15

वृत्त की परिधि एवम् क्षेत्रफल (Circumference of a Circle and Area)

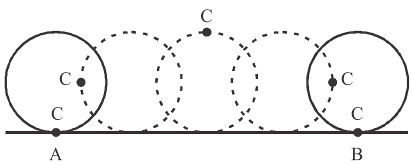
15.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व अध्यायों में हम वृत्त सम्बन्धी विभिन्न परिभाषाओं एवम् वृत्त सम्बन्धित गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके है इस अध्याय में कुछ वृत्ताकार आकृतियों के परिमाप व क्षेत्रफल से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करेंगे।

वृत्त किसी बिन्दु का बिन्दु पथ होता है जो किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से इसकी दूरी सदैव समान रहे।

15.02 वृत्त की परिधि

वृत्त की परिधि का सन्निकट माप ज्ञात करने के लिए एक वृत्ताकार चकती (circular disc) की रिम पर कोई बिन्दु अंकित करें एक समतल पृष्ठ पर एक सरल रेखा पर इस प्रकार रखें कि बिन्दु C रेखा पर स्थित बिन्दु A पर स्पर्श करे। इस चकती को सावधानी पूर्वक इस प्रकार लुढकाएं कि पुनः बिन्दु C रेखा को B बिन्दु पर स्पर्श करे। देखिए आकृति 15.01



आकृति 15.01

अब रेखाखण्ड AB को नाप लें इस प्रकार रेखाखण्ड की लम्बाई उस वृत्ताकार चकती की परिधि के बराबर होती है अतः आप समझ गये होंगे कि पहिये द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी या वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है जिसे प्रायः परिधि (circumference) कहा जाता है।

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ या $\pi \times d$

जहाँ $d = 2r$

दूसरे शब्दों में $\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

अतः वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय की गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

नोटः ध्यान रखें कि वृत्त एवम् वृत्त की परिधि समानार्थी नहीं हैं, वृत्त समतल में बनी एक आकृति है, जबकि वृत्त की परिधि एक लम्बाई है वृत्त की परिधि व व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है जिसे π द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

π के मान की गणना महान भारतीय गणितिज्ञ आर्य भट्ट (499 AD) में की उन्होंने बताया कि $\pi = \dfrac{62832}{20,000}$ होता है जो लगभग 3.1416 के बराबर होता है। π एक अपरिमेय संख्या है परन्तु व्यवहारिक कार्यों के लिए π का मान लगभग 22/7 या 3.14 लेते हैं। कम्प्यूटर से π के मान की गणना दशमलव के 5,00,000 (आधा मिलियन) स्थान तक की जा चुकी है आकृति 15.02 में वृत्त $C(0, r)$ के लिए

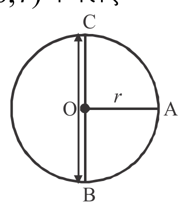
$\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि $= \pi \times$ व्यास

यदि वृत्त की परिधि को C तथा व्यास को D माने तो

$C = \pi \times D = \pi \times 2r$ ($\because$ व्यास $D = 2r$, r वृत्त की त्रिज्या है)

$= 2\pi r$



आकृति 15.02

15.03 वृत्त का क्षेत्रफल

यदि ग्राफ पेपर पर एक वृत्त बनाया जाए और वृत्त का क्षेत्रफल वृत्त में छोटे–छोटे वर्गों को गिनकर ज्ञात करें तो पाऐंगे कि

$$\frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{(\text{त्रिज्या})^2} = \pi$$

यदि वृत्त के क्षेत्रफल को A व त्रिज्या को r से व्यक्त करें तो

$$\frac{A}{r^2} = \pi$$

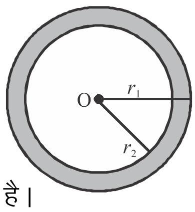
या $A = \pi r^2$

15.04 दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

संकेन्द्रीय वृत्तों से तात्पर्य ऐसे वृत्तों से हैं जिनका केन्द्र एक ही हो। यदि r_1 व r_2 दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं $(r_1 > r_2)$ दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

$$= \pi \left(r_1^2 - r_2^2\right)$$



आकृति 15.03

उपर्युक्त तथ्यों से महत्वपूर्ण परिणाम निकाले जा सकते हैं

(i) किसी पहिए द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी उसकी (पहिए की) परिधि या परिमाप के बराबर होती है।

(ii) पहिए द्वारा एक मिनट में लगाए गए चक्करों की संख्या $= \dfrac{\text{एक मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{परिधि}}$

(iii) वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

उदाहरण-1. निम्नलिखित वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए जबकि

(i) वृत्त की परिधि 132 सेमी है।

(ii) वृत्त की परिधि 176 सेमी है।

हलः (i) वृत्त की परिधि $= 132$ सेमी

$$2\pi r = 132 \quad [\text{जहाँ } r = \text{वृत्त की त्रिज्या}]$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 132$$

$$r = \frac{132 \times 7}{2 \times 22}$$

$$\text{त्रिज्या} = \frac{42}{2} = 21 \text{ सेमी}$$

(ii) वृत्त की परिधि $= 176$ सेमी

$$2\pi r = 176$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176 \quad [\text{वृत्त की त्रिज्या} = r]$$

$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{176 \times 7}{2 \times 22} = \frac{56}{2} = 28 \text{ सेमी}$$

उदाहरण-2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है

हल: वृत्त की त्रिज्या =7 सेमी

वृत्त की क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 22 \times 7$$

$$= 154 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण-3. एक साईकिल का पहिया 11 km चलने में 5000 चक्कर लगाता है तो पहिए का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल: पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी $= \frac{\text{चली गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}}$

$$= \frac{11}{5000} \text{km}$$

$$= \frac{11}{5000} \times 1000 \times 100$$

$$= 220 \text{ सेमी}$$

माना पहिये की त्रिज्या $= r$ सेमी

परिधि $= 220$ सेमी

$$2\pi r = 220 \text{ सेमी}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220 \text{ सेमी}$$

$$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35 \text{ सेमी}$$

व्यास $= 2r = 2 \times 35$ सेमी

$= 70$ सेमी

प्रश्नमाला 15.1

1. एक वृत्त की त्रिज्या 3.5 सेमी है। वृत की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की परिधि 44 मीटर है वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक अर्धवृत्ताकार प्लाट की त्रिज्या 21 मीटर है। इसका क्षेत्रफल व परिमाप ज्ञात कीजिए।
4. 100 चक्कर में एक स्कूटर का पहिया 88 मीटर की दूरी तय करता है। इस पहिये की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
5. एक वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है। इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
6. एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर है। यदि वर्ग का क्षेत्रफल 484 वर्ग मीटर हो तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. एक वृत्ताकार खेत पर 24 रु. प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रु. है। इस क्षेत्र की 0.50 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
8. एक वृत्ताकार घास के मैदान की त्रिज्या 35 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 7 मीटर चौडा मार्ग बना हुआ है।मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा।

   (A) πR^2 (B) $\pi(R+r)(R-r)$ (C) $\pi(R^2-r)$ (D) इनमें से कोई नहीं
10. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4 सेमी व 3 सेमी. है इन वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न में से होगा

    (A) 22 सेमी^{2} (B) 12 सेमी^{2} (c) 32 सेमी^{2} (d) 18 सेमी^{2}

15.05 वृत्त के त्रिज्यखण्ड एवम् वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

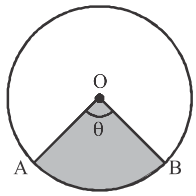
किसी भी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्य खण्ड कहते हैं।

आकृति 15.04 में वृत्त $(0, r)$ का एक त्रिज्य खण्ड AOB लीजिए। माना कि $\angle AOB = \theta$ है तथा $\theta < 180^\circ$ जब कोण θ का मान बढ़ता है तो चाप AB की लम्बाई भी उसी अनुपात में बढेगी। जब कोई चाप वृत्त के केन्द्र पर 180° का कोण आन्तरित करता है तो चाप की लम्बाई = अर्धवृत्त के चाप की लम्बाई $= \pi r$

$\because$ केन्द्र पर 180° अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई $= \pi r$ है

चाप की लम्बाई जो केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है।

$$= \frac{\pi r\theta}{180} = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$



आकृति 15.04

या $$L = 2\pi r \times \frac{\theta}{360} \quad \ldots(i)$$

इसी प्रकार जब कोई चाप वृत्त के केन्द्र पर 180° का कोण अन्तरित करता है तो उसके संगत त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{2}$

यदि चाप वृत्त के केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है तो संगत

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $$A = \frac{\pi r^2\theta}{2\times 180} = \frac{\pi r^2\theta}{360}$$

या $$A = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360} \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से हम ज्ञात कर सकते है।

$$A = \frac{1}{2} L \times r$$

नोटः यहाँ कोण θ डिग्री में लिया जाता है।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(i) घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में 6° के कोण से घूमती है।

(ii) घड़ी के घंटे की सूई 1 मिनट में $1/2^\circ$ कोण से घूमती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक वृत्त के चाप की लम्बाई 4 सेमी और त्रिज्या 6 सेमी है। वृत्त के त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है वृत्त के चाप की लम्बाई = 4 सेमी.

वृत्त के त्रिज्या = 6 सेमी.

हम जानते है कि त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई $= \dfrac{\pi r\theta}{180}$

$$4 = \frac{\pi \times 6 \times \theta}{180}$$

$$4 \times 180 = \pi \times 6 \times \theta$$

$$\theta = \frac{4\times 180}{\pi \times 6}$$

$$\theta = \frac{4\times 30}{\pi} = \frac{120}{\pi}$$

अतः त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} = \frac{\pi\times(6)^2\times\left(\frac{120}{\pi}\right)}{360} = \frac{6\times6\times120}{360}$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{6\times6}{3} = \frac{36}{3} = 12$ वर्ग सेमी (इसे सीधे $A = \frac{1}{2}L\times r$ से भी कर सकते हैं)

उदाहरण-2. वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण 50° है। यदि चाप की लम्बाई 5π सेमी. हो, तो चाप द्वारा बने लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त के चाप की लम्बाई $L = 5\pi$ सेमी.

त्रिज्य खण्ड का कोण $\theta = 50^\circ$

चाप की लम्बाई $L = \frac{\pi r\theta}{180}$

$$r = \frac{5\pi\times18}{50\pi} = 18 \text{ सेमी}$$

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}L\times r$

$$= \frac{1}{2}\times5\pi\times18 = 45\pi \text{ सेमी}^2$$

$$= 45\times3.14 = 140.3 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण-3. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है और त्रिज्य खण्ड का कोण 90° है वृत्त के लघु त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

हल: वृत्त की त्रिज्या = 7 सेमी.

त्रिज्यखण्ड का कोण $= 90^\circ$

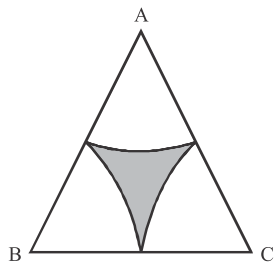
त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई $L = \frac{\pi r\theta}{180^\circ} = \frac{22}{7}\times\frac{7\times90}{180}$

$$L = 11 \text{ सेमी.}$$

वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times L\times r$

$$= \frac{1}{2}\times11\times7 = \frac{77}{2} = 38.5 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण-4. दी गई आकृति में ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसकी एक भुजा 20 सेमी. है त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से 10 सेमी. त्रिज्या के चाप खींचे गये हैं छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ व $\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए)



आकृति 15.05

हल: समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई (a) = 20 सेमी.

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}\times(20)^2$ (समबाहू त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा^{2})

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times20\times20$$

$$= 1.73\times100 = 173 \text{ सेमी}^2$$

समबाहू त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^o होता है अतः तीनों त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल समान होगा तीनों त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{\pi r^2 \theta}{360^o}$$

$$= \frac{3 \times 3.14 \times 10^2 \times 60}{360}$$

$= 157$ सेमी²

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= (173 - 157) = 16$ सेमी²

उदाहरण-5. एक घड़ी के घंटे की सूई 6 सेमी. लम्बी है। 90 मिनट में इस सूई द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः घन्टे की सूई की लम्बाई $= 6$ सेमी.

अतः घन्टे की सूई 6 सेमी. त्रिज्या का त्रिज्यखण्ड बनायेगी

घंटे की सूई द्वारा 12 घण्टे में बनाया गया कोण $= 360^o$

घंटे की सूई द्वारा 1 घंटे में बनाया गया कोण $= \frac{360}{12} = 30^o$

घंटे की सूई द्वारा 1 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

अतः घंटे की सूई द्वारा 90 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{1}{2} \times 90 = 45^o$

घंटे की सूई द्वारा निर्मित त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 6^2 \times 45}{360} = \frac{22 \times 6 \times 6 \times 45}{7 \times 360}$$

$$= \frac{22 \times 36}{7 \times 8} = \frac{792}{56} = 14.14 \text{ सेमी}^2$$

घंटे की सूई द्वारा निर्मित त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= 14.14$ सेमी²

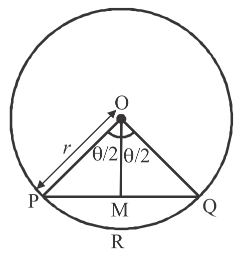
QB1AHA

15.06 वृत्तखण्ड (Segment) का क्षेत्रफल

वृत्त की प्रत्येक जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है इनमें से प्रत्येक भाग को वृत्त खण्ड कहते है। बड़े भाग को दीर्घ वृत्त खण्ड व छोटे भाग को लघु वृत्त खण्ड कहते है।

आकृति में वृत्त का केन्द्र O है तथा त्रिज्या r है। मानाकि जीवा PQ वृत्त को दो वृत्तखण्डों में विभाजित करती है। हमें लघुवृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। मानाकि $\angle POQ = \theta^o$ है

तो $\angle POM = \angle QOM = \frac{\theta}{2}$



आकृति 15.06

त्रिज्य खण्ड OPRQ का क्षेत्रफल = वृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल + Δ POQ का क्षेत्रफल

$\therefore$ वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्र $- \Delta$ POQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} PQ \times OM$$

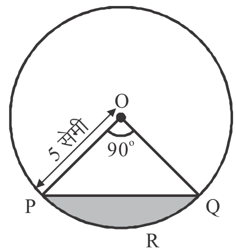
$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \times 2PM \times OM$$

$$= \frac{\pi r^2\theta}{360} - r\sin\frac{\theta}{2} \times r\cos\frac{\theta}{2}$$

वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\theta \qquad \left[\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$

उदाहरण-6. 5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती है। इस जीवा द्वारा बने लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी., जीवा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $= 90^\circ$



आकृति 15.07

त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times (5)^2 \times 90}{360}$$

$$= \frac{22 \times 25 \times 90}{7 \times 360} = \frac{550}{28} = 19.64\,\text{cm}^2$$

Δ POQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OP \times OQ$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2} = 12.50 \text{ वर्ग सेमी}$$

$\therefore$ लघु वृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्रफल $-\Delta$ POQ का क्षेत्रफल

$$= 19.64 - 12.50 = 7.14\,\text{cm}^2$$

अतः लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = 7.14 वर्ग सेमी

[इसे सीधे लघुवृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$ से भी कर सकते है]

उदाहरण-7. 14 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर 30° का कोण बनाती है इससे बनने वाले लघु वृत्त खण्ड और दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

हल: वृत्त की त्रिज्या $(r) = 14$ सेमी.

जीवा द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण $\theta = 30^\circ$

हम जानते है लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 30}{360} - \frac{1}{2} \times 14 \times 14 \sin 30$$

$$= \frac{22 \times 2 \times 14}{12} - \frac{1}{2} \times 196 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{616}{12} - 49 = 51.33 - 49$$

$= 2.33$ सेमी²

दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - 2.33 = \frac{22}{7} \times (14)^2 - 2.33$$

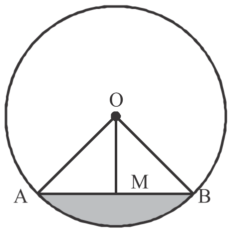
$$= \frac{22 \times 14 \times 14}{7} - 2.33$$

$$= 22 \times 2 \times 14 - 2.33$$

$$= 616 - 2.33$$

= 613.67 सेमी^{2}

उदाहरण-8. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए)



आकृति 15.08

हल: यहाँ $r = 12$ सेमी और $\theta = 120°$ है

संगत वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल –Δ OAB का क्षेत्रफल ...(i)

त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{120}{360} \times 3.14 \times 12 \times 12$

$= 3.14 \times 48$ सेमी^{2} ...(ii)

Δ OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए OM ⊥ AB

AM = BM तथा $\angle AOM = \angle BOM = 60°$

अब $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$ $\therefore$ $OM = OA \cos 60°$

$$= 12 \times \frac{1}{2} = 6\text{cm}$$

$$\frac{AM}{OA} = \sin 60°$$

अतः $AM = OA \sin 60° = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ सेमी $= 6\sqrt{3}$ सेमी

$AB = 2 \times 6\sqrt{3}$ सेमी $= 12\sqrt{3}$ सेमी

Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6 = 36\sqrt{3}$ सेमी^{2} ...(iii)

अतः समीकरण (i), (ii) व (iii) से

संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= (3.14 \times 48 - 36\sqrt{3})$ सेमी^{2}

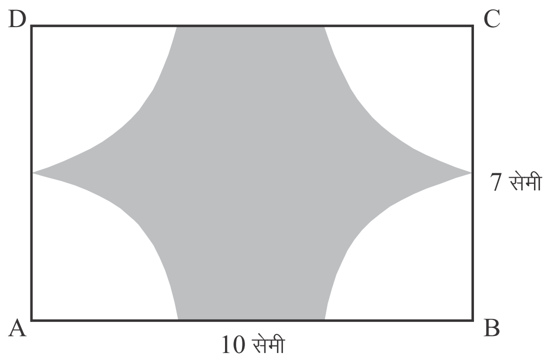
$= (3.14 \times 48 - 36 \times 1.73)$ सेमी^{2}

$= 12(12.56 - 3 \times 1.73)$ सेमी^{2}

$= 12(12.56 - 5.19) = 88.44$ सेमी^{2}

प्रश्नमाला 15.2

1. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 60° है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की त्रिज्या 10.5 सेमी और त्रिज्यखण्ड का कोण 45° है। लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
3. एक वृत्त के चाप की लम्बाई 12 सेमी. और त्रिज्या 7 सेमी. है। वृत्त के लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. त्रिज्या 121 सेमी. वाले वृत्त का चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए–
   (i) चाप की लम्बाई
   (ii) चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल
   (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गये वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल
5. एक घड़ी की मिनट की सूई 10.5 सेमी. लम्बी है। मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में बनाए गए त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
6. 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त में एक जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 90° है इस जीवा द्वारा बने लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
7. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी. है।
8. एक घड़ी के घण्टे की सूई 5 सेमी. लम्बी हैं 7 मिनट में इस सूई द्वारा बनाए गये त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. दी गई आकृति 15.9 में ABCD एक आयत है। भुजा AB = 10 सेमी BC = 7 सेमी है। आयत के प्रत्येक शीर्ष पर 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त खींचे गए हैं छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



आकृति 15.9

15.07 समतलीय आकृतियों के संयोजन के क्षेत्रफल

QBAGIX

संयोजन से तात्पर्य दो या दो से अधिक समतलीय आकृतियों को एक साथ मिलाकर नई आकृति बनाने से है। अभी तक वृत्त से संबंधित पृथक–2 आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात किया गया है। अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों (combination) के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। हमें इस प्रकार की रोचक आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिजाइनों के साथ देखने को मिलती है। मेज पर ढका गया मेजपोश, फूलों की क्यारियाँ, खिडकियों के डिजाइन, मेजपोशों पर बने डिजाइन आदि ऐसी आकृतियों के उदाहरण है। आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्न उदाहरण दिए गए है।

उदाहरण-9. 58 मीटर वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के सिरों पर दो वृत्ताकार भाग जोड़ने का प्रस्ताव है। प्रत्येक वृत्त का केन्द्र वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है पूरे मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः वर्ग के विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{58^2 + 58^2} = 58\sqrt{2}$ मीटर

अतः उस वृत्त की त्रिज्या जिसका केन्द्र वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है $= \frac{58\sqrt{2}}{2} = 29\sqrt{2}$ मीटर

एक वृत्ताकार सिरे का क्षेत्रफल $= 29\sqrt{2}$ मीटर त्रिज्यावले वृत्त में 90° कोण वाले वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

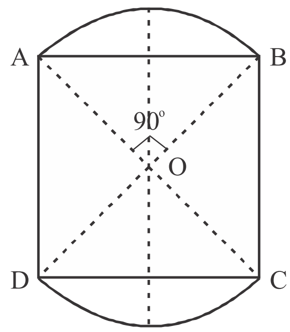
$$= \left[\frac{\pi r^2\theta}{360} - r^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right] = \left[\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]r^2$$

$$= \left[\frac{22}{7}\times\frac{90}{360} - \sin 45^\circ \cos 45^\circ\right]\left(29\sqrt{2}\right)^2 \text{ सेमी}^2$$

$$= \left[\frac{11}{14} - \frac{1}{2}\right]\times 29\times 29\times 2 \text{ सेमी}^2$$

$$= 29\times 29\times 2\times\frac{4}{14} \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{3364}{7} \text{ सेमी}^2$$



आकृति 15.10

पूरे घास के मैदान का क्षेत्रफल

$= $ वर्ग का क्षेत्रफल $+ 2$ (वृत्ताकार सिरों का क्षेत्रफल)

$$= \left[58\times 58 + 2\times\frac{3364}{7}\right] \text{ सेमी}^2$$

$$= 3364\left[1 + \frac{2}{7}\right] \text{ सेमी}^2$$

$$= 3364\times\frac{9}{7} \text{ सेमी}^2$$

$$= 4325.14 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण-10. एक 42 मी. व्यास के वृत्ताकार घास के मैदान के बाहर चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते में ₹ 4 प्रति वर्ग मीटर की दर से कंकड बिछवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

हलः मैदान का व्यास $= 42$ मी.

$\therefore$ मैदान की त्रिज्या $= 21$ मी.

रास्ते सहित मैदान की त्रिज्या $= (21 + 3.5) = 24.5$ मी.

रास्ते का क्षेत्रफल $= \left[\pi(24.5)^2 - \pi(21)^2\right]$ मी²

$$= \pi\left[(24.5)^2 - (21)^2\right] \text{ मी}^2$$

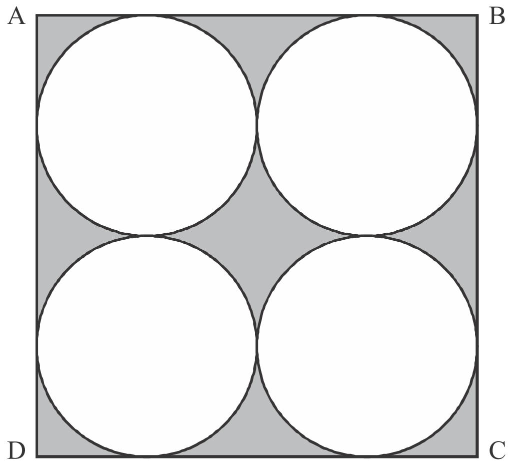
$$= \pi\left[(24.5 + 21)(24.5 - 21)\right] \text{ मी}^2$$

$$= \pi[45.5\times 3.5] \text{ मी}^2$$

$$= \frac{22}{7}\times 45.5\times 3.5 \text{ मी}^2 = 500.5 \text{ मी}^2$$

रास्ते में कंकड बिछवाने का खर्च $= 500.5\times 4 = 2002$ ₹

उदाहरण-11. आकृति 15.11 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD भुजा 14 सेमी. का एक वर्ग है।



आकृति 15.11

हल: वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= 14 \times 14$ सेमी² $= 196$ सेमी²

प्रत्येक वृत्त का व्यास $= \frac{14}{2}$ सेमी. $= 7$ सेमी

$\therefore$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या $= \frac{7}{2}$ सेमी.

अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ सेमी²

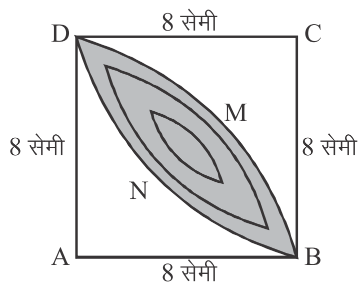
$= \frac{154}{4} = \frac{77}{2}$ सेमी²

चारों वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{77}{2} = 154$ सेमी²

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= (196 - 154) = 42$ सेमी²

उदाहरण-12. आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो त्रिज्याओं 8 सेमी. वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच का उभयनिष्ठ भाग है।



हल: यहाँ चतुर्थोश ABMD और BNDC की त्रिज्याऐं 8 सेमी है।

उनके क्षेत्रफलों का योग $= 2\times\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$

$$= \left[\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 64\right]$$

$$= \frac{704}{7} \text{ सेमी}^2$$

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= (8\times8)$ सेमी² $= 64$ सेमी²

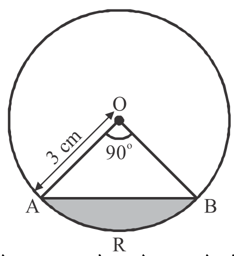
डिजाइन वाले भाग का क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= चतुर्थांश के क्षेत्रफलों का योग – वर्ग ABCD का योग

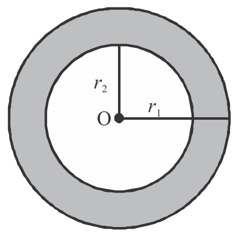
$$= \left[\frac{704}{7} - 64\right] \text{सेमी}^2 = \left[\frac{704-448}{7}\right] \text{सेमी}^2 = \frac{256}{7} \text{ सेमी}^2$$

प्रश्नमाला 15.3

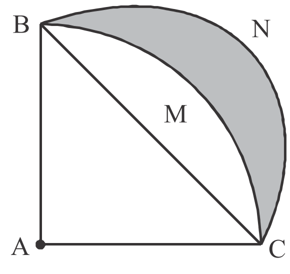
1. 14 सेमी भुजा के वर्ग में बने अन्तः वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।
2. किसी वृत्त की परिधि व त्रिज्या का अन्तर 74 सेमी है उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. दी गई आकृति 15.14 में वृत्त का केन्द्रO है। $\angle AOB = 90^\circ$ तथा OA = 3 सेमी. है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



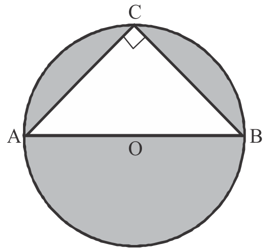
4. यदि एक वृत्त का परिमाप एक वर्ग के परिमाप के बराबर है। तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 3.5 मीटर है। पार्क के चारों ओर 1.4 मीटर चौडा फुटपात बना हुआ है फुटपात का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



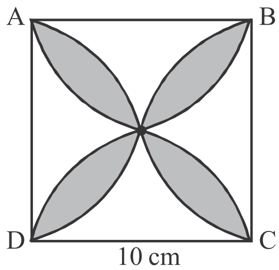
6. त्रिज्या 8 cm वाले एक वृत्त के अन्तर्गत खींचे जा सकने वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. दी गई आकृति 15.16 में ABMC त्रिज्या 14 सेमी. वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मानक एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



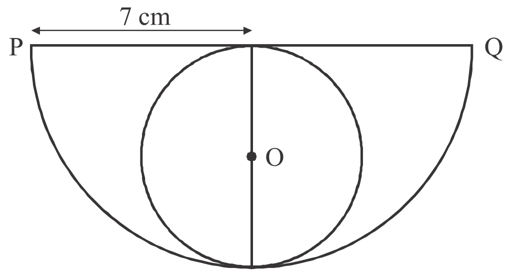
8. दी गई आकृति में AB का व्यास है $AC = 6$ सेमी. और $BC = 8$ सेमी तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



9. दी गई आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँABCD भुजा 10 सेमी. का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए है $(\pi = 3.14)$



10. दी गई आकृति में अर्धवृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है अर्धवृत्त में बने वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11. यदि R_1 व R_2 त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की परिधियों का योग R त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि के बराबर हो तो सही विकल्प है

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) निश्चित कुछ नहीं कहा जा सकता

12. 14 सेमी भुजा वाले वर्ग में बने अन्तः वृत्त की परिधि होगी।

(A) 22 सेमी (B) 44 सेमी (C) 33 सेमी (D) 55 सेमी

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वृत्त की परिधि $2 = \pi r = \pi d$ $(r =$ त्रिज्या, $d =$ व्यास)
2. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$ यहाँ $r_1 > r_2$
4. त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $A = \dfrac{\pi r^2\theta}{360^o}$
5. त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई $= L = \dfrac{2\pi r\pi}{360^o}$
6. $A = \dfrac{1}{2}Lr$ (त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल)
7. वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2\theta}{360^o} - \dfrac{1}{2}r^2 \sin\theta$
8. दीर्घवृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. 22 सेमी., 38.5 वर्ग सेमी. 2. 154 वर्ग मीटर 3. 693 वर्ग मीटर, 108 मीटर 4. 14 सेमी.
5. 144 सेमी. 6. 616 वर्ग मीटर 7. ₹ 1925 8. 1386 वर्ग मीटर
9. B 10 A

प्रश्नमाना 15.2

1. 7.3 सेमी. 2. 43-31 वर्ग सेमी. 3. 42 वर्ग सेमी. 4. (i) 22 सेमी (ii) 231 वर्ग सेमी (iii) 40.047 वर्ग से.मी
5. 57.75 वर्ग सेमी 6. 3.5 वर्ग सेमी 7. 9.625 वर्ग सेमी 8. 7.64 वर्ग सेमी 9. 31.5 वर्ग सेमी

प्रश्नमाला 15.3

1. 44 सेमी 2. 616 वर्ग सेमी 3. 2.57 वर्ग सेमी 4. 14 : 11 5. 36.96 वर्ग मीटर
6. 128 वर्ग सेमी 7. 98 वर्ग सेमी 8. 54.57 वर्ग सेमी 9. 57 वर्ग सेमी
10. 38.5 वर्ग सेमी 11. A 12. B