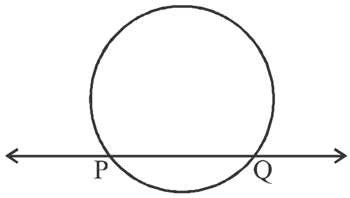
10
अध्याय

वृत्त

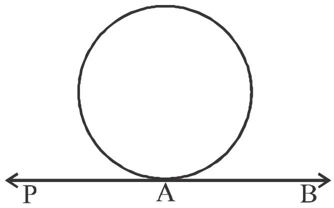
महत्त्वपूर्ण बिंदुः

1. वृत्त उन बिन्दुओं के समूह से बनता है जो एक निश्चित बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है और अचर दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

2. **छेदक रेखा**—यदि कोई रेखा किसी वृत्त को दो अभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो तो वह छेदक रेखा कहलाती है।



3. **वृत की स्पर्श रेखा**—वृत की स्पर्श रेखा वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। जिस बिन्दु पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं।



4. **स्पर्श रेखा की संख्याएं**—किसी वृत पर अंसख्य स्पर्श रेखाएं बनाई जा सकती हैं।

5. **छेदक रेखा की संख्याएं**—किसी वृत्त पर असंख्य छेदक रेखाएं बनाई जा सकती हैं।

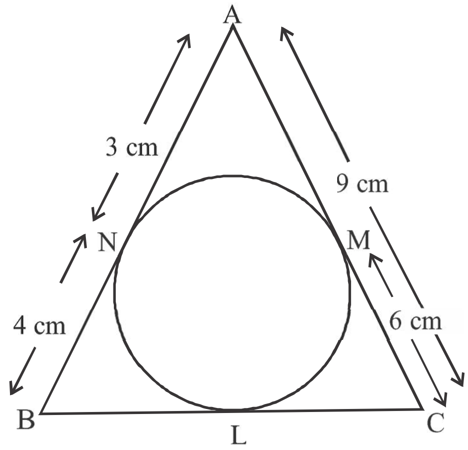
6. निम्न प्रमेय सिद्ध करने के लिए पूछी जा सकती है—

(*i*) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

(*ii*) किसी बाहय बिन्दु से वृत्त पर बनी स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

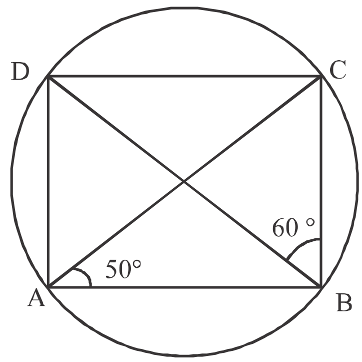
अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिए गए चित्र में BC की लम्बाई ज्ञात करें।

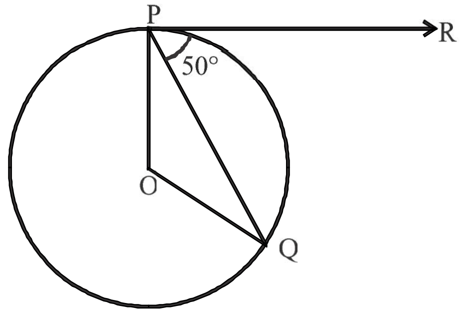


2. यदि बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm है। यदि इस स्पर्श रेखा की केन्द्र से दूरी 25 cm है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।

3. दिए गए चित्र में ABCD एक चतुर्भुज है। यदि $\angle BAC = 50°$, $\angle DBC = 60°$ तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात करें।



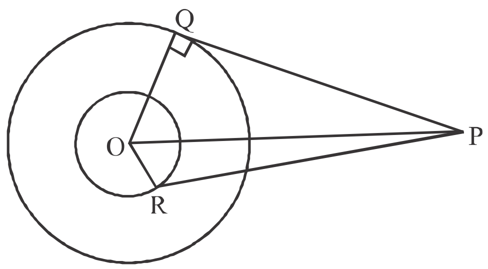
4. दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है, PQ एक जीवा है और स्पर्श रेखा PR बिन्दु P पर 50° का कोण PQ के साथ बनाती है। $\angle POQ$ ज्ञात करें।



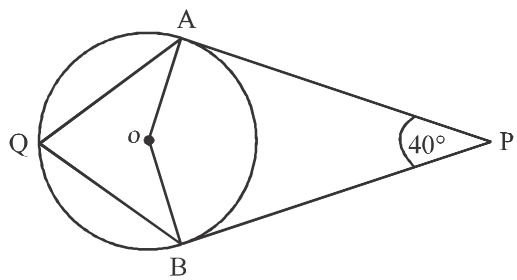
5. यदि दो स्पर्श रेखाऐं, 3 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर इस प्रकार बनाई गई कि उनके बीच का कोण 60° हो तो स्पर्श रेखाओं की लंबाई ज्ञात करें।

6. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएं 4 cm और 5 cm है। एक वृत्त की जीवा की लम्बाई ज्ञात करें जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा हो।

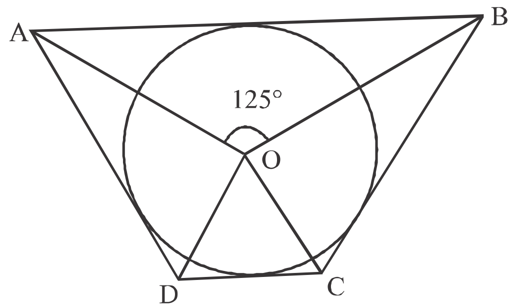
7. दिए गए चित्र में PQ बाह्य वृत्त का और PR अंतः वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं। यदि PQ = 4 cm, OQ = 3 cm और, OR = 2 cm हो तो PR की लम्बाई ज्ञात करें।



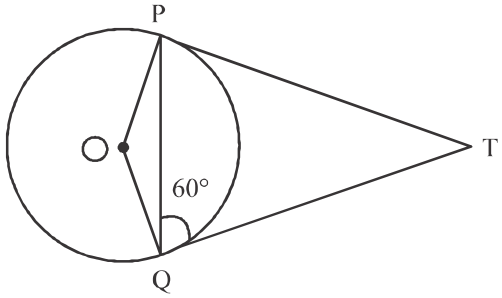
8. दिए गए चित्र में $\angle AQB$ ज्ञात करें।



9. दिए गए चित्र में $\angle ABQ = 125°$ है तो $\angle COD$ ज्ञात करें।



10. यदि TP और TQ बाह्य बिन्दु T से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं हैं और $\angle TQP = 60°$ है तो $\angle OPQ$ ज्ञात करें।



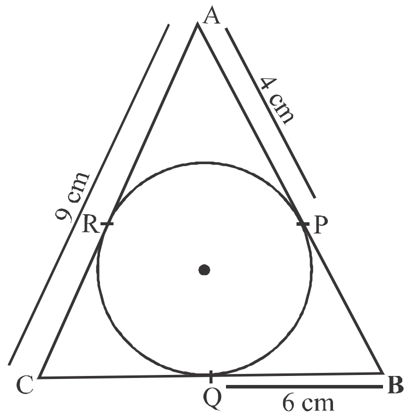
लघु उत्तरीय प्रश्न 1

11. यदि दो संकेन्द्री वृत्तों का व्यास d_1 तथा d_2 हो ($d_1 > d_2$) तथा c वृत्त की जीवा की लम्बाई हो जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा है। सिद्ध करो कि $d_2^2 = c^2 + d_1^2$

12. 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 6 सेमी है। बिन्दु P की वृत्त के निकटतम बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

13. केन्द्र O वाले वृत्त की बाह्य बिन्दु T से स्पर्श रेखाएं TP और TQ हैं। यदि $\angle OPQ = 30°$ हो तो $\angle TQP$ का मान ज्ञात करें।

14. आकृति में AP = 4 cm BQ = 6 cm और AC = 9 cm है। ΔABC का अर्द्ध परिमाप ज्ञात करें।



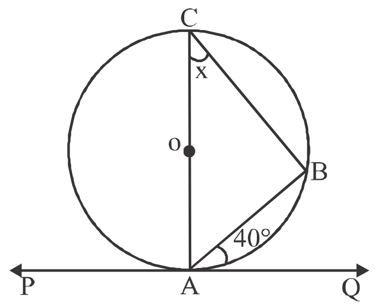
15. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएं a, b तथा c हैं जहां c कर्ण है के अंतर्गत एक वृत्त बना है जो त्रिभुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। यदि वृत्त की त्रिज्या r हो तो सिद्ध कीजिए।

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

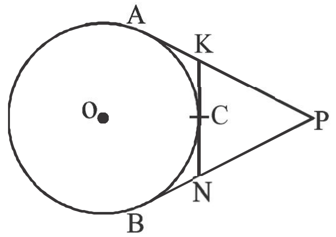
16. सिद्ध करो कि वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से त्रिज्या पर लम्ब होता है।

17. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त पर स्पर्श रेखा होती है स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।

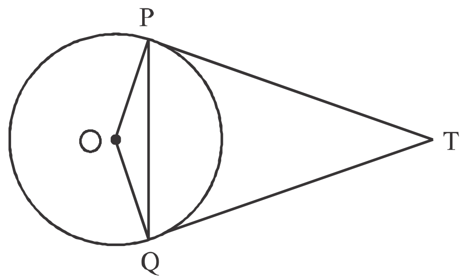
18. आकृति में, AC केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास है और A स्पर्श बिन्दु है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



19. आकृति में, KN, PA और PB, वृत्त पर स्पर्श रेखाएं हैं। सिद्ध कीजिए KN = AK + BN

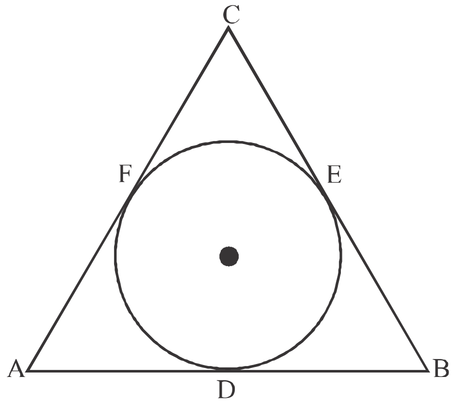


20. आकृति में, जीवा PQ की लम्बाई 6 सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है TP और TQ वृत्त की स्पर्श रेखाएं है। $\angle PTQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



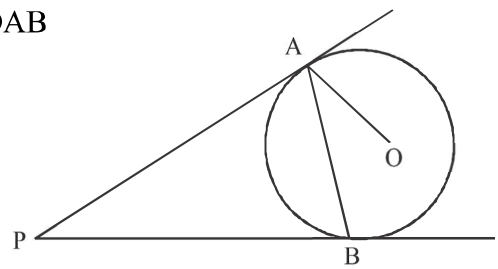
लघु उत्तरीय प्रश्न-II

21. दी गई आकृति में, AB = 12 सेमी, BC = 8 सेमी और AC = 10 सेमी है, तो AD, BE और CF का मान ज्ञात कीजिए।



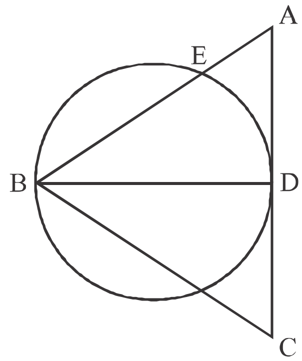
22. समकोण ΔABC की भुजा AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा जाता है। कर्ण AC को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध किजिए PB = PC.

23. बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएं PA तथा PB, O केन्द्र वाले वृत्त पर खींची गई। सिद्ध कीजिए $\angle APB = 2\ \angle OAB$

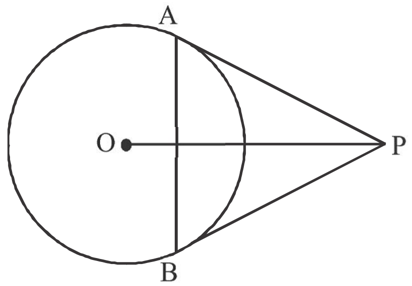


24. 9 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसकी भुजा AB = AC = 6 सेमी, स्थित है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

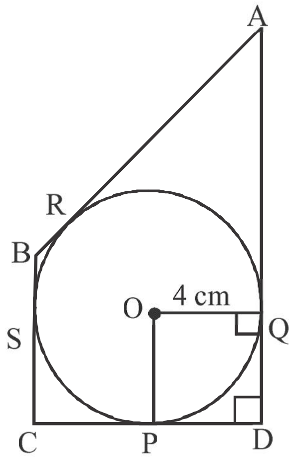
25. आकृति में AB = AC, 'D' AC का मध्य बिन्दु है तथा BD वृत्त का व्यास है तो सिद्ध कीजिए कि $AE = \frac{1}{4} AC$.



26. आकृति में OP वृत्त के व्यास के बराबर है, जहां O वृत्त का केन्द्र है। सिद्ध कीजिए $\angle ABP$ एक समबाहु त्रिभुज है।



27. आकृति में AB = 13 सेमी, BC = 7 सेमी, AD = 15 सेमी। PC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

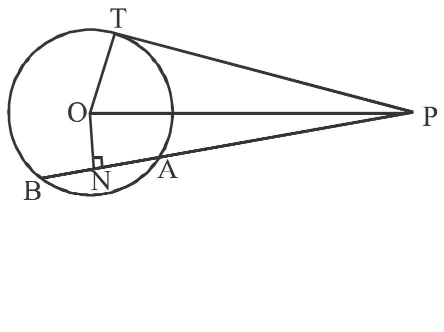


28. आकृति में बाह्य बिन्दु P से एक वृत्त जिसका केन्द्र O है पर स्पर्श रेखा PT तथा छेदक रेखा PAB खींचे गए हैं। ON जीवा AB पर लम्ब हैं। सिद्ध करो कि

(*i*) $PA.PB = PN^2 - AN^2$

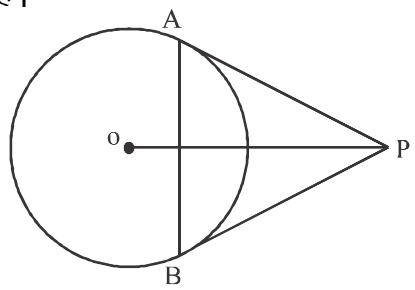
(*ii*) $PN^2 - AN^2 = OP^2 - PT^2$

(*iii*) $PA.PB = PT^2$



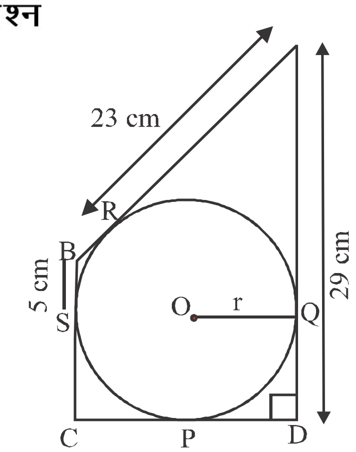
29. केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास AB तथा जीवा AC है तथा $\angle BAC = 30°$।
C पर स्पर्श रेखा AB को आगे बढ़ाने पर D मिलती है। सिद्ध करो कि BC = BD।

30. आकृति में PA और PB केन्द्र 'O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं। सिद्ध कीजिए OP, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

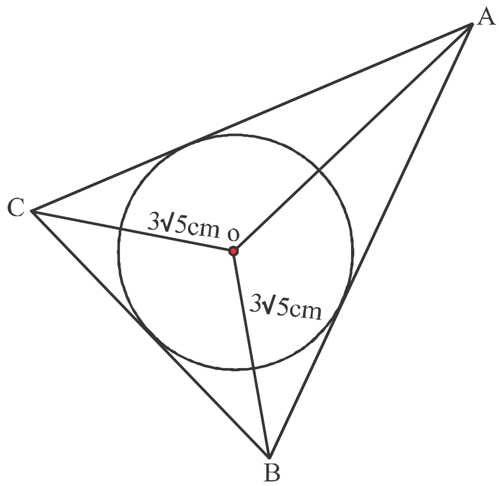


दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. आकृति में वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

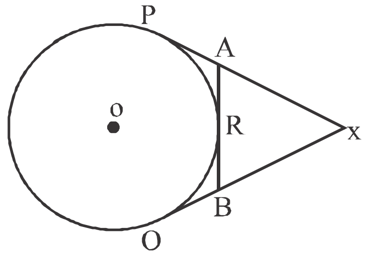


32. आकृति में यदि वृत्त की त्रिज्या 3 हो तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

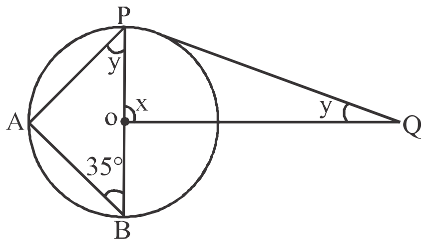


33. एक वृत्त त्रिभुज ABC की भुजा BC को P बिन्दु पर स्पर्श करती है, भुज AB और AC को क्रमशः Q और R बाह्य बिन्दु तक बढ़ाया गया। सिद्ध कीजिए कि AQ, त्रिभुज ABC के परिमाप का आधा है।

34. आकृति में XP और XQ बाह्य बिन्दु X से केन्द्र 'O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा हैं। R वृत्त पर एक बिन्दु है। सिद्ध कीजिए XA + AR = XB + BR.



35. आकृति में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा तथा PB व्यास है। x और y के मान ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

1. 10 सेमी
2. 7 सेमी
3. 70°
4. 100°
5. $3\sqrt{3}$ सेमी
6. 6 सेमी
7. $\sqrt{21}$ सेमी
8. 70°
9. 55°
10. 30°
12. 4 सेमी
13. 60°
14. 15 सेमी
18. 40°
20. 120°
21. AD = 7 सेमी, BE = 5 सेमी
    CF = 3 सेमी
24. $8\sqrt{2}$ वर्ग सेमी
27. 5 सेमी
31. 11 cm
32. 32 cm
35. $x = 35°$, $y = 55°$

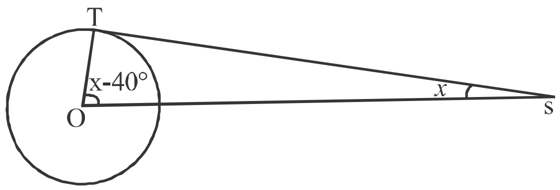
अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

वृत्त

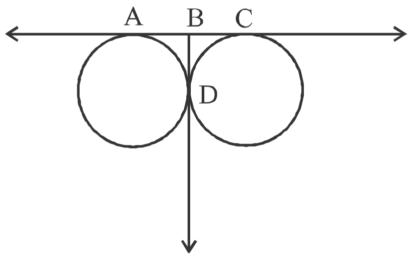
समय : 50 मिनट ***अंक : 20***

खण्ड–अ

1. दिए गए चित्र में x का मान ज्ञात करें। **1**

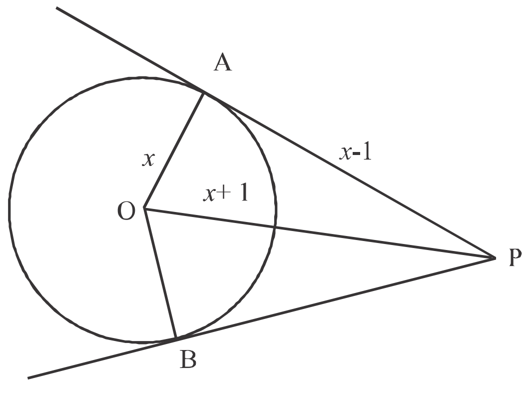


2. दिए गए चित्र में AC = 9 है। BD ज्ञात करें। **1**

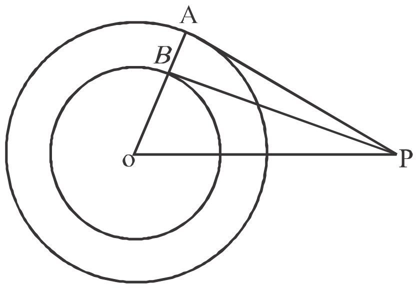


खण्ड–ब

3. x का मान ज्ञात करें। **2**

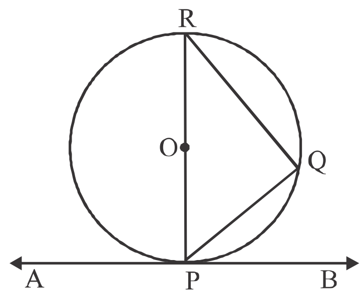


4. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्या 6 cm और 3 cm है। बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएं PA और PB बनाई गई। यदि AP = 10 cm है तो BP ज्ञात करें। **2**

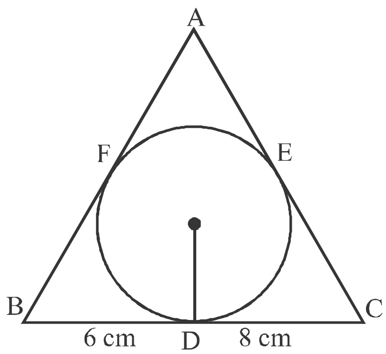


खण्ड–स

5. दिए गए चित्र में सिद्ध करें $\angle BPQ = \angle PRQ$ जहां AB वृत्त की स्पर्श रेखा है। **3**

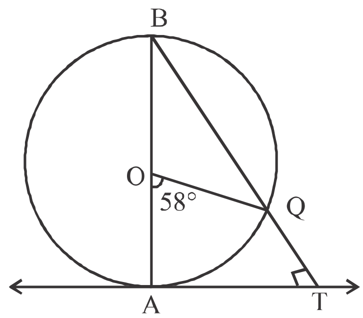


6. एक त्रिभुज ABC के अन्तर्गत बने वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। BD = 6 सेमी DC = 8 सेमी है। यदि ΔABC का क्षेत्रफल 63 वर्ग सेमी हो तो भूजा AB ज्ञात करें। **3**

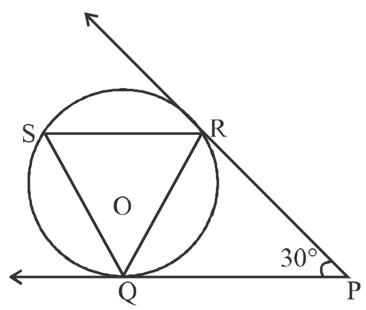


खण्ड–द

7. AB वृत्त का व्यास है। AT उसकी स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AOQ = 58°$ है तो $\angle ATQ$ ज्ञात करें। **4**



8. PQ और PR बाह्य बिन्दु P से खींची गई दो स्पर्श रेखाएं हैं। $\angle RPQ = 30°$ हैं। जीवी RS स्पर्श रेखा PQ के समांतर है। $\angle RQS$ ज्ञात करें **4**



❑❑❑