

14.01 प्रस्तावना

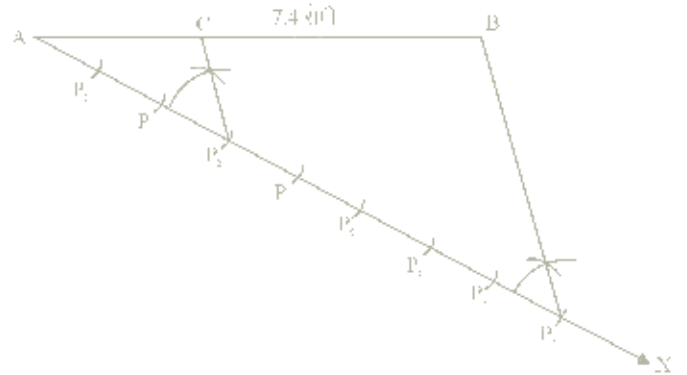
हमने पिछले अध्यायों में वृत्त, छेदन रेखा, स्पर्श रेखा एकान्तर वृत्त खण्ड, दो सम्बन्धित गुणधर्मों को समझा और समरण किया। आइए यहाँ हम उन अध्ययन किये गए प्रमेयों का उपयोग करते हुए उनसे सम्बन्धित रचना कैसे करेंगे का अध्ययन करते हैं। बिन्दु पथ के अध्याय में हमने संगामी रेखा खण्ड एवं संगामी बिन्दुओं पर चर्चा की है। जिनमें हमने अन्तः केन्द्र और परिकेन्द्र के बारे में अध्ययन किया है। आइए अब हम इन सिद्धान्तों एवं मूलभूत अनुपातिक प्रमेय का उपयोग करके, रचना के माध्यम से इन सिद्धान्तों को समझने का प्रयत्न करते हैं।
निर्मेय- ज्यामिति में किसी ज्यामितीय निर्माण सम्बन्धी पहली को निर्मेय कहते हैं।



14.02 एक रेखा खण्ड का दिए गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन

निर्मेय-1. एक 7.4 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड खींच कर उसका 3 : 5 में आन्तरिक विभाजन कीजिए।
रचना के पद:

1. रेखा खण्ड AB = 7.4 सेमी खींचिए।
2. न्यून कोण BAX की रचना कीजिए।
3. सुविधाजनक त्रिज्या लेते हुवे AX पर 8 चाप (3 + 5) P₁, P₂, P₃, ..., P₈ इस प्रकार के लें कि
AP = A₁P₁ = P₁P₂ = ... = P₇P₈ हो।
4. B P₃ को मिलाइए।
5. बिन्दु P₃ से P₃C || P₃B खींचिए (इसके लिए



आकृति 14.01

$\angle AP_3C = \angle AP_3B$ बनाइए जो AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करता है)

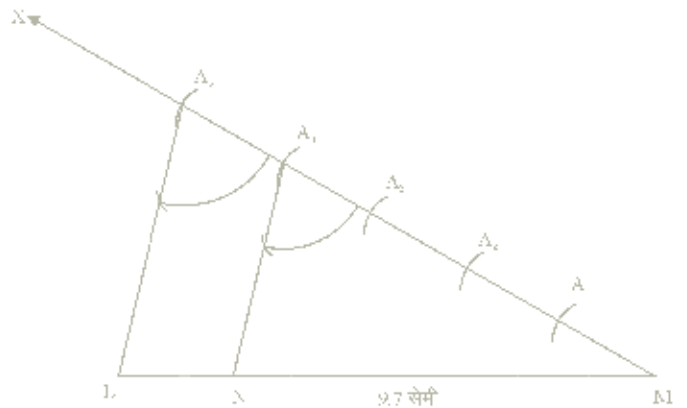
इस प्रकार रेखाखण्ड AB बिन्दु C पर 3 : 5 में विभाजित होता है।

निर्मेय-2. एक रेखा खण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए तथा इस पर एक ऐसा बिन्दु N ज्ञात कीजिए कि

$$MN = \frac{4}{5}ML.$$

रचना के पद:

1. रेखाखण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए।
2. एक न्यून कोण LMX की रचना कीजिए।
3. एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर MX पर 5 चाप A₁, A₂, A₃, A₄, A₅ इस प्रकार के लेते हैं कि
MA = A₁A₂ = ... = A₄A₅
4. A₅L को मिलाए
5. बिन्दु A₄ पर A₄N || A₅L बनाइए (इसके लिए
 $\angle MA_4N = \angle MA_5L$ की रचना कीजिए)
6. बिन्दु N रेखाखण्ड ML पर इस प्रकार का प्राप्त होता है।



आकृति 14.02

$$MN = \frac{4}{5}ML.$$

सत्यापन: त्रिभुज MLA_1 में, $NA_1 \perp LA_1$

$$\therefore \frac{LN}{NM} = \frac{A_1A_2}{MA_1} \text{ (मूलभूत अनुपातिक प्रमेय से)}$$

$$\text{या } \frac{LN}{NM} + 1 = \frac{A_1A_2}{MA_1} + 1$$

$$\text{या } \frac{LN + NM}{NM} = \frac{M_2A_1 - MA_1}{MA_1}$$

$$\text{या } \frac{ML}{NM} = \frac{MA_1}{MA_1} = \frac{5}{4}$$

$$\text{या } \frac{MN}{ML} = \frac{4}{5}$$

अतः रेखाखण्ड ML पर N एक ऐसा बिन्दु है कि $MN = \frac{4}{5}ML$.



14.03 वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना (Construction of a tangent to a point on the circle)

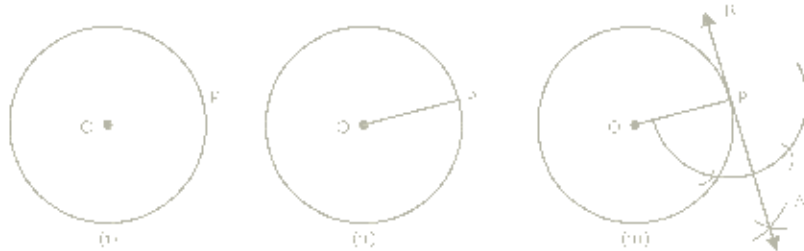
(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो (प्रमेय 14.1 का उपयोग)

यदि आपसे एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r दी गई हो की रचना करके उस पर एक स्पर्श रेखा खींचने को कहा जाए तो आप (जैसा अधिकांश विद्यार्थियों में देखा गया है) परस्कार की सहायता से r त्रिज्या वाला वृत्त बनाकर अपने विवेक से वृत्त पर एक बिन्दु चयन कर एक रेखा खींच देते हैं। यदि आप स्पर्श रेखा की रचना ऐसे ही करते हैं तो पूर्णतः त्रुटि युक्त है।

सही प्रकार से रचना (प्रमेय 13.1 का उपयोग करते हुए) निम्न निर्णय द्वारा सांगझेंगे—

निर्णय-3. दिए गए वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना करना, जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

रचना (i) O केन्द्र वाला वृत्त की गई त्रिज्या को परस्कार की सहायता से बनाकर उस पर एक बिन्दु P अंकित करते हैं। देखिए आकृति 14.03(i)



आकृति 14.03

(ii) O व P को मिलाया अर्थात् OP वृत्त की त्रिज्या है। देखिए आकृति 14.03 (ii)

(iii) OP (त्रिज्या) को आधार रेखा मानकर, OP पर लम्ब AB खींचा। देखिए आकृति 14.03 (iii)

इस प्रकार प्राप्त AB ही दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

14.04 वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना

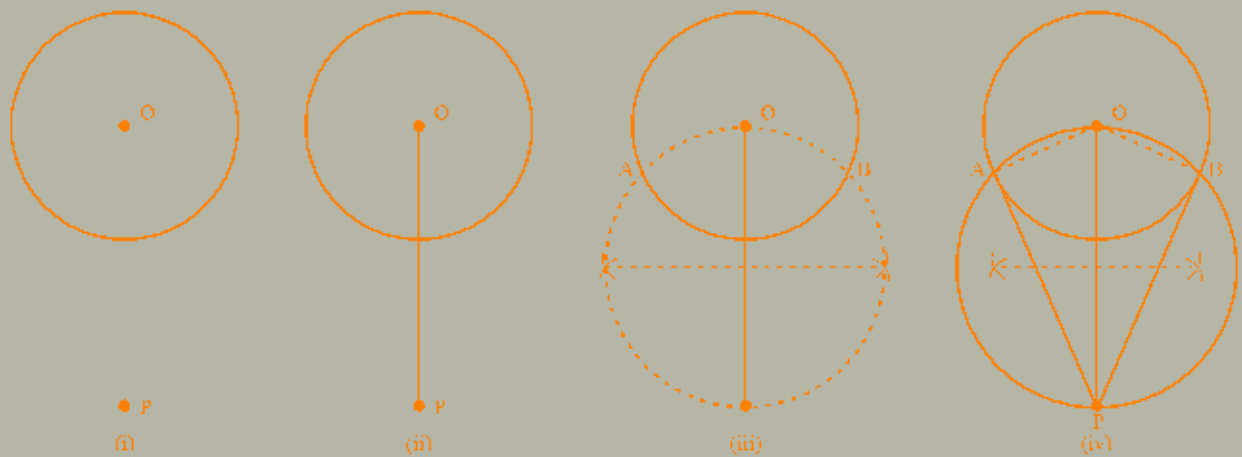
(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात है। (प्रमेय 13.3 का उपयोग)

हम जानते हैं कि वृत्त में व्यास पर बना कोण समकोण होता है। वृत्त और व्यास के मध्य इस गुणधर्म पर विचार कीजिये।

निर्णय-4. दिए गए वृत्त पर बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना करना जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

(1) एक वृत्त जिसका केन्द्र O है इसके बाहर एक बिन्दु P लेते हैं (ii) OP को मिलाया (iii) OP का लम्ब अर्द्धक के माध्यम से OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया और MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो दिए गए वृत्त को A व B पर प्रतिच्छेद करता है। अतः PA व PB दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

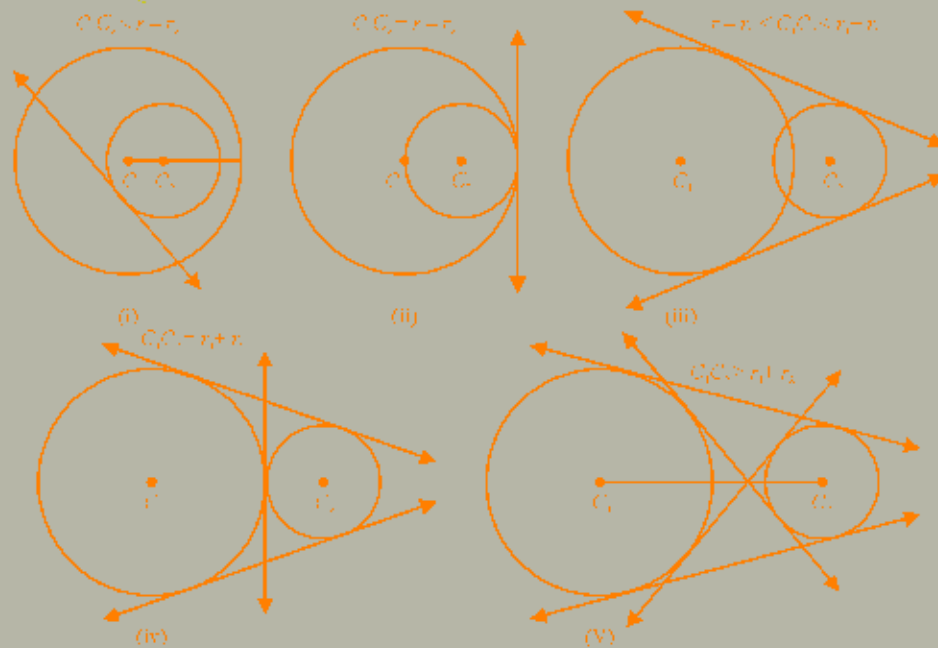




आकृति 14.04

14.05 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

दो वृत्तों की विभिन्न स्थितियों के अन्तर्गत उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या की राश्यापना के लिए हमें राशी स्थितियों पर विचार करना होगा। अतः इसे निम्न आकृतियों के माध्यम से समझ सकते हैं।



आकृति 14.05

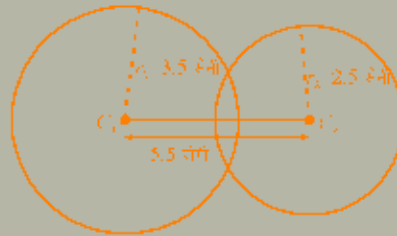
- I. आकृति 14.05 (i) में छोटे वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा खींची जाती है तो यह बड़े वृत्त को प्रतिच्छेद करती है। अतः जब $C_1C_2 < r_1 - r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की संख्या $= 0$ है।
- II. आकृति 14.05 (ii) में दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर केवल एक उभयनिष्ठ रेखा है चूँकि यहाँ दोनों वृत्त उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के एक ही ओर स्थित हैं अतः यह उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा कहलाती है। अतः जब $C_1C_2 = r_1 - r_2$ हो तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या $= 1$ (उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा)
- III. आकृति 14.05 (iii) में दोनों वृत्त परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं अतः दो वृत्तों के दो ओर कुल दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। चूँकि यहाँ दोनों उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार स्थित हैं कि प्रत्येक वृत्त दोनों उभयनिष्ठ रेखाओं के क्रमशः एक ही ओर स्थित है। अतः दोनों उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ मानी जायेगी।
इस प्रकार जब $r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या $= 2$ (उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ)
- IV. आकृति 14.05 (iv) में दोनों वृत्त परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या तीन है। यहाँ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर स्थित है, जिसे उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा कहेंगे क्योंकि दोनों वृत्त इसके दोनों ओर स्थित हैं और दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं।
इस प्रकार जब $C_1C_2 = r_1 + r_2$ तब कुल स्पर्श रेखाओं की संख्या $= 3$ (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा)

V. आकृति 14.05 (v) में दोनों वृत्त बाहर स्थित हैं अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या चार है। यहाँ 2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ हैं।

bl. $d > r_1 + r_2$ तब कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 4 (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ) आइए अगले अनुच्छेद में उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा के रचना करना सीखते हैं।

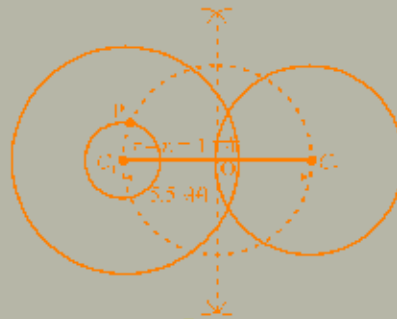
निर्मेय-6. दो भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात हो, तो दोनों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करना

(i) रचना - $C_1, C_2 = 5.5$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमशः $r_1 = 3.5$ सेमी और $r_2 = 2.5$ सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



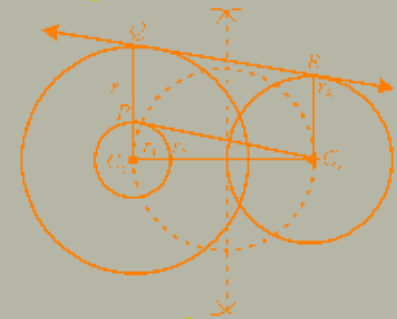
आकृति 14.06

(ii) दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $r_1 - r_2 = 3.5 - 2.5 = 1$ सेमी की त्रिज्या का एक वृत्त बड़े वृत्त के केन्द्र C_1 पर क बनाया और C_1, C_2 का समद्विभाजक बिन्दु O प्राप्त कर O से $OC_1 = OC_2$ की त्रिज्या लेकर खोटे वृत्त बनाया जो $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को P पर काटता है।



आकृति 14.07

(iii) PC_2 को मिलाकर $r_2 - r_1$ त्रिज्या वाले वृत्त C_2 से PC_2 स्पर्श रेखा खींची। C_1, P को मिलाते हुए C_1, Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है PC_1 के समान वाप लेकर Q को केन्द्र मान कर r_2 त्रिज्या वाले वृत्त का प्रतिच्छेपी बिन्दु R प्राप्त किया। QR का मिलाया QR ही अगोष्ठ उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा है।



आकृति 14.08

नोट: आप ध्यान से देखेंगे तो $PQRC_2$ एक आयत दिखाई देता है अर्थात् QR पर दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ r_1 व r_2 लम्ब हैं। इसीलिए QR ही दोनों वृत्तों की अगोष्ठ उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा कही जा सकती है। ऐसा ही उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा C_1, C_2 के दूरशी आरे गी खींची जा सकती है।

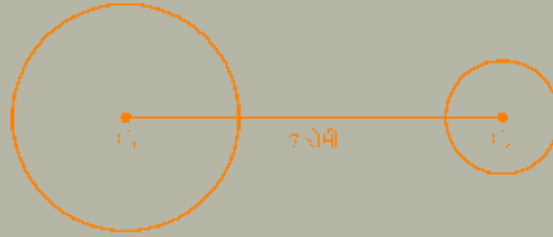
ध्यान देने योग्य बिन्दु- उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करने के लिए

- r_1, r_2 ज्ञात करना होता है।
- $r_1 - r_2$ त्रिज्या का वृत्त, बड़े वृत्त के केन्द्र से बनाया जाता है
- यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ समान हो तो C_1 व C_2 पर सीधे r_1 व r_2 लम्ब खींचकर दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेप बिन्दुओं को मिलाकर उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा खींची जाती है।

निर्मेय-6. दो गिन्त्र त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात है पर उगयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना करना।

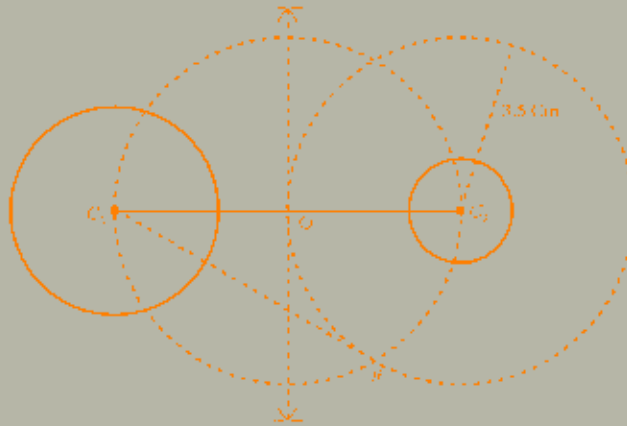
उदाहरण: दो वृत्त 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्याओं के केन्द्र परस्पर 7 सेमी दूरी पर हैं, एक लभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

(i) $C_1C_2 = 7$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



आकृति 14.09

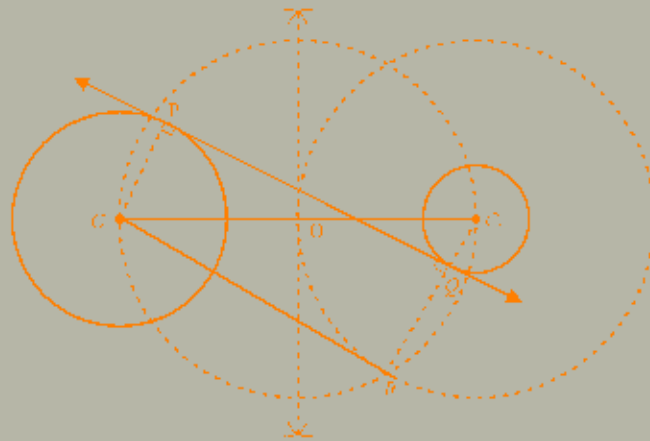
(ii) दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं का योग $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.00 = 3.5$ सेमी त्रिज्या का छोटे वृत्त केन्द्र C_2 पर (छोटे वृत्त के केन्द्र पर) खींचा। C_1C_2 का समद्विभाजक बिन्दु O प्राप्त कर एक वृत्त $OC_1 - OC_2$ त्रिज्या लेकर एक और छोटे वृत्त खींचा जो $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को R पर काटता है। C_2R को मिलाकर $r_1 + r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श रेखा खींची।



आकृति 14.10

(iii) RC_2 को मिलाया जो r_2 त्रिज्या वाले छोटे वृत्त को Q पर काटता है RC_1 त्रिज्या लेकर O को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या लेकर O को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप काटा जो P पर काटता है।

PQ को मिलाया। यही r_1 व r_2 त्रिज्या वाले वृत्तों के लिए उगयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।

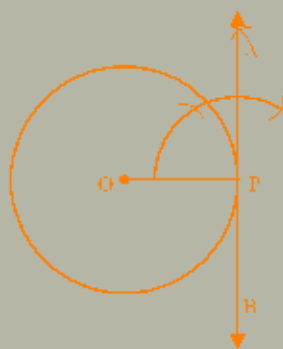


आकृति 14.11

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

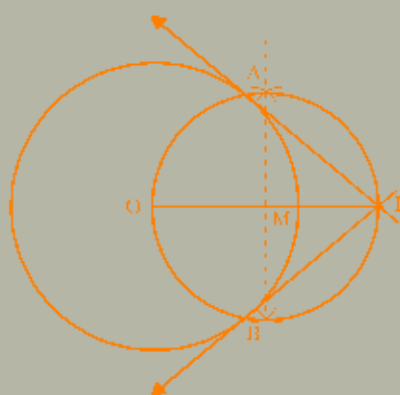
- हल:** (i) 2.5 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाया जिसका केन्द्र O है।
 (ii) इस वृत्त पर एक बिन्दु P लिया जिससे केन्द्र O से गिलाया
 (iii) बिन्दु P पर OP लम्ब की रचना कीजिए अर्थात् $\angle OPA = 90^\circ$ का बनाइए AP को आगे B तक बढ़ाइए इस प्रकार APB ही अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.12

उदाहरण-2. एक 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाइए तथा जिसके केन्द्र से 4.3 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींचीएँ और उन्हें मापकर दोनों बराबर है की जाँच कीजिये।

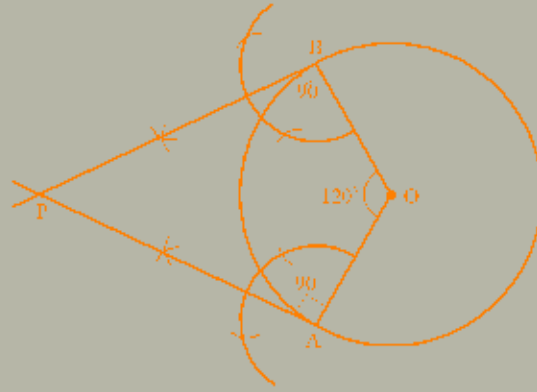
- हल:** (i) 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जिसका केन्द्र O है
 (ii) O से 4.3 दूर P लेकर OP को गिलाया
 (iii) OP का लम्ब समद्विभाजक खींचकर OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया।
 (iv) M को केन्द्र मानकर OM = PM त्रिज्या लेकर एक वृत्त की रचना की जो दिए गए वृत्त को A व B पर काटता है।
 (v) A व B को क्रमशः P से गिलाया।
 PA व PB की वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची गई अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।
 यहाँ $PA = PB = 3.2$ सेमी है। अर्थात् दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर माप की हैं।



आकृति 14.13

उदाहरण-3. एक 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाकर केन्द्र O पर OA व OB त्रिज्याएँ परस्पर 120° कोण बनाती हैं की रचना कर A व B पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

- हल:** (i) 3 cm त्रिज्या का वृत्त बनाकर O पर 120° का कोण बनाते हुए OA व OB त्रिज्याएँ खींचो।
 (ii) A व B पर लम्ब क्रमशः PA एवं PB की रचना की PA व PB ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 14.14

उदाहरण-4. एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाओं PA, PB की रचना कीजिए जहाँ PA तथा PB के मध्य का कोण 80° है।

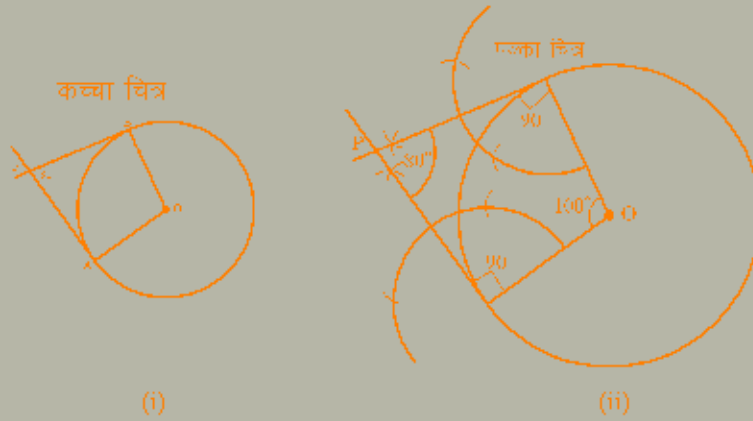
हल: चूंकि $\angle APB = 80^\circ$ दिया हुआ

$$\angle A = \angle B = 90^\circ$$

अतः चतुर्भुज AOBP का चौथा कोण

$$\angle AOB = 360 - (80 + 90 + 90) = 360 - 260 = 100^\circ$$

अर्थात् जीवा OA व OB के मध्य $\angle AOB = 100^\circ$



आकृति 14.15

रचना (i) 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया एवं त्रिज्याएँ OA व OB के मध्य 100° का कोण बनाया

(ii) OA व OB के A व B पर लम्ब क्रमशः AP व BP खींचे जो एक दूसरे को P पर मिलते हैं

$\angle APB$ को मापने पर $\angle APB = 80^\circ$ प्राप्त होता है। इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखाओं की रचना होती है।

उदाहरण-5. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4 सेमी और 3 सेमी हैं। तथा दोनों के केन्द्रों की मध्य दूरी 6.5 सेमी है की रचना कर उन पर एक सभ्यनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल: (i) $C_1C_2 = 6.5$ सेमी की रेखा खींच कर C_1 व C_2 पर क्रमशः 4 सेमी एवं 3 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त बनाएं

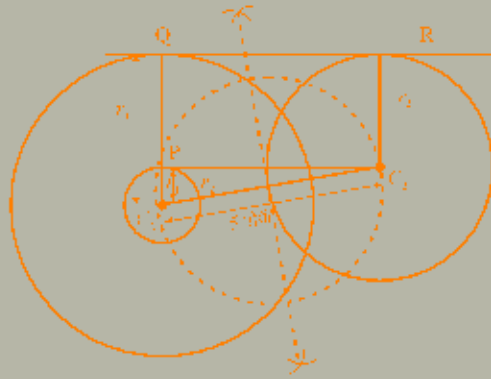
(ii) $r_1 = r_2 = 4 - 3 = 1$ सेमी की त्रिज्या का C_1 को केन्द्र मानकर बड़े वृत्त के अन्दर एक वृत्त और बनाया।

(iii) $r_1 = r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त पर निर्णय 13.8 का उपयोग कर PC_2 एक स्पर्श रेखा खींची

(iv) C_1 को P से मिलाने हुए C_1Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है।

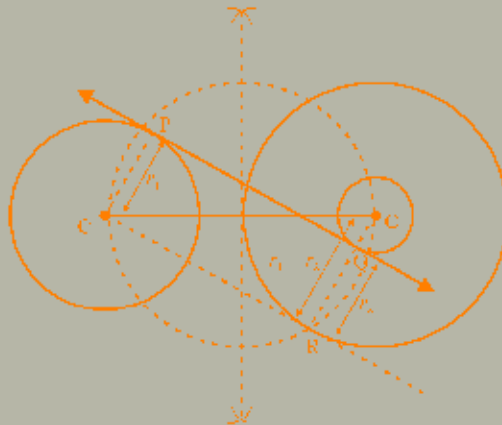
(v) PC_2 के बराबर चाप खोलकर बिन्दु Q से r_2 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप व वृत्त का प्रतिच्छेदी बिन्दु R प्राप्त किया

(iv) QR को मिलाए यही अभीष्ट उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.16

उदाहरण-6. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी हैं जिनके केंद्र 8 सेमी दूरी पर स्थित हैं। पर एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।



आकृति 14.17

रचना:

- $C_1C_2 = 8$ सेमी की रेखा खींचकर उसके दोनों सिरे पर क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी की त्रिज्याएँ लेकर वृत्त खींचे।
- $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.5 = 4$ सेमी त्रिज्या का छोटे वृत्त $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केंद्र C_2 से एक लंब वृत्त बनाया।
- निर्मय 13.3 का उपयोग करते हुए $r_1 + r_2 = 4$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर C_1 से स्पर्श रेखा C_1R की रचना की एवं R को C_2 से मिलाया तो इस प्रकार रेखा RC_2 , $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त को प्रतिच्छेद करती हुई निकलती है। इस प्रतिच्छेद बिन्दु को Q नाम दिया।
- RC_1 के बराबर लम्बाई लेकर Q से $r_1 = 2.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर प्रतिच्छेदी बिन्दु P प्राप्त किया P व Q को मिलाया। इस प्रकार PQ ही अभीष्ट उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।

प्रश्नमाला 14.1

- 6.7 सेमी लम्बाई के एक रेखा खण्ड को 2:3 में विभाजित कीजिए।
- एक रेखा खण्ड $AB = 8.3$ सेमी लम्बाई का बनाइए। रेखा खण्ड AB पर एक बिन्दु C ऐसा ज्ञात कीजिए कि $AC = \frac{1}{3}AB$ इसे सत्यापित भी कीजिए।

3. एक 2.8 रोगी के वृत्त की रचना कर उस पर स्थित बिन्दु P पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिये।
4. एक 3 सेमी त्रिज्या के व्यास के दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। क्या वह परस्पर प्रतिच्छेद करेगी कारण सहित उत्तर लिखिए।
5. एक 3.1 रोगी त्रिज्या के वृत्त में एक 2.3 रोगी की जीवा काटिए और उसके दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।
6. एक 2.7 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना कीजिए। उस वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींचिए।
7. किसी बिन्दु O पर 2.1 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए। इसमें 60° का कोण बनाती हुई दो त्रिज्याएँ OA और OB की रचना करके A व B पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए जो परस्पर T बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं कोण ATP को मापिए।
8. एक 3.2 रोगी त्रिज्या का वृत्त खींचिए उस पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर 70° का कोण बनाती हों।
9. एक वृत्त 3 सेमी त्रिज्या का खींचिए जिसके केन्द्र O से 5 सेमी दूर स्थित P से दो स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
10. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 3 सेमी एवं 4 सेमी हैं। जिनके केन्द्रों के मध्य की दूरी 8 सेमी है। दोनों वृत्तों पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ कितनी खींची जा सकती हैं। तथा दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
11. दो वृत्तों जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 1.7 सेमी. और 2.8 सेमी की हैं कि एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए जबकि दोनों के केन्द्र एक दूसरे से 6 सेमी दूरी पर हैं।

14.06 पहले त्रिभुज की रचना कर वृत्त की रचना करना

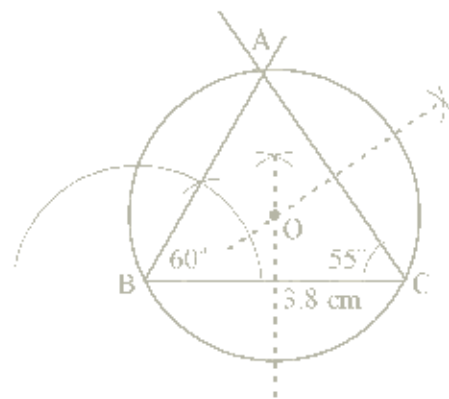
(A) परिवृत्त (परिगत वृत्त) की रचना

चूंकि परिकेन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के संगामी बिन्दु है तथा इसकी स्थिति त्रिभुजों की प्रकृति पर निर्भर करती है। अतः परिगत वृत्त की रचना के लिए निम्न चरणों पर ध्यान केंद्रित करेंगे।

- (i) त्रिभुज की दो भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचकर परिकेन्द्र की रचना करते हैं।
- (ii) प्राप्त परिकेन्द्र को केन्द्र मानकर किसी एक शीर्ष की दूरी तक त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना करते हैं। इस प्रकार प्राप्ता वृत्त तीनों शीर्षों से होकर गुजरेंगा। यही अभीष्ट परिगत वृत्त है।

I. त्रिभुज के परिकेन्द्र की स्थिति एवं परिगत वृत्त की रचना

उदाहरण-7. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें भुजा $BC = 3.8$ सेमी, $\angle B = 60^\circ$ तथा $\angle C = 55^\circ$ हो। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाँच कीजिए। (देखिए आकृति 14.18)



आकृति 14.18

रचना

- (i) $\triangle ABC$ की रचना दिए मापों के अनुसार की गई।
 - (ii) $\triangle ABC$ की कोई दो भुजाएँ BC एवं AC लेकर लम्ब समद्विभाजक खींचिए परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रकार O वृत्त का परिकेन्द्र प्राप्ता हो चुका है।
 - (iii) O को केन्द्र मान कर त्रिभुज के शीर्षों में से किसी एक शीर्ष की परिकेन्द्र से दूरी की त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की यही $\triangle ABC$ का अभीष्ट परिवृत्त (परिगत वृत्त) है।
- विशेष:** ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित है।

उदाहरण-8. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसकी भुजा $BC = 4$ सेमी $\angle B = 40^\circ$ एवं $\angle A = 90^\circ$ हों। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाँच कीजिए।

रचना (देखिए आकृति 14.17)

(i) नुकी त्रिभुज में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (युजा BC के C पर स्थित कोण ज्ञात करने के लिए)

अतः $\angle C = 180 - (\angle A + \angle B)$

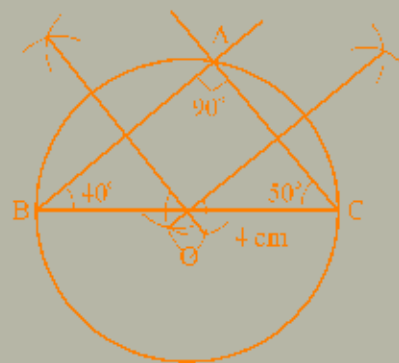
या $\angle C = 180 - (90 + 40) = 50^\circ$

(ii) $\triangle ABC$ की $BC = 4$ सेमी $\angle B = 40^\circ$ व $\angle C = 50^\circ$ का उपयोग कर रचना की। इस रचना से $\angle A = 90^\circ$ स्वतः प्राप्त होगा

(iii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाजक खींच कर परिकेन्द्र O प्राप्त किया

(iv) परिकेन्द्र से एक शीर्ष A तक त्रिज्या लेकर एक वृत्त की रचना की जो $\triangle ABC$ के सभी शीर्षों से गुजरता है।

यही $\triangle ABC$ का अभीष्ट परिगत (परिगत) वृत्त है। $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है। जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण BC पर स्थित है।



आकृति 14.19

उदाहरण-9. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसकी भुजा $BC = 6$ सेमी $\angle B = 30^\circ$ एवं $\angle C = 25^\circ$ इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र स्थिति का पता लगाइए।

(i) दिए मापों के आधार पर त्रिभुज ABC की रचना की

(ii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाजक खींचें जो परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(iii) O को केन्द्र मान कर OC के बराबर त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की जो $\triangle ABC$ के तीनों शीर्षों से गुजरता है। यह वृत्त $\triangle ABC$ का अभीष्ट परिगत वृत्त है।



आकृति 14.20

यहाँ $\triangle ABC$ का परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर सबसे बड़ी भुजा की ओर स्थित है।

त्रिभुजों की प्रकृति के आधार पर इनके परिकेन्द्र की स्थितियाँ भिन्न-भिन्न रहती हैं।

- (a) न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है। देखिए उदाहरण-1 का आकृति 10.16
- (b) समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण पर स्थित होता है। देखिए उदाहरण-2 का आकृति 14.17
- (c) अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है। देखिए उदाहरण-3 का आकृति 14.18

(B) अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना

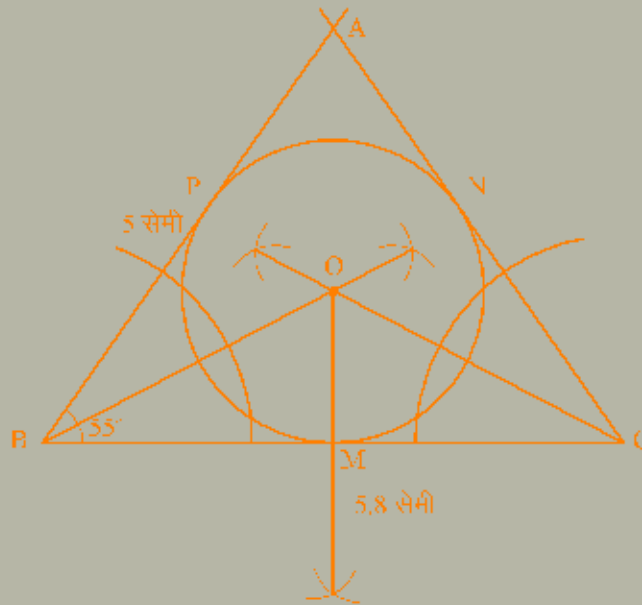
वृत्त अन्तः केन्द्र—त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों के संगमन बिन्दु है। अतः अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना के लिए सर्व प्रथम त्रिभुज का अन्तः केन्द्र प्राप्त करते हैं। इनके लिए

- (i) दिये गए त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों के समद्विभाजक खींचते हैं।
 - (ii) दोनों समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु (अन्तः केन्द्र) से त्रिभुज की एक भुजा पर लम्ब डालते हैं (किसी कोण का समद्विभाजक कोण की दोनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दु है)
 - (iii) इस लम्ब की लम्बाई की त्रिज्या लेकर प्राप्त अन्तः केन्द्र से वृत्त खींचेंगे। यह वृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता हुआ गुजरता यही दिए गए त्रिभुज का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त होगा।
- आइए अंतर्गत वृत्त की रचना समझने के लिए निम्न उदाहरण का उपयोग करते हैं।

उदाहरण-10. $\triangle ABC$ के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए, जबकि $BC = 5.8$ सेमी, $AB = 5$ सेमी और $\angle B = 55^\circ$ हो।

हल: प्रश्नानुसार $\triangle ABC$ की रचना की (देखिए आकृति 14.19)

- (i) $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे जो O पर मिलते हैं O D का अन्तः केन्द्र है।
 - (ii) अन्तः केन्द्र O से BC पर लम्ब OM खींचा
 - (iii) O को केन्द्र मान पर OM त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा जो $\triangle ABC$ की भुजाएं AB , BC व CA को क्रमशः P , M , N पर स्पर्श करता हुआ गुजरता है।
- यही $\triangle ABC$ का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त है।



आकृति 14.21