ m

अब, ΔASD का क्षेत्रफल = 3 (ΔSOD का क्षेत्रफल)

[क्योंकि ar(SOD) = ar(AOS) = ar(AOD) है]

अत: $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 3\ (\frac{1}{2} \times SD \times OM)$

या $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 3\ (\frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{1600 - x^2}}{2})$

या $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (\frac{3}{4} \times x\sqrt{1600 - x^2})$

या $\sqrt{3}\,x^2 = (3x\sqrt{1600 - x^2})$

या $x = (\sqrt{3}\sqrt{1600 - x^2})$ [दोनों पक्षों से सरलीकरण करने पर]

या $x = \sqrt{3(1600 - x^2)}$

या $x^2 = 3(1600 - x^2)$ [दोनों पक्षों को वर्ग करने पर]

या $x^2 = 4800 - 3x^2$

या $x^2 + 3x^2 = 4800$

या $4x^2 = 4800$

या $x^2 = \frac{4800}{4}$

या $x^2 = 1200$

या $x = \sqrt{1200}$

या $x = \sqrt{400 \times 3}$

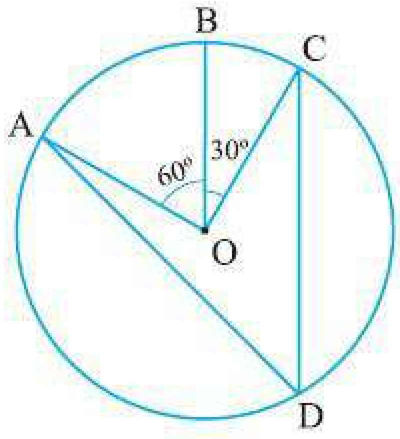
या $x = 20\sqrt{3}$ m

अत: डोरी की लंबाई **$20\sqrt{3}$** m है |

Exercise 9.3

Q1. आकृति 10.36 में, केंद्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिंदु A, B और C इस प्रकार हैं कि ∠BOC = 30 ° तथा ∠AOB = 60 ° है | यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिंदु है, रो ∠ADC ज्ञात कीजिए |

हल :



$\angle AOC = 2\ \angle ADC$ (प्रमेय 10.8 से)

[एक चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है |]

या $\angle AOB + \angle BOC = 2\ \angle ADC$

या $60^\circ + 30^\circ = 2\ \angle ADC$

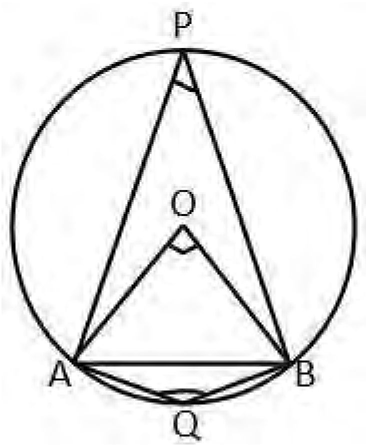
या $2\ \angle ADC = 90^\circ$

या $\angle ADC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

अत: $\angle ADC = 45^\circ$

Q2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है | जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिंदु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिंदु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए |

हल :



चाप AB त्रिज्याएँ OA तथा OB के बराबर है |

इसलिए ΔAOB एक समबाहु त्रिभुज है |

अत: $\angle AOB = 60^\circ$ (समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण)

अब, $\angle AOB = 2\angle APB$

(वृत्त के केंद्र पर बना कोण शेष वृत्त पर बने कोण का दुगुना होता है)

या $60^\circ = 2\angle APB$

या $\angle APB = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

अत: दिर्घ चाप में बना कोण 30° है |

अब चूँकि APBQ एक चक्रीय चतुर्भुज है |

इसलिए $\angle P + \angle Q = 180^\circ$

(चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग)

या $30^\circ + \angle Q = 180^\circ$

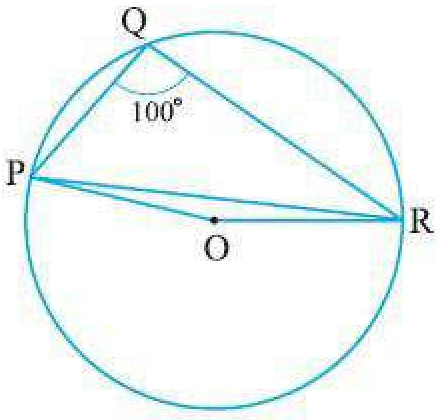
या $\angle Q = 180^\circ - 30^\circ$

या $\angle Q = 150^\circ$

अत: दीर्घ वृत्त में बना कोण 150° है |

Q3. आकृति 10.37 में, $\angle PQR = 100^\circ$ है, जहाँ P, Q तथा R केंद्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिंदु हैं | $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए |

हल :



दिया है - $\angle PQR = 100^\circ$ है |

चूँकि **(वृत्त के केंद्र पर बना कोण शेष वृत्त पर बने कोण का दुगुना होता है)**

इसलिए $\angle POR = 2\ \angle PQR$

या $\angle POR = 2 \times 100^\circ$

या $\angle POR = 200^\circ$

अब प्रतिवर्ती $\angle POR = 360^\circ - 200^\circ$

या प्रतिवर्ती $\angle POR = 160^\circ$

ΔPOR में, $PO = RO$ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

इसलिए $\angle OPR = \angle ORP$ ....(1) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

अब, $\angle OPR + \angle ORP + \angle POR = 180^\circ$ (तीनों कोणों का योग)

या $\angle OPR + \angle OPR + 160^\circ = 180^\circ$ समी० (1) से

या $2\ \angle OPR = 180^\circ - 160^\circ$

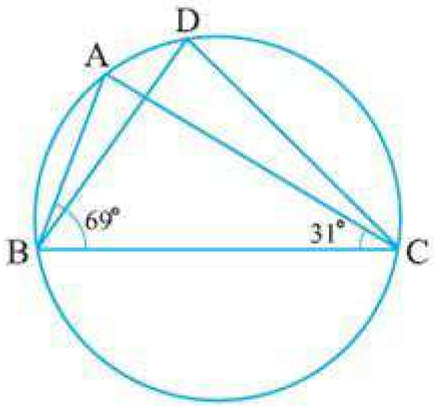
या $2\ \angle OPR = 20^\circ$

या $\quad \angle OPR = \dfrac{20^\circ}{2}$

या $\quad \angle OPR = 10^\circ$ उत्तर

Q4. आकृति 10.38 में, $\angle ABC = 69^\circ$ और $\angle ACB = 31^\circ$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए |

हल :



ΔABC में,

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों का योग)

या $\quad 69^\circ + 31^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

या $\quad 100^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

या $\quad \angle BAC = 180^\circ - 100^\circ$

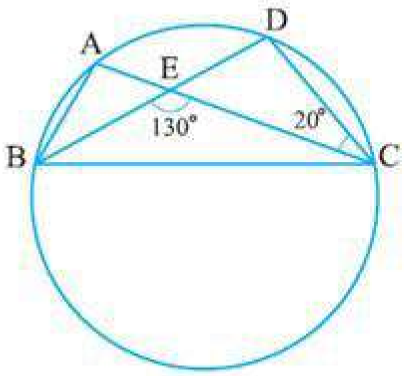
या $\quad \angle BAC = 80^\circ$

अब चूँकि $\angle BAC = \angle BDC$

इसलिए, $\angle BDC = 80^\circ$

Q5. आकृति 10.39 में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिंदु हैं | AC और BD एक बिंदु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130^\circ$ तथा $\angle ECD = 20^\circ$ है | $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए |

हल :



BED एक सरल रेखा है |

इसलिए, $\angle BEC + \angle CED = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

या $\quad 130^\circ + \angle CED = 180^\circ$

या $\quad \angle CED = 180^\circ - 130^\circ$

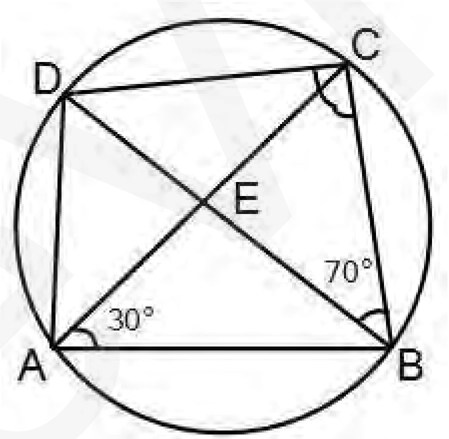
या $\quad \angle CED = 50^\circ$

अब $\angle BAC = \angle CED$ **[क्योंकि एक ही वृत्त खंड में बने कोण बराबर होते हैं]**

इसलिए $\angle BAC = 50^\circ$

Q6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BAC = 30^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि AB = BC हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया है कि $\angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BAC = 30^\circ$ है |

अब, $\angle BAC = \angle BDC$ **[एक ही वृत्त खंड में बने कोण बराबर होते हैं]**

इसलिए, $\angle BDC = 30°$ ...... (1)

अब DBCD में,

$\angle BDC = 30°$, $\angle DBC = 70°$ और $\angle BCD = ?$

अब $\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180°$ **[त्रिभुज के तीनों कोणों का योग]**

या $30° + 70° + \angle BCD = 180°$ समी॰ (1) से

या $100° + \angle BCD = 180°$

या $\angle BCD = 180° - 100°$

या $\angle BCD = 80°$

अब, AB = BC दिया है

इसलिए, $\angle BAC = \angle BCA$ ...... (2) **[बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]**

अब चूँकि $\angle BAC = 30°$ है |

इसलिए $\angle BCA = 30°$ समी॰ (2) से

या $\angle ECB = 30°$

चूँकि $\angle BCD = 80°$ है |

या $\angle ECB + \angle ECD = 80°$

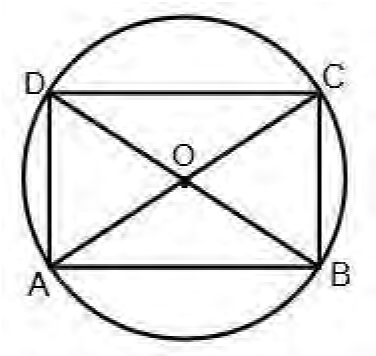
या $30° + \angle ECD = 80°$

या $\angle ECD = 80° - 30° = 50°$

अत: $\angle ECD = 50°$ और $\angle BCD = 80°$ है |

Q7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

हल :



दिया है : ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

जिसके विकर्ण AC तथा BD बिंदु O पर

प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है।

प्रमाण : ΔAOB तथा ΔCOD में

$OA = OC$ (एक ही वृत्त कि त्रिज्यायें)

$OB = OD$ (एक ही वृत्त कि त्रिज्यायें)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षाभिमुख कोण)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

अत: $AB = CD$ ....(1) (By CPCT)

और $\angle BAO = \angle DCO$ एकांतर कोण

अत: $AB \parallel CD$ ...(2)

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब BD विकर्ण वृत्त का ब्यास है (दिया है)

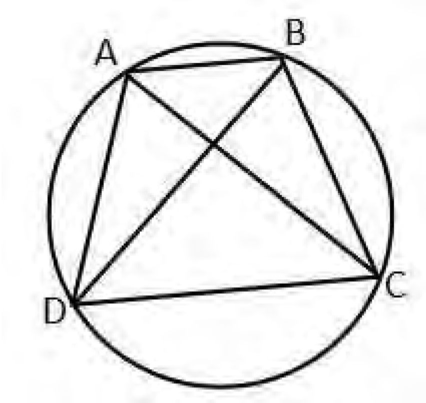
इसलिए $\angle A = 90°$ तथा $\angle C = 90°$ है। **[अर्धवृत्त में बना कोण 90° होता है]**

अत: ABCD एक आयात है।

(वह समांतर चतुर्भुज जिसका एक कोण समकोण हो वह आयत कहलाता है)

Q8. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

हल :



दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें

AB || CD है और AD = BC है |

सिद्ध करना है :

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है |

प्रमाण : ΔACD तथा ΔBDC में

AD = BC (दिया है)

DC = DC (दिया है)

$\angle DAC = \angle CBD$ (एक ही वृत्त खंड में बने कोण)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ACD \cong \Delta BDC$

अत: $\angle D = \angle C$ ..... (1) By CPCT

अब चूँकि AB || CD दिया है

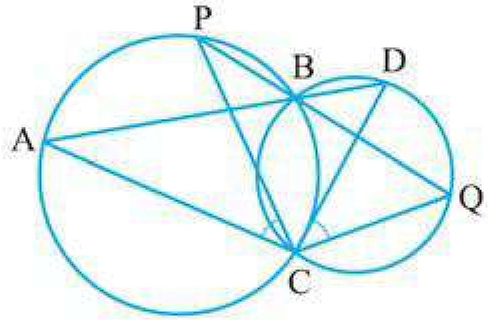
इसलिए, $\angle A + \angle D = 180°$ (अत: आसन्न कोणों का योग)

या $\angle A + \angle C = 180°$ समी० (1)से

अत: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है | **Proved**

Q9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृतों को A, D और P, Q पर क्रमश: प्रतिछेद करते हुए खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠ACP = ∠QCD है |

हल :



सिद्ध करना है : ∠ACP = ∠QCD

प्रमाण :

चाप AP बने कोण ∠ABP तथा ∠ACP हैं |

अत: ∠ABP = ∠ACP .... (1) **[एक ही वृत्त खंड में बने कोण]**

अब, ∠ABP = ∠QBD .... (2) **[शिर्षाभिमुख कोण]**

समीकरण (1) तथा (2) से

∠ACP = ∠QBD .... (3)

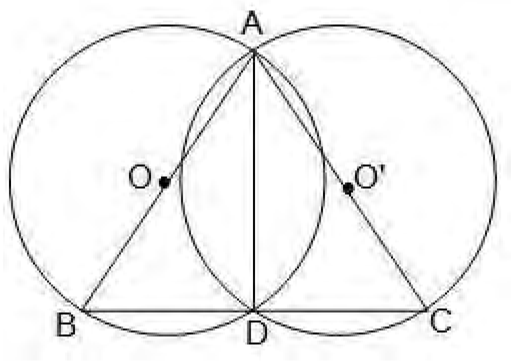
पुन: ∠QCD = ∠QBD .... (4) **[एक ही वृत्त खंड में बने कोण]**

अत: समीकरण (3) तथा (4) से

∠ACP = ∠QCD **Proved**

Q10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

हल :



दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाओं

AB तथा AC को व्यास मानकर O तथा O' वाले

दो वृत्त खिंचा है | उभयनिष्ठ जीवा AD है |

सिद्ध करना है : बिंदु D BC पर स्थित है |

प्रमाण : AB O केंद्र वाले वृत्त का व्यास है |

अत: $\angle ADB = 90°$ .... (1) (अर्धवृत में बना कोण समकोण होता है)

अब, AC O' वाले वृत्त का व्यास है।

अत: $\angle ADC = 90°$ .... (2) (अर्धवृत में बना कोण समकोण होता है)

समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

$\angle ADB + \angle ADC = 90° + 90°$

या $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ [रैखिक युग्म]

अत: BDC एक सरल रेखा है जिसपर बिंदु D स्थित है | **Proved**

$\angle \ \Delta \ \cong$