1

वैदिक गणित
(Vedic Mathematics)

L1HV2E

L1RR42

1.01 प्रस्तावना (Introduction) :

पिछली कक्षा में हम पढ़ चुके हैं कि स्वामी भारतीकृष्णतीर्थ ने श्रृंगेरी मठ में रह कर आठ वर्ष कठोर तपस्या की। साधना की उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होंने वेदग्रन्थों में उल्लेखित गणितीय सूत्रों का अन्तःदर्शन किया और साक्षात्कार की अनुभूति को मंत्रों (सूत्रों) के रूप में प्रकट किया। इन मंत्रों को वैदिक गणितीय सूत्र नाम दिया जो सर्वथा उचित है। वैदिक विद्वानों के अनुसार वेदों के ज्ञान को अपौरूषेय कहते हैं क्योंकि इसे किसी मनुष्य ने विचार कर नहीं बनाया। वेदों का ज्ञान केवल चिन्तन से प्राप्त ज्ञान ही नहीं है वरन यह साधना की उच्चतम अवस्था में होने वाले साक्षात्कार की अनुभूति का मंत्रों के रूप में प्रकटीकरण है। इस परिप्रेक्ष्य में भी स्वामीजी द्वारा स्थापित सूत्र वैदिक गणितीय सूत्र हैं।

1.02 वैदिक गणित का महत्व :

गणितीय समस्याओं का हल ज्ञात करने में जब वैदिक गणितीय सूत्रों का निरन्तर मौखिक अभ्यास किया जाता है तो मानव की एकाग्रता और स्मृति का विकास होता है और उसके चिन्तन–मनन में प्रखरता आती है। वैदिक गणित की सरलता, सरसता और रोचकता के कारण मानव मन में जिज्ञासा का भाव उत्पन्न होता है। जिज्ञासा उसे जागरूक बनाती है तथा शनैः शनैः उसकी अन्तः चेतना जाग्रत होने लगती है। वास्तव में वैदिक गणित इसी अन्तः चेतना के जाग्रत करने की विधा है। यही अन्तः चेतना मानव के व्यक्तित्व और मस्तिष्क के विकास का आधार बनती है।

1.03 मूल संक्रियाओं का अभ्यास एवं विस्तार :

(i) योग संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करने का अभ्यास किया था। अभ्यास में पूर्ण संख्याओं और मापन–इकाई दूरी (किमी – मी.) के प्रश्न लिये थे। वास्तव में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग संक्रिया के सभी प्रकार के प्रश्न किये जा सकते हैं जैसे मापन इकाई मुद्रा (रुपये–पैसे) तौल (किग्रा.–ग्राम), धारिता (लीटर–मि.लीटर), समय (घंटा, मिनट, सैकण्ड), दशमलव भिन्न, पूर्ण संख्या और दूरी (किमी.–मी.–सेमी.) आदि।

टिप्पणी : योग करते समय निम्न बिन्दुओं का ध्यान रखना आवश्यक हैं :

1. स्तम्भ संख्या रचना में मापन इकाई के अनुसार लघु इकाई में भी स्तम्भ संख्या निश्चित होती है। जैसे मापन इकाई मुद्रा में 1 रुपया = 100 पैसे तो लघु इकाई पैसे में दो स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 5 पैसे को स्तम्भ रचना में 05 पैसे लिखा जायेगा। इसी प्रकार 1 किलोमीटर = 1000 मीटर अतः लघुइकाई मीटर में तीन स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 84 मीटर को स्तम्भ रचना में 084 मीटर लिखा जायेगा। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (1): योग कीजिए।

किग्रा	ग्राम
112	065 ↓
360	$\dot{0}\dot{8}5$
$\dot{2}\dot{8}\dot{9}$	$\dot{8}72$
156	345
918	367

संकेत :

(i) 65 ग्राम को 065 ग्राम तथा 85 ग्राम को 085 ग्राम लिखा।

(ii) इकाई स्तम्भ ऊपर से योग प्रारम्भ।

(iii) $5+5=10$ अतः 5 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक चिह्न। शेष $=10-10=0$

(iv) शेष $0+2+5=7$ लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर।

(v) इसी प्रकार आगे करें।

2. स्तम्भ संख्या रचना पूरी करने के बाद सूत्र द्वारा पूर्ण संख्याओं की भाँति योग कर दिया जाता है।
3. मापन इकाई समय (घं., मि., सै.) के प्रश्नों में योग करते हुए मिनट व सैकण्ड के प्रथम स्तम्भ में आधार $=10$ व द्वितीय स्तम्भ में

आधार $=6$ लेना चाहिये। घंटे के स्तम्भों में आधार $=10$ ही लिया जाता है।

(ii) मौखिक योग संक्रिया : (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + शून्यान्त संख्या प्रयोग)

अल्प अभ्यास से उपरोक्त सूत्र–प्रयोग आधारित विधि के द्वारा बड़ी–बड़ी संख्याओं का योग द्रुत गति से मौखिक ज्ञात किया जा सकता है। शून्यान्त संख्या प्रयोग भारतीय प्राचीन गणित की एक विशेष विधि है जो बड़ी सरल तथा योग संक्रिया में प्रभावी है। इस विधि में इकाई–दहाई दो–दो अंकों की संख्याओं का विशेष प्रकार से योग किया जाता है। आवश्यकता पड़ने पर तीन–तीन अंकों (इकाई–दहाई–सैकड़ा) वाली संख्याओं का योग भी किया जा सकता है।

विधि :– दो संख्याओं में से एक संख्या को शून्यान्त बनाइए। इसकी न्यूनता को दूसरी संख्या से पूरा कीजिए। दोनेां नई संख्याओं को जोड़िये। प्राप्त योगफल यदि 100 से अधिक हो तो निश्चित पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये। शेषफल को अगली संख्या में जोड़िये। अन्त में अन्तिम शेषफल को उत्तर के स्थान पर लिखिए। अगले दो स्तम्भों में उपरोक्त क्रिया की आवृत्ति कीजिए। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (2) 35 और 58 को जोड़िये।

हल : 58 को शून्यान्त संख्या 60 बनाने के लिये 2 की आवश्यकता पड़ी। यह 2 की न्यूनता 35 में से पूरी की। अतः $35+58=33+2+58=33+60=93$

उदाहरण (3) 19 और 65 को जोड़िये।

हल : $19+65=19+1+64=20+64=84$

टिप्पणी : इसी प्रकार अनेक संख्याओं को जोड़ा जा सकता है।

उदाहरण (4) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 4998 \\ \dot{0}6\dot{7}89 \\ 5\dot{7}15 \\ \dot{0}4837 \\ \dot{0}8\dot{9}76 \\ \hline 31315 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) $98+89=98+2+87=100+87=187$
अतः 89 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) शेष $87+15=87+3+12=90+12=102$
अतः 15 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $02+37=39$
तथा $39+76=35+4+76=35+80$
$=15+20+80=115$
अतः 76 से पूर्व अंक 9 पर एकाधिक चिह्न तथा 15 नीचे उत्तर में लिखा।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

उदाहरण (5) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 7534 \\ 2459 \\ \dot{0}1\dot{9}32 \\ 6547 \\ \hline 18472 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) $34+59=33+1+59=33+60=93$

(ii) शेष $93+32=93+7+25=100+25=125$
अतः अंक 9 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $25+47=22+3+47=22+50=72$ लिखा उत्तर के स्थान पर।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

(iii) व्यवकलन संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने व्यवकलन संक्रिया की दो वैदिक विधियों का अध्ययन किया था।

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + परम मित्र अंक आधारित विधि

2. सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + परम मित्र अंक आधारित विधि

प्रथम विधि द्वारा व्यवकलन संक्रिया का मापन इकाई अथवा पूर्ण संख्या का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है।

अतः इसी विधि पर पुनः विचार किया जा रहा है। हमें ज्ञात है कि दो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक होते हैं यदि उनका योग दस होता है तथा वियोज्य वह संख्या है कि जिसमें से कोई संख्या घटायी जाती है और घटायी जाने वाली संख्या वियोजक कहलाती है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (6) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{r} 8\,0\,0 \\ -\dot{2}\,\dot{6}\,3 \\ \hline 5\,3\,7 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) 0 में से 3 नहीं घटता अतः 3 के परम मित्र अंक 7 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 7 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक 6 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) 0 में से $\dot{6} = 7$ नहीं घटता अतः 7 के परम मित्र अंक 3 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 3 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक2 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) $8 - \dot{2} = 5$ लिखा नीचे अतः शेषफल $= 537$

उदाहरण (7) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{lll} \text{किमी.} & \text{मी.} & \text{सेमी.} \\ 3\,7 & 4\,6\,7 & 3\,5 \\ \dot{2}\,8 & \dot{3}\,7\,\dot{5} & \dot{4}\,6 \\ \hline 0\,9 & 0\,9\,1 & 8\,9 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) मीटर–सेन्टीमीटर मे स्तम्भ संख्या व्यवस्थित।

(ii) सेमी स्तम्भ : 5 में से 6 नहीं घटता अतः 6 का परममित्र अंक 4 को 5 में जोड़ा।

(iii) योग $= 9$ लिखा नीचे और पूर्व वियोजक अंक 4 पर एकाधिक चिह्न लगाया।

(iv) 3 में से $\dot{4} = 5$ नहीं घटता अतः वियोज्य अंक 3 में 5 जोड़ा।

(v) योग $= 8$ लिखा नीचे तथा पूर्व वियोजक अंक 5 पर लगाया एकाधिक चिह्न।

(vi) $7 - \dot{5} = 1$ लिखा नीचे।

(vii) 6 में से 7 नहीं घटता अतः 6 में 3 जोड़कर योग $= 9$ लिखा नीचे तथा वियोजक अंक 3 पर एकाधिक चिह्न।

(viii) $4 - \dot{3} = 0$ लिखा नीचे।

(ix) आगे की क्रियाएं इसी प्रकार की जायेंगी।

क्रिया पूरी होने पर शेषफल $= 9$ किमी. 91 मी. 89 सेमी.

(iv) गुणन संक्रिया :

गुणन संक्रिया के तीन मुख्य सूत्र आधारित विधियों का हमने पिछली कक्षा में विस्तार से अध्ययन किया था। अब इस कक्षा में सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् से गुणन संक्रिया के किसी भी प्रश्न का हल करना सीखेंगे। इन विधियों पर हमारा इतना अच्छा अभ्यास होना चाहिये कि गुणन संक्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का हम चयन कर सकें।

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम्

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणन का कोई भी प्रश्न अभ्यास के पश्चात् मौखिक हल किया जा सकता है। केवल उत्तर लिखने की सुविधा चाहिये। सूत्र प्रयोग बांयी अथवा दाहिनी दोनों तरफ से किया जा सकता है।

(क) अर्थ :

सूत्र दो शब्दों से बना है 'ऊर्ध्व' तथा 'तिर्यक'। ऊर्ध्व का अर्थ है 'ठीक ऊपर' या 'सीधा' या 'खड़ा'। इसका संकेत $\uparrow$ या $\updownarrow$ है और इसकी क्रिया ''ऊपर नीचे लिखे अंको का गुणन'' है। शब्द तिर्यक का अर्थ 'तिरछा' है। इसका संकेत $\nearrow$ या $\nwarrow$ या $\nwarrow\!\!\!\!\nearrow$ है और इसकी क्रिया 'तिरछे लिखे अंको का गुणन' है।

(ख) अनुप्रयोग

(i) गुणन संक्रिया

विधि : प्रश्न में दिये हुए अंको से सर्वप्रथमसमूह रचना की जाती है। किसी संख्या में यदि कुछ अंक कम हो तो उससे पहले उतने ही शून्य लगा कर दोनों संख्याओं की अंक संख्या समान कर लीजिए। इन स्तम्भों से समूह रचना की जाती है।

$$\boxed{\text{समूह संख्या} = \text{स्तम्भ संख्या} \times 2 - 1 = \text{विषम संख्या}}$$

इन समूहों में संकेत लगा कर, संकेतानुसार गुणा किया जाता है। अंत में समूहसः गुणनफलों को एक विशेष पद्वति से उनके क्रमानुसार लिख कर जोड़ दिया जाता है। यही अभीष्ट गुणनफल है।

टिप्पणी : किसी भी समूह में संकेतों की कुल संख्या उसके स्तम्भ संख्या के समान होती है। ये सभी संकेत एक उभयनिष्ठ बिन्दु से निकलते हैं। समस्थान पर बने समूह में सभी संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। विषय स्थान पर स्थित में समूह में ऊर्ध्व संकेत केवल एक ही होता है जो प्रथम तथा अन्तिम समूह में लगता है अथवा किसी समूह के मध्य स्तम्भ में लगता है। शेष संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। मध्य समूह सबसे बड़ा और प्रश्न के समान होता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

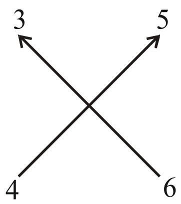
उदाहरण (8): निम्न समूहों में संकेत लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1)

$= 6 \times 9$
$= 54$

ऊर्ध्व

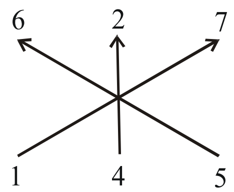
(2)



$= 6 \times 3 + 4 \times 5$
$= 38$

तिर्यक जोड़ा

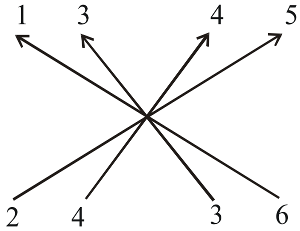
(3)



$= 5 \times 6 + 1 \times 7 + 4 \times 2$
$= 45$

तिर्यक जोड़ा + ऊर्ध्व

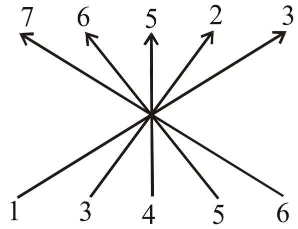
(4)



$= (6 \times 1 + 2 \times 5)$
$+ (4 \times 4 + 3 \times 3)$
$= 41$

दो तिर्यक जोड़े

(5)



$= (6 \times 7 + 1 \times 3)$
$+ (5 \times 6 + 3 \times 2)$
$+ 4 \times 5$
$= 101$

दो तिर्यक जोड़े + ऊर्ध्व

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यक से गुणा कीजिए।

समूह बनेंगे = 5

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 4 & 7 \\ \times & 0 & 2 & 8 \\ \hline =0 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ & 1 & 4 & 5 \\ \hline = & 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

V	IV	III	II	I
1	14	147	47	7
↑	✕	✕	✕	↑
0	02	028	28	8
= 0	= 2	= 16	= 46	= 56

उपरोक्त, पाँचों गुणनफलों का योग निम्न प्रकार किया जाता है।

(i) 56 के 6 को प्रथम पंक्ति में इकाई स्थान पर तथा 5 को II पंक्ति के दहाई स्थान पर लिखे।

(ii) 46 के 6 को प्रथम पंक्ति में दहाई स्थान पर तथा 4 को II पंक्ति में सेंकड़ें के स्थान पर लिखे।

(iii) इसी प्रकार 16, 2, 0 को I पंक्ति तथा II पंक्ति में दर्शाये अनुसार संख्या समायोजित कर सब पदों का योग करे।

टिप्पणी : इन विधियों पर हमारा इतना अच्छा अभ्यास होना चाहिये कि गुणन संक्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का हम चयन कर सकें।

देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (9) 588×512 का सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

प्रथम हल : इस गुणन संक्रिया में क्या सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण श्रेष्ठ सूत्र हो सकता है?

इकाई–दहाई वाले अंकों का योग $= 88+12=100$ तथा शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 5 अतः सूत्र प्रभावी। सूत्रानुसार

$$588\times512 = 5\times6/88\times12 \quad \text{(दाहिने पक्ष में चार अंक)}$$
$$= 301056$$

द्वितीय हल : गुणन संक्रिया में सूत्र निखिलम्–उपाधार का परीक्षण

$$\begin{array}{l} 588\times512 \\ = \;\; 588 \quad +88 \\ \quad \times512 \quad +12 \\ \hline = 5(588+12)/88\times12 \\ = 5\times600/_{10}56 \\ = 3000/_{10}56 = 301056 \end{array}$$

संकेत :

(i) आधार = 100

(ii) उपाधार = 100×5

(iii) उपाधार अंक = 5

(iv) विचलन = +88 तथा +12

(v) दक्षिण पक्ष में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी।

तृतीय हल : 588×512 में सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण प्रभावी ही नहीं है क्योंकि दोनों संख्याओं में एक संख्या 9 अंक वाली नहीं है।

चतुर्थ हल : 588×512 का गुणनफल सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 5\,8\,8 \\ \times\,5\,1\,2 \\ \hline 2\,5\,5\,8\,4\,6 \\ 4\,5\,2\,1\;\; \\ \hline =3\,0\,1\,0\,5\,6 \end{array}$$

प्रश्न में तीन स्तम्भ हैं। अतः पांच समूह बनेंगे अर्थात् पांच गुणनफल ज्ञात कर विशेष पद्धति से लिखकर, उन्हें जोड़ा जायेगा।

परिणाम 1. प्रथम, द्वितीय तथा चतुर्थ हल देखने पर एक बात निश्चित है कि $588\times512=301056$.

2. प्रथम हल में उत्तर सरलता से ज्ञात हुआ अतः इस प्रश्न में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का चयन श्रेष्ठ रहेगा।

उदाहरण (10). 842×858 में सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

हल : (i) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण प्रभावी नहीं है क्योंकि गुणनफल के दाहिने पक्ष में 42×58 का गुणन सरलता से ज्ञात नहीं हो सकता।

(ii) सूत्र निखिलम् आधार भी प्रभावी नहीं हो सकता क्योंकि आधार = 1000 मानने पर विचलन क्रमशः -158 तथा -142 आते हैं। निखिलम्–उपाधार भी प्रभावी नहीं है क्योंकि उपाधार = 800 मानने पर भी विचलन क्रमशः 42 और 58 आते हैं।

(iii) सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण भी प्रभावी नहीं है।

(iv) सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक गुणन संक्रिया के लिये व्यापक एवं प्रभावी सूत्र है। अंक बड़े होने के कारण गणना कठिन हो सकती है अतः नया विकल्प विचारणीय है।

(v) **नया विकल्प :** 842×858 का गुणनफल ज्ञात करने के लिये प्रारम्भ में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का प्रयोग तथा बाद में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक का प्रयोग श्रेष्ठ रहेगा।

842×858
$=8\times9/42\times58$
$=72/2436$
$=722436$

संकेत :
सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक से मौखिक

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times58 \\ \hline 2436 \\ \hline \end{array}$$

1.04 वर्ग संक्रिया : (सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार–उपाधार आधारित विधियों द्वारा दो संख्याओं का गुणन हम सीख चुके हैं। जब दोनों संख्याएँ परस्पर समान हो तो यही वर्ग संक्रिया है। निम्न विधियों द्वारा संख्याओं का वर्ग ज्ञात किया जा रहा है।

आधार विधि : सूत्रः– (संख्या)^2 = संख्या + विचलन / (विचलन)^2

1. $17^2=17\times17,$ आधार $=10,$ विचलन $=+7$

निखिलम आधार विधि

$=17+7$
$\;\;17+7$

$17+7/49$
$=24/_{4}9=289$

अथवा

सूत्र विधि

$17^2=17+7/7^2$
$=24/_{4}9$
$=289$

2. $98^2=98\times98,$ आधार $=100,$ विचलन $=-02$

$=98-02/(-02)^2$
$=9604$

3. $104^2=104+04/(04)^2$
$=10816$

4. $115^2=115+15/15^2$
$=130/_{2}25$
$=13225$

उपाधार विधि : सूत्रः– $(\text{संख्या})^2=$ उपाधार अंक $(\text{संख्या}+\text{विचलन})/(\text{विचलन})^2$

5. $23^2=23\times23,$ आधार $=10,$ उपाधार $=10\times2,$ विचलन $=+3$

निखिलम उपाधार विधि अथवा सूत्रविधि–

संख्या विचलन

$=23\;\;+3$
$\;\;23\;\;+3$

$23^2=2(23+3)/3^2=529$

$= 2(23+3)/3^2$

$= 529$

6. 64^2, आधार $=10$, उपाधार $=10\times6$, विचलन $=+04$

$= 6(64+4)/4^2$

$= 408/_1 6$

$= 4096$

7. 308^2, आधार $=100$, उपाधार $=100\times3$, विचलन $=+08$

$= 3(308+08)/(08)^2$

$= 94864$

1.05 घनफल :

(सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार आधारित विधियों द्वारा तीन संख्याओं का गुणन हम पढ़ चुके हैं। तीनों संख्याएँ परस्पर समान होने पर उपर्युक्त विधियों द्वारा घनफल ज्ञात किया जा सकता है।

आधार विधि :

सूत्र : घनफल = संख्या $+ 2\times$ विचलन $/ 3\times(\text{विचलन})^2 / (\text{विचलन})^3$

1. 12^3, आधार $=10$, विचलन $=+2$

$= 12+2\times(2) / 3\times(2)^2 / (2)^3$

$= 16 / 12 / 8 = 1728$

2. 105^3, आधार $=100$, विचलन $=+05$

$= 105+2\times(05) / 3\times(05)^2 / (05)^3$

$= 115 / 75 /_1 25 = 1157625$

3. 98^3, आधार $=100$, विचलन $=-02$

$= 98+2\times(-02) / 3\times(-02)^2 / (-02)^3$

$= 94 / 12 / -08$

$= 94\,11\,92$

उपाधार विधि :

सूत्र : घनफल $= (\text{उपाधार अंक})^2$ (संख्या $+ 2\times$ विचलन) $/$ उपाधार अंक $\times 3\times(\text{विचलन})^2 / (\text{विचलन})^3$

4. 35^3 आधार $=10$, उपाधार अंक $=3$, विचलन $=5$

$= 3^2(35+2\times5) / 3\times3\times(5)^2 / 5^3$

$=9\times 45 \,/\, 9\times 25 \,/\, 125$

$=405 \,/_{22}\, 5 \,/_{12}\, 5 = 42875$

5. 497^3

$=5^2\{497+2\times(-03)\} \,/\, 5\times 3\times(-03)^2 \,/\, (-03)^3$

$=25\times 491 \,/\, 5\times 27 \,/\, -27$

$=12275 \,/_{1}\, 35 \,/\, (-27)$

$=12276 \,/\, 34 \,/\, 100-27$

$=122763473$

1.06 भाग संक्रिया

इस कक्षा में हम निम्न तीन सूत्रों पर आधारित भाग की विधियों का अध्ययन करेंगे।

1. सूत्र निखिलम्
2. सूत्र परावर्त्य योजयेत्
3. सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक

जब भाजक में 5 से बड़े अंक होते हैं तथा आधार = 10 या 10 की घात (उपाधार नहीं) के सापेक्ष भाजक की पूरक संख्या ज्ञात हो सकती है, तब ही सूत्र निखिलम् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। इस विधि में मुख्य क्रिया भाजक की पूरक संख्या द्वारा ही होती है। यदि भाजक में 5 से छोटे अंक होते हैं अथवा लाये जा सकते हैं तथा बांयी ओर से भी अंक 1 होता है अथवा लाया जा सकता है और आधार = 10 या 10 की घात (उपाघार नहीं) के सापेक्ष भाजक का विचलन ज्ञात किया जा सकता है, तब ही सूत्र परावर्त्य योजयेत् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। तीनों विधियों में से केवल यही भाग की विधि बीजगणित में प्रयोग में लायी जाती है। सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित ध्वजांक विधि द्वारा भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है। इस विधि में किसी भी भाजक के मुख्यांक तथा ध्वजांक का चयन बड़ा महत्वपूर्ण है। ध्वजांक कितने भी अंकों का हो सकता है। मुख्यांक में भी अनेक अंक हो सकते हैं यदि उसका भाग भाज्य–संशोधित भाज्य में सरलता से जाता है। ध्वजांक में जितने अंक हैउतने ही इकाई की तरफ से भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में रखे जाने चाहिये। निम्न उदाहरणों से इन विधियों को स्पष्ट किया जा रहा है।

सूत्र निखिलम् :

जब भाजक में प्रत्येक अंक 5 से बड़ा हो तो सूत्र निखिलम् आधारित विधि बड़ी सुविधाजनक रहती है।

प्रश्न लिखने की विधि

दो खड़ी रेखाएँ खींचकर निर्धारित स्थान के तीन खण्ड बनाइये। बांयी ओर से प्रथम खण्ड में भाजक और उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए। आधार में जितने शून्य हैं, भाज्य के इतने ही अंक इकाई अंक की तरफ से तीसरे खण्ड में लिखिए। भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिए।

निखिलम् विधि :

बांयी ओर से भाज्य के प्रथम अंक को नीचे योगफल के स्थान पर लिखिए। पूरक संख्या से इस अंक का गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अंक के नीचे लिखिए। पूरक संख्या में दो अंक हों तो गुणनफल को तीसरे अंक्के नीचे भी लिखिए। केवल दूसरे स्थान के नीचे ऊपर के अंकों को जोड़िये और योगफल के स्थान पर लिखिए। अभी तीसरे स्थान केअंकों को नहीं जोड़ना है। योग मे ंलिखे दूसरे अंक का फिर पूरक संख्या से गुणा कर गुणनफल को भाज्य के तीसरे अंक के नीचे लिखिए और जोड़िये। इस प्रक्रिया की आवृत्ति करते रहिये जब तक कि गुणनफल के अंक तृतीय खण्ड के इकाई अंक के नीचे तक न लिख जाये। अन्त में फिर जोड़िये।

मध्य खण्ड का नीचे लिखा योगफल = भागफल

तथा तृतीय खण्ड के नीचे लिखा योगफल = शेषफल होता है।

यदि प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटाकर संशोधित भागफल आर शेषफल प्राप्त कीजिए। विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण (11) : (i) $311 \div 8$, आधार $=10$

खण्ड		
प्रथम	मध्य	तृतीय
8	3 1	1
2	6	–
		14
	3 7	15
	+1	–8
	3 8	7

संकेत

(i) भागफल $=37$, शेषफल $=15$

(ii) शेषफल $>$ भाजक

अतः संशोधन आवश्यक।

संशोधित भागफल $=38$

संशोधित शेषफल $=7$

(ii) $10025 \div 88$, आधार $=100$

8 8	1 0 0	2 5
1 2	1 2	– –
	1	2 –
		3 6
	1 1 3	8 1

संकेत

(i) पूरक संख्या $= 100 - 88 = 12$

(ii) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखा $1 \times 12 = 2$ के अंक मध्य खण्ड में आगे के अंकों के नीचे दर्शाये अनुसार लिखें

(iii) $0 + 1 = 1$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(iv) $1 \times 12 = 12$ मध्य एवं तृतीय खण्ड में दर्शायें अनुसार लिखे।

(v) $0 + 2 + 1 = 3$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(vi) $3 \times 12 = 36$ दर्शायें अनुसार लिखे

(vii) योग करें

(viii) भागफल $= 113$

(ix) शेषफल $= 81$

सूत्र परावर्त्य योजयेत्

सूत्र का प्रयोग अनेक क्षेत्रों में होता है जैसे समीकरणों का हल, जादू के वर्गों की रचना आदि।

(क) अर्थ :

सूत्र परावर्त्य योजयेत् का अर्थ है ''पक्षान्तरण कर उपयोग करें'' अथवा ''विलोम संक्रिया का प्रयोग करें''। जैसे पक्षान्तरण होते ही चिह्न $(+)$ का $(-)$, $(-)$ का $(+)$, $(\times)$ का $(\div)$, तथा $(\div)$ का $(\times)$ चिह्न हो जाता है। इसी प्रकार जादू के वर्ग में अन्तिम पंक्ति अथवा स्तम्भ में अंक रचना के बाद पुनः पहली पंक्ति या स्तम्भ में अंक रचना प्रारम्भ हो जाती है।

(ख) अनुप्रयोग :

भाग संक्रिया :

जब भाजक आधार =10 या 10 की घात के निकट होता है तथा उसका पहला अंक 1 होता है तो परावर्त्य योजयेत् सूत्र आधारित भाग संक्रिया सुविधाजनक होती है। जब भाजक का पहला 1 अंक नहीं होता परन्तु उसे 1 में समायोजित किया जा सकता है तब भी यह विधि प्रभावी है।

विधि :

(1) भाजक में से उसके निकटतम आधार को घटा कर विचलन ज्ञात कीजिए। विचलन में यदि 5 से बड़े अंक हों तो उन्हे विनकुलम प्रयोग से छोटे अंको में बदल दीजिए। अब विचलन के प्रत्येक अंक का चिह्न बदल दीजिए।

(2) (i) भाग संक्रिया के निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करें।

(ii) बांयी ओर से पहले खण्ड में भाजक, उसके नीचे विचलन तथा विचलन के नीचे उसके परिवर्तित अंक लिखे। अभ्यास होने पर परिवर्तित अंक सीधे भाजक के नीचे लिखे जा सकते हैं।

(iii) विचलन अंक संख्या अथवा आधार की शून्य अंक संख्या केसमान भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखें।

(iv) आगे की क्रिया निखिलम् विधि के समान है।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण (12) :

(1) $1358 \div 113$, आधार $= 100$

	प्रथम खण			मध्य खण		तृतीय खण	
भाजक =	1	1	3	1	3	5	8
विचलन =		1	3		−1	−3	−
परिवर्तित अंक =		−1	−3			−2	−6
				1	2	0	2

संकेत : (i) मध्य खण्ड का 1 लिखा नीचे योग के स्थान पर।

(ii) यह अंक $1\times$ परिवर्तित अंक $1-3$ लिखे 3 व 5 के नीचे।

(iii) $3-1=2$ पुनः गुणनफल $-2-6$ लिखे 5 व 8 के नीचे।

योग करने पर भागफल $= 12$, शेषफल $= 02$

(2) $395166 \div 1321$, आधार $= 1000$

	1	3	2	1	3	9	5	1	6	6
परिवर्तित अंक =		$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$		$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	−	−
							0	0	0	−
								3	2	1
					3	0	$\bar{1}$	1	8	7

भागफल $30\bar{1} = 299$

शेषफल $= 187$

ध्वजांक विधि

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् आधारित सर्व व्यापक विधि द्वारा भाग संक्रिया का कोई भी बड़े से बड़ा प्रश्न न्यूनतम गणनाओं से हल किया जा सकता है। भाजक को सुविधानुसार दो भागों में विभाजित किया जाता है। मुख्यांक तथा ध्वजांक।

अर्थ :

(i) ध्वजांक : भाजक के इकाई अंक अथवा इकाई युक्त कई अंक जो घातांक के स्थान पर लिखे जाते हैं ध्वजांक कहलाते है।

(ii) मुख्यांक : भाजक का शेषफल जो आधार स्थान पर लिखा जाता है और वास्तविक भाग संक्रिया सम्पन्न करता है मुख्यांक कहलाता है।

विधि :

(1) भाग संक्रिया के स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करना

(2) प्रथम खण्ड में आधार स्थान पर मुख्यांक तथा घातांक स्थान पर ध्वजांक लिखना।

(3) ध्वजांक अंक संख्या के समान भाज्य के उतने ही अंक (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में लिखना।

शेष विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (13) :

(1) $23754 \div 74$ (ध्वजांक विधि)

	4	2	3	7	5	4
7			2	1		0
		3	2	1		$4-1\times4=0$

संकेत :

(i) $23 \div 7$, भागफल अंक$_1 = 3$, लिखा क्षितिज रेखा के नीचे तथा शेषफल $= 2$ लिखा 7 से पहले और नीचे।

(ii) नया भाज्य $= 27$,

संशोधित भाज्य = नया भाज्य − भागफल अंक × ध्वजांक
$= 27 - 3 \times 4 = 15$

(iii) $15 \div 7$, भागफल अंक $_2 = 2$, शेषफल $= 1$ संकेत (i) के अनुसार लिखे।

(iv) संशोधित भाज्य $= 15 - 2 \times 4 = 7$

(v) $7 \div 7$, भागफल अंक$_3 = 1$, शेषफल $= 0$ लिखे व्यवस्था अनुसार।

(vi) अन्तिम शेषफल $= 04 - 1 \times 4 = 0$ [तृतीय खण्ड आने पर]

$\therefore$ भागफल $= 321$, शेषफल $= 0$

(2) $21112 \div 812$ (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{c|ccc|l} 1\,2 & 2 & 1 & 1 & 1\,2 \\ 8 & & 5 & & 1 \\ \hline & 2 & 6 & & 112 - 100 - 12 = 0 \end{array}$$

संकेत :

(i) $21 \div 8$, भागफल अंक$_1 = 2$, शेषफल $= 5$

(ii) नया भाज्य $= 51$, संशोधित भाज्य $= 51 - 2 \times 1 = 49$

(iii) $49 \div 8$, भागफल अंक $_2 = 6$, शेषफल $= 1$

(iv) संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$= 112 - (6 \times 1 + 2 \times 2)10 - 6 \times 2$
$= 112 - 100 - 12 = 0$

अतः भागफल $= 26$, शेषफल $= 0$

टिप्पणी : (1) ध्वजांक 1 2 / भागफल 2 6 से बने तीन समूह

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1\,2 & 2 \\ 2 & 2\,6 & 6 \\ 1 \times 2 & (6 \times 1 + 2 \times 2) & 6 \times 2 \\ = 2 & = 10 & = 12 \end{array}$$

(2) (i) प्रथम समूह का गुणनफल $= 2$ जो 51 में से घटाया गया है।

(ii) मध्य समूह का गुणनफल $= 10 \times 10 = 100$ घटाया गया 112 में से।

(iii) तृतीय समूह का गुणनफल $= 12$ भी घटाया गया 112 में से।

उदाहरण (14) $98765 \div 87$ (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{c|cccc|l} 7 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & & 1 & 3 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 5 & 5 - 5 \times 7 = 20 \end{array}$$

संकेत :

(i) भाजक $= 87$, मुख्यांक $= 8$, ध्वजांक $= 7$

(ii) तृतीय खण्ड में भाज्य का एक अंक $= 5$

(iii) $9 \div 8$, भागफल प्रथम अंक $= 1$, शेषफल $= 1$

(iv) नयाभाज्य $= 18$, संशोधित भाज्य $= 18 - 1 \times 7 = 11$

(v) $11 \div 8$, भागफल द्वितीय अंक $= 1$, शेषफल $= 3$

(vi) नयाभाज्य = 37, संशोधित भाज्य $= 37 - 1 \times 7 = 30$

(vii) $30 \div 8$, भागफल तृतीय अंक = 3, शेषफल = 6

(viii) नया भाज्य 66, संशोधित भाज्य $= 66 - 3\times 7 = 45$

(ix) $45 \div 8$, भागफल चतुर्थ अंक = 5, शेषफल = 5

(x) नया भाज्य 55,

संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल $= 55 - 5\times 7 = 20$

$\therefore$ भागफल = 1135, शेषफल = 20

उदाहरण (15) $13579 \div 975$ (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{r|rr|l} 75 & 13 & 5 & \;\;79 \\ 9 & & 4 & 11 \\ \hline & 1 & 3 & 1179-260-15=904 \end{array}$$

संकेत : (i) $13 \div 9$, भागफल प्रथम अंक = 1, शेषफल = 4

(ii) नया भाज्य = 45, संशोधित भाज्य $= 45 - 1\times 7 = 38$

(iii) $38 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक $= 4$, शेषफल $= 2$

(iv) नया भाज्य = 27,

संशोधित भाज्य $= 27 - (4\times 7 + 1\times 5) = 27 - 33 = -6$

क्योंकि संशोधित भाज्य ऋणात्मक आया है अतः भागफल द्वितीय अंक 4 न लेकर 3 लेना सुविधाजनक रहेगा। इसी कारण क्रिया पद (iii) एवं (iv) निरस्त करने योग्य है।

(v) पुनः $38 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 11

(vi) नया भाज्य $= 1179$ अतः संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$= 1179 - (3\times 7 + 1\times 5)\times 10 - 3\times 5 = 1179 - 260 - 15 = 904$

अतः भागफल = 13, शेषफल = 904

उदाहरण (16) $21015 \div 879$ (ध्वजांक विधि)

भाजक = 879, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 79

क्योंकि ध्वजांक में बड़े अंक हैं भाग की गणना कठिन हो जायेगी अतः भाजक 879 को विनकुलम (निखिलम्) विधि से छोटे अंकों में बदला।

$879 = \dot{8}\bar{2}\bar{1} = 9\bar{2}\bar{1}$

अब मुख्यांक = 9 तथा ध्वजांक = $\bar{2}\bar{1}$

$$\begin{array}{r|rr|l} \bar{2}\bar{1} & 21 & 0 & \;\;15 \\ 9 & & 3 & 7 \\ \hline & 2 & 3 & 715+80+3=798 \end{array}$$

संकेत :

(i) $21 \div 9$, भागफल प्रथम अंक = 2, शेषफल = 3

(ii) नया भाज्य = 30, संशोधित भाज्य $= 30 - 2\times \bar{2} = 34$

(iii) $34 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 7

(iv) नया भाज्य = 715, संशोधित भाज्य अथवा

अन्तिम शेषफल $= 715 - (3\times\bar{2} + 2\times\bar{1})10 - 3\times\bar{1}$

$= 715 + 80 + 3 = 798$

अतः भागफल = 23, शेषफल = 798

उदाहरण (17) $7453 \div 79$

$$
\begin{array}{r|cc|l}
\bar{1} & 74 & 5 & 3 \\
8 & & 2 & 2 \\
\hline
 & 9 & 4 & 23+4=27
\end{array}
$$

संकेत :

(i) भाजक $79 = 8\bar{1}$, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = $\bar{1}$

(ii) $74 \div 8$, भागफल प्रथम अंक = 9, शेषफल = 2

(iii) नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य $= 25 + 9 = 34$

(iv) $34 \div 8$, भागफल द्वितीय अंक = 4, शेषफल = 2

(v) नया भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल $= 23 + 4 = 27$

भागफल = 94, शेषफल = 27

टिप्पणी :1. क्रिया पद (iii) देखिए।

नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य $= 25 - 9 \times \bar{1} = 25 + 9 = 34$

= नया भाज्य + पिछला भागफल अंक

2. जिसभी भाजक में इकाई अंक 9 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य + पिछला भागफल अंक लिया जा सकता है। मुख्यांक के चयन में सावधानी रखना आवश्यक है।
3. जिस भाजक में इकाई अंक 1 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य – पिछला भागफल अंक लिया जाता है।
4. उपरोक्त दोनों प्रकार के प्रश्नों में संकेत लिखने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण (18) $43758972 \div 81$

मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 1

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
1 & 43 & 7 & 5 & 8 & 9 & 7 & 2 \\
8 & & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
\hline
 & 5 & 40 & 2 & & 3 & 4 & 22-4=18
\end{array}
$$

भागफल = 540234 शेषफल = 18

1.07 बीजगणित

सरल समीकरणों का हल (वैदिक पद्धति)

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् एवं सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये द्वारा सरल समीकरणों का हल अति शीघ्र ज्ञात किया जा सकता है। इन सूत्रों के अनुप्रयोग बहुत छोटे, सरल एवं मानसिक गणना पर आधारित है।

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् :–

सूत्र का अर्थ है ''पक्षांतरण तथा समायोजन''। स्वामी भारतीकृष्ण जी तीर्थ ने इस सूत्र के अन्तर्गत चार अनुप्रयोगों की चर्चा की है। ये सभी अनुप्रयोग एक पंक्ति में मौखिक उत्तर देने वाले हैं।

प्रथम अनुप्रयोग :–

यदि $ax + b = cx + d$ हो तो $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ (बीजीय सूत्र)

द्वितीय अनुप्रयोग :–

यदि $\dfrac{ax+b}{p} = \dfrac{cx+d}{q}$ हो तो $x = \dfrac{dp-bq}{aq-cp}$ (बीजीय सूत्र)

तृतीय अनुप्रयोग :—

यदि $(x+a)(x+b)=(x+c)(x+d)$ हो तो

$$x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d} \text{ (बीजीय सूत्र)}$$

उदाहरण (19) :— समीकरण सरल कीजिए।

$$(x+1)(x+2)=(x-3)(x-4)$$

हल :— बीजीय सूत्र द्वारा $x=\dfrac{12-2}{1+2+3+4}=\dfrac{10}{10}=1$

चतुर्थ अनुप्रयोग :—

यदि $\dfrac{m}{x+a}+\dfrac{n}{x+b}=0$ तो $x=-\dfrac{mb+na}{m+n}$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण (20):— समीकरण $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{3}{x+5}=0$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=-\dfrac{(20+6)}{4+3}=-\dfrac{26}{7}$

सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये :—

सूत्र का अर्थ है ''समुच्चय परस्पर समान होने पर शून्य होता है।'' इस सूत्र के अन्तर्गत छः अनुप्रयोगों की चर्चा की जा रही है।

सूत्र का प्रथम अर्थ एवं अनुप्रयोग :—

यदि समीकरण के प्रत्येक पद में x एक सर्वनिष्ठ खण्ड है तो $x=0$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण (21). समीकरण $12x+3x=4x+5x$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=0$

उदाहरण (22). समीकरण $2(x+1)=7(x+1)$ को सरल कीजिए।

हल : प्रत्येक पद में $x+1$ एक उभयनिष्ठ खण्ड है अतः $x+1=0$

$\therefore \quad x=-1$

सूत्र का द्वितीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :—

एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान हो तो चर राशि का मान शून्य होता है।

उदाहरण (23). $(x+3)+(2x+5)+4=2(x+6)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=12$ अतः $x=0$

उदाहरण (24). $(x+1)(x+9)=(x+3)(x+3)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=9$ अतः $x=0$

सूत्र का तृतीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :—

यदि समीकरण में दो भिन्नों के अंश परस्पर समान हों तो उनके हरों का योग शून्य रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण (25). $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=0$ को सरल कीजिए।

हल : यहाँ दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान $=1$ अतः सूत्रानुसार

$$x+a+x+b=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{a+b}{2}$$

उदाहरण (26). $\frac{m}{2x+1}+\frac{m}{3x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : भिन्नों के दोनों अंश परस्पर समान $= m$

अतः सूत्रानुसार $2x+1+3x+4=0$

या $5x+5=0 \quad \therefore \quad x=-1$

सूत्र का चतुर्थ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरों का योग परस्पर समान हो अथवा दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी योग को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण (27). समीकरण $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=2x+3+2x+5=4x+8$

दोनों पक्षों के हरों का योग $=4x+8$

दोनों समुच्चय समान अतः सूत्रानुसार $4x+8=0, \quad \therefore \; x=-2$

उदाहरण (28). समीकरण $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{x+1}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=3x+4+x+1=4x+5 \qquad \cdots$(i)

दोनों पक्षों के हरों का योग $=6x+7+2x+3=8x+10 \qquad \cdots$(ii)

योग क्रमांक (i) तथा योग क्रमांक (ii) का अनुपात =1:2

अतः सूत्रानुसार किसी भी योग को शून्य समान रखने पर

$4x+5=0$ अथवा $8x+10=0$ से $x=-\frac{5}{4}$

सूत्र का पंचम अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के एक पक्ष के अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो अथवा दोनोंअन्तर एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण (29). समीकरण $\frac{3x ? 4}{2x ? 1} ? \frac{x ? 8}{2x ? 5}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x+4-2x-1=x+3 \qquad \cdots$(i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=2x-5-x+8=x+3 \qquad \cdots$(ii)

दोनों पक्षों के अन्तर परस्पर समान अतः सूत्रानुसार

$x+3=0 \qquad \therefore \; x=-3$

उदाहरण (30). समीकरण $\frac{x-8}{3x-2}=\frac{3x+4}{2x+1}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x-2-x+8=2x+6 \qquad \cdots$(i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x+4-2x-1=x+3 \cdots$(ii)

अन्तर क्रमांक (i) तथा अन्तर क्रमांक (ii) का अनुपात $=2:1$

अतः सूत्रानुसार किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर

$x+3=0$ अथवा $2x+6=0$ से $x=-3$

टिप्पणी :– सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये आधारित अनुप्रयोग क्रमांक चतुर्थ एवं पंचम द्वारा किसी द्विघाती समीकरण की चर राशि के दोनों

मान ज्ञात किये जा सकते हैं जैसे समीकरण $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{5x+6}{2x+3}$ के हल में उपरोक्त सूत्र द्वारा चर राशि x के दो मान अर्थात् $x=-\frac{5}{4}$ तथा $x=-1$ प्राप्त होते हैं।

सूत्र का षष्ठ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हों और पद का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो तथा वाम पक्ष के हरों का योग दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण (31). समीकरण $\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+10}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के हरों का योग $=x+7+x+9=2x+16$

दक्षिण पक्ष के हरों का योग $=x+6+x+10=2x+16$

सूत्रानुसार $2x+16=0 \quad \therefore \quad x=-8$

उदाहरण (32). समीकरण $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-12}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के हरों का योग परस्पर समान $=2x-17$

अतः सूत्रानुसार $2x-17=0 \quad \therefore \quad x=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$

उदाहरण (33). समीकरण $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में ऋणात्मक पदों का पक्षांतरण करने पर

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

सूत्रानुसार $2x+5=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$

उत्तर जाँचने की विधियाँ

किसी भी संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जांच करने के लिए दो विधियां प्रचलित हैं –

(क) नवांक विधि (ख) एकादशांक विधि

(क) नवांक विधि :

नवांक विधि में अंक 9 को आधार मान कर किसी संख्या का बीजांक ज्ञात किया जाता है। संख्या के अंकों अथवा अंको के योग में से 9 घटाने पर जो अंक बचता है वह इस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे 947 का बीजांक = 2

भाग संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच

$4283 \div 7$, भागफल $=611$, शेषफल $=6$

हमें सिद्ध करना हैं कि

भाज्य का बीजांक = भाजक का बीजांक $\times$ भागफल का बीजांक

+ शेषफल का बीजांक

या $8 = 7 \times 8 + 6$

$=62$

$=8$

अतः उत्तर सही।

टिप्पणी:1. यदि प्रश्न की किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अंकों का स्थान परस्पर बदल जाय तो भी बीजांक वही आता है और नवांक विधि से गलती की पकड़ नहीं हो पाती है।

2. वैदिक गणित में एक ही प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। एकदशांक विधि से भी उत्तर का सत्याफ्न किया जा सकता है।

(ख) एकादशांक विधि :

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंको और समस्थानों के अंको के योगों का अन्तर उस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे संख्या 63254 का

बीजांक $= 4 - 5 + 2 - 3 + 6 = 4$

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है :

भाग संक्रिया

$6789 \div 12$, भागफल $= 565$, शेषफल $= 9$

भाज्य का बीजांक $= 9 - 8 + 7 - 6 = 2$

भागफल का बीजांक $= 5 - 6 + 5 \quad = 4$

भाजक का बीजांक $= 2 - 1 \quad = 1$

शेषफल का बीजांक $= 9 \quad = 9$

सूत्र : $2 = 4 \times 1 + 9$
$= 13$
$= 2$

अतः उत्तर सही है।

प्रश्नमाला 1

निखिलम विधि से भाग दीजिए :

1. $1245 \div 97$ 2. $311 \div 8$ 3. $1013 \div 88$

निम्न का वर्ग ज्ञात कीजिए :

4. 103 5. 95 6. 204 7. 225

निम्न का घनफल ज्ञात कीजिए :

8. 15 9. 91 10. 32 11. 208

ध्वजांक विधि से भाग दीजिए।

12. $4532 \div 112$ 13. $1234 \div 42$

14. $98765 \div 87$ 15. $2101532 \div 879$

सूत्र परावर्त्य आधारित विधि से भाग दीजिए।

16. $1154 \div 103$ 17. $1358 \div 113$

18. $1432 \div 88$ 19. $14885 \div 123$

उत्तरमाला

भागफल →	1. 12	2. 38	3. 11
शेषफल →	8	7	45

4. 10609

5. 9025

6. 41616

7. 50625

8. 3375

9. 753571

10. 32768

11. 8998912

भागफल →	12.	40	13.	29	14.	1135	15.	2390
शेषफल →		52		16		20		722

भागफल →	16.	11	17.	12	18.	16	19.	121
शेषफल →		21		2		24		2