

त्रिभुज

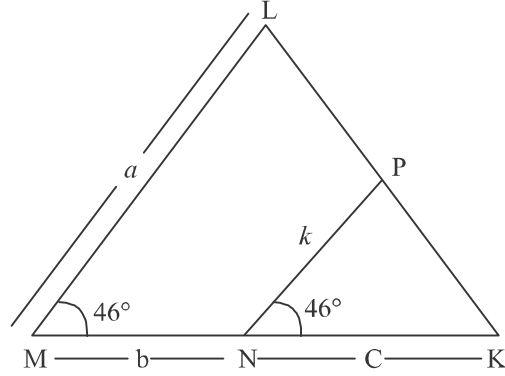
महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- दो त्रिभुज समरूप कहलाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों और उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हों।
- समरूप त्रिभुज के गुणधर्म :
 $\triangle ABC$ तथा $\triangle DEF$
 - कोण-कोण-कोण समरूपता** : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ यदि $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$
 - भुजा-कोण-भुजा समरूपता** :
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ तथा $\angle B = \angle E$
 - भुजा-भुजा-भुजा समरूपता** : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$
- निम्न प्रमेयों का हल परीक्षा में पूछा जा सकता है।
 - आधारभूत आनुपातिकता** : एक त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वे बिन्दु भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं।
 - दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किन्हीं दो संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
 - पाइथागोरस प्रमेय** : एक समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।
 - पाइथागोरस प्रमेय का विलोम** : यदि किसी त्रिभुज की भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

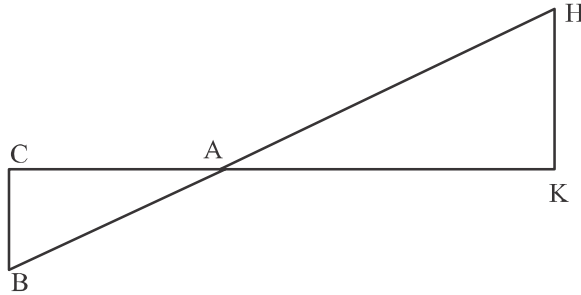
अति लघुत्तरात्मक प्रश्न

- क्या त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 12 सेमी., 16 सेमी तथा 18 सेमी. एक समकोण त्रिभुज है?

2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, $\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \frac{9}{4}$, $AB = 18$ सेमी, $BC = 15$ सेमी, तो PR ज्ञात कीजिए।
3. दी गई आकृति में $\angle M = \angle N = 46^\circ$, x को a , b तथा c के रूप में व्यक्त कीजिए।

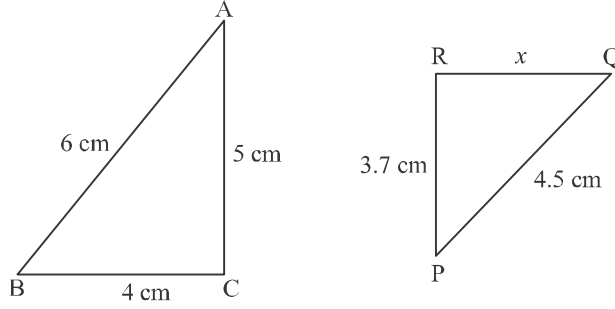


4. दी गई आकृति में, $\Delta AHK \sim \Delta ABC$. यदि $AK = 10$ सेमी $BC = 3.5$ सेमी, तथा $HK = 7$ सेमी हो तो AC ज्ञात कीजिए।

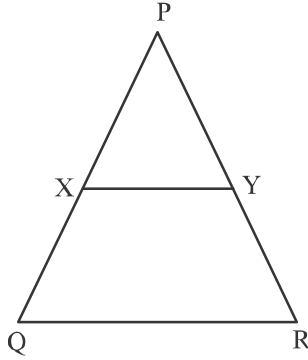


5. यदि $\Delta DEF \sim \Delta RPQ$ तो क्या यह कहना..... सत्य होगा की $\angle D = \angle R$ और $\angle F = \angle P$ है?
6. यदि दो समरूप त्रिभुजों के संगत माध्यिकों का अनुपात $5 : 7$ हो तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके परिमाण बराबर है। यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा एक सम संख्या हो तो कर्ण की लम्बाई 10cm हो तो त्रिभुज का परिमाण ज्ञात कीजिए।
8. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 2100 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से दक्षिण की ओर 2000 km/hr की चाल से उड़ता है। 1 घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

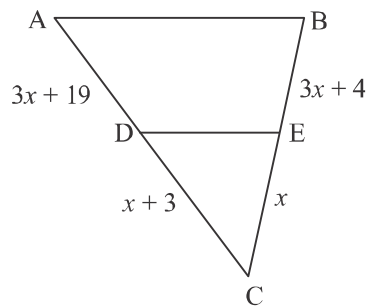
9. दो समरूप त्रिभुजों $\triangle ABC$ तथा $\triangle DEF$ का क्षेत्रफल क्रमशः 225 cm^2 तथा 81 cm^2 है। यदि बड़े त्रिभुज $\triangle ABC$ की सबसे बड़ी भुजा 30 cm हो तो छोटे त्रिभुज $\triangle DEF$ की सबसे बड़ी भुजा ज्ञात कीजिए।
10. दिए गए चित्र में, यदि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



11. दिए गए चित्र में, $XY \parallel QR$ तथा $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR} = \frac{1}{2}$, तो $XY : QR$ ज्ञात कीजिए।

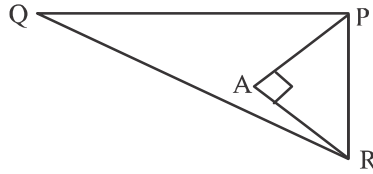


12. दिए गए चित्र में, यदि $DE \parallel AB$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

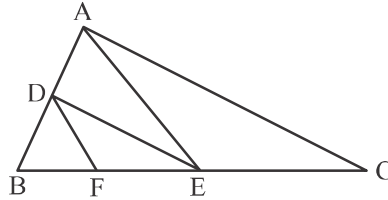


13. यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $BC = 3EF$ तथा $\text{ar}(\triangle ABC) = 117 \text{ cm}^2$ तो $\text{ar}(\triangle DEF)$ ज्ञात कीजिए।

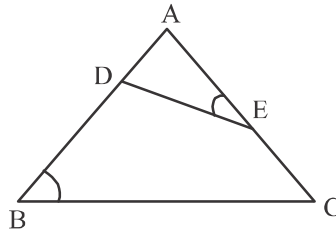
14. यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हो और $\angle A = 45^\circ$, $\angle F = 56^\circ$ तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
15. यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2 : 3 हो तो उनके संगत ऊँचाईयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
16. दिए गए चित्र में, $PQ = 24\text{cm}$, $QR = 26\text{cm}$, $\angle PAR = 90^\circ$, $PA = 6\text{cm}$ तथा $AR = 8\text{cm}$ तो $\angle QPR$ ज्ञात कीजिए।



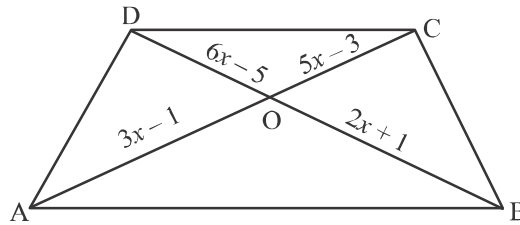
17. दिए गए चित्र में, $DE \parallel AC$ तथा $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए $\frac{FE}{BF} = \frac{EC}{BE}$ है।



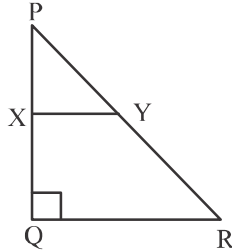
18. त्रिभुज ABC में, $AD \perp BC$ इसी प्रकार है कि $AD^2 = BD \times CD$ सिद्ध कीजिए $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।
19. दिए गए चित्र में, D तथा E, भुजाओं AB तथा CA पर दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle B = \angle AED$ है। सिद्ध करो कि $\triangle ABC \sim \triangle AED$ हैं।



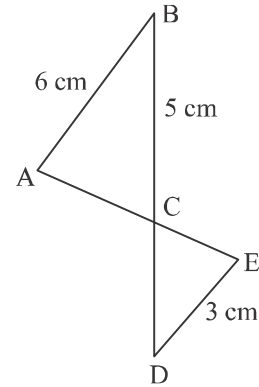
20. दिए गए चित्र में $AB \parallel DC$ तथा विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $OA = 3x - 1$, $OB = 2x + 1$, $OC = 5x - 3$ और $OD = 6x - 5$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



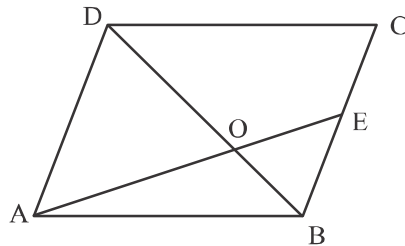
21. दिए गए चित्र में, त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ तथा $XY \parallel QR$ है। यदि $PQ = 6\text{cm}$, $PY = 4\text{cm}$ तथा $PX : XQ = 1 : 2$ तो PR और QR की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



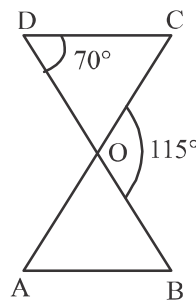
22. दिए गए चित्र में, $AB \parallel DE$. CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



23. दिए गए चित्र में, ABCD एक समचतुर्भुज है। AE रेखा खण्ड BD को 1 : 2 में विभाजित करता है। यदि $BE = 1.5\text{cm}$ हो तो BC ज्ञात कीजिए।

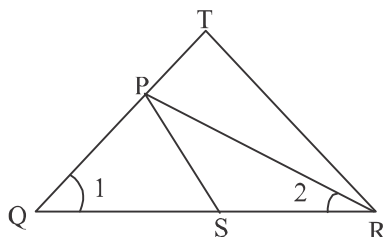


24. दिए गए चित्र में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 115^\circ$ तथा $\angle CDO = 70^\circ$ हो तो ज्ञात कीजिए (i) $\angle DOC$, (ii) $\angle DCO$, (iii) $\angle OAB$ और (iv) $\angle OBA$.



25. यदि दो समबाहु त्रिभुजों ΔABC तथा ΔPQR का परिमाण क्रमशः 144m और 96m हो तो $ar(\Delta ABC) : ar(\Delta PQR)$ ज्ञात कीजिए।

26. दिए गए चित्र में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ हो तो सिद्ध कीजिए $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

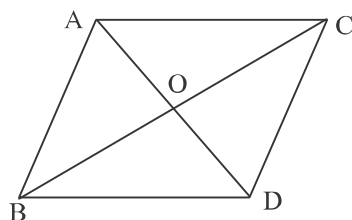


27. एक समबाहु ΔABC में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए $3BC^2 = 4AD^2$ है।

28. त्रिभुज ABC में, $\angle ACB = 90^\circ$ तथा $CD \perp AB$ हो तो सिद्ध कीजिए: $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.

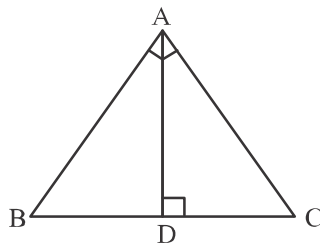
29. निम्न आकृति में, ΔABC और ΔDBC एक ही आधार पर BC पर है: AD और BC एक

दूसरे को O पर काटते हैं सिद्ध कीजिए $\frac{\text{क्षेत्रफल}(\Delta ABC)}{\text{क्षेत्रफल}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$

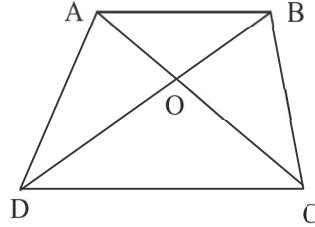


30. निम्न आकृति में, D त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु इस प्रकार है कि $\angle ADC$

$= \angle BAC$ । सिद्ध कीजिए $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

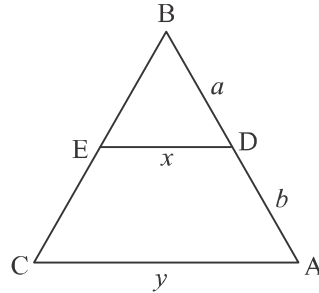


31. निम्न आकृति में, ABCD एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel DC$ है। विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{DO}$



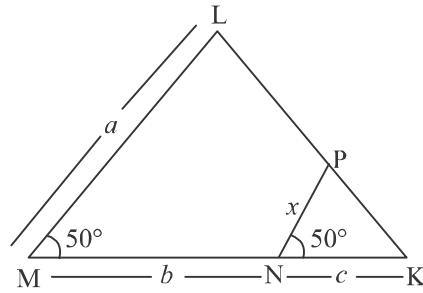
32. यदि AD और PS त्रिभुज ABC तथा त्रिभुज PQR की माध्यिकाएँ हैं जहाँ त्रिभुज $ABC \sim$ त्रिभुज PQR हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS}$.
33. त्रिभुज ABC में AD एक माध्यिका है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
34. दिए गए चित्र में $DE \parallel AC$ है, निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

$$x = \frac{a+b}{ay} \quad \text{या} \quad x = \frac{ay}{a+y}$$



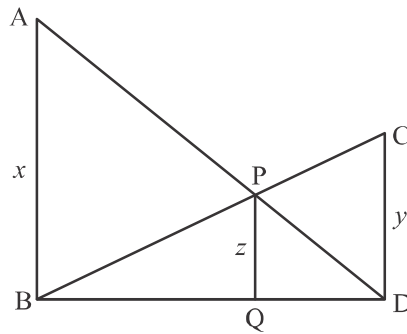
35. सिद्ध करो कि एक सम चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।
36. एक बिजली के खम्बे पर 6 मी. की ऊँचाई पर एक बल्ब लगाया गया है। अगर 1.5 मी. लम्बी महिला की परछाई 3 मी. हो तो खम्बे से महिला की दूरी ज्ञात कीजिए।
37. दो खम्बे जिनकी ऊँचाईयाँ क्रमशः a मीटर तथा b मीटर तथा हैं, आपस में p मीटर की दूरी पर स्थित हैं। सिद्ध करो कि इन खम्बों के शीर्षों को इनके सम्मुख खम्बों के पादों को मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की ऊँचाई $\frac{ab}{a+b}$ मीटर है।

38. दिए गए चित्र में a, b, c के रूप में x का मान ज्ञात कीजिए।

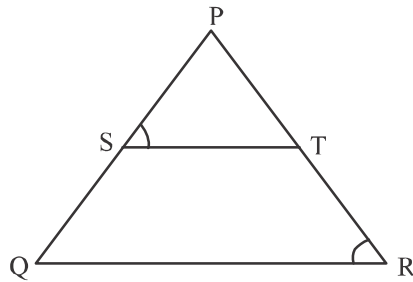


39. दिए गए चित्र में $AB \parallel PQ \parallel CD$, $AB = x$, $CD = y$ तथा $PQ = z$ है तो सिद्ध कीजिए,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

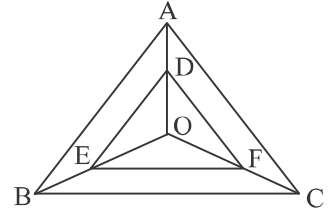


40. दिए गए चित्र में, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = \angle R$ सिद्ध कीजिए त्रिभुज PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

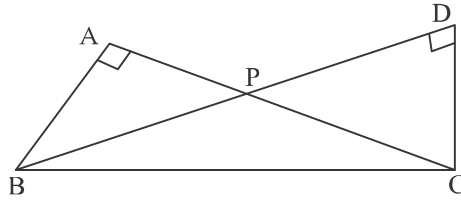


41. त्रिभुज ABC, $\angle C$ पर समकोण हैं। बिंदु P तथा Q भुजाओं CA तथा CB पर क्रमशः स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$

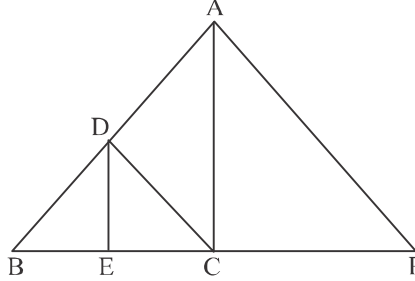
42. निम्न आकृति में, बिंदु O को त्रिभुजों के शीर्षों से मिलाया गया है। बिंदु D जो AO पर स्थित है, से $DE \parallel AB$ तथा बिंदु E जो OB पर स्थित है, से $EF \parallel BC$ खींची गई है। तो सिद्ध कीजिए $DF \parallel AC$



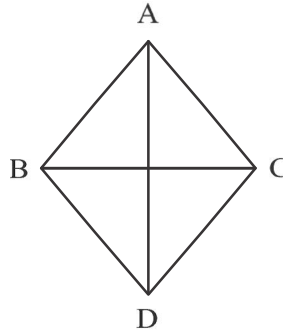
43. एक समबाहु ABC में, $AD \perp BC$, तो सिद्ध कीजिए $3AB^2 = 4AD^2$
44. समकोण त्रिभुज BAC और BDC क्रमशः A और D पर समकोण बनाती है तथा उभयनिष्ठ भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि भुजाएँ AC और BD एक दूसरे को P पर काटती हैं, तो सिद्ध करो कि $AP \times PC = DP \times PB$



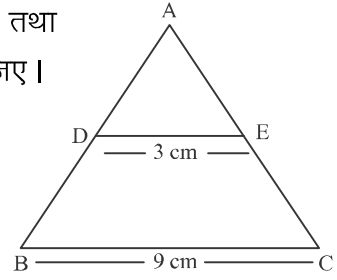
45. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई 25 सेमी है और बाकी दो भुजाओं में से एक भुजा दूसरी भुजा से 5 सेमी लम्बी है तो बाकी दोनों भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
46. दिए गए चित्र में, $DE \parallel AC$ तथा $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ हों तो सिद्ध कीजिए $DC \parallel AP$.



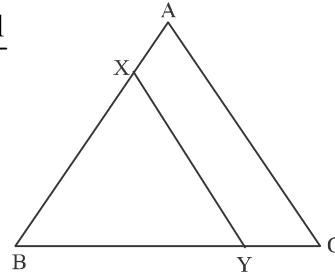
47. चतुर्भुज ABCD में $\angle B = 90^\circ$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$ है तो सिद्ध कीजिए $\angle ACD = 90^\circ$



48. दिए गए चित्र में, $DE \parallel BC$, $DE = 3$ सेमी, $BC = 9$ सेमी तथा $ar(\triangle ADE) = 30 \text{ cm}^2$. $ar(BCED)$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



49. पाइथागोरस प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए
50. यदि एक समबाहु त्रिभुज PQR में S भुजा QR का समत्रिभाजन बिन्दु है, तो सिद्ध करो कि: $9PS^2 = 7PQ^2$.
51. त्रिभुज $\triangle PQR$ में, $PD \perp QR$, D भुजा QR पर स्थित है। यदि $PQ = a$, $PR = b$, $QD = c$ तथा $DR = d$ और $a, b, c, d \dots\dots$ धनात्मक इकाई हों तो सिद्ध कीजिए $(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d)$.
52. एक समलंब ABCD में $AB \parallel DC$ तथा $DC = 2AB$ है यदि EF को AB के सामांतर खींचते हुए AD को F में तथा BC को E में इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $\frac{BE}{BC} = \frac{3}{4}$ विकर्ण DB, EF को G पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए $7EF = 10AB$.
53. सिद्ध कीजिए की दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
54. दिए गए चित्र में, $XY \parallel AC$ इस प्रकार है कि XY त्रिभुज ABC को दो बराबर क्षेत्रफलों में बाँटता है। सिद्ध कीजिए $\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$



55. ABCD एक समांतर चतुर्भुज में शीर्ष D से एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि वह रेखा भुजा BA तथा BC को E तथा F पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए:

$$\frac{DA}{AE} = \frac{FB}{BE} = \frac{FC}{CD}$$

56. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उत्तरमाला

1. नहीं
2. 16 सेमी
3. $x = \frac{ac}{b+c}$
4. 5 सेमी
5. $\angle D = \angle R$ सत्य, $\angle F = \angle P$ असत्य
6. 5 : 7
7. 24 सेमी
8. 2900 कि. मी.
9. 18 सेमी
10. $x = 3$
11. 1 : 3
12. $x = 2$
13. 13 वर्ग सेमी
14. 56°
15. 2 : 3
16. 90°
20. $x = 2$
21. PR = 12 सेमी, QR = $6\sqrt{3}$ सेमी
22. 2.5 सेमी
23. 3 सेमी
24. $65^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 70^\circ$
25. 9 : 4
34. $x = \frac{ay}{a+b}$
36. 9 मी.
38. $x = \frac{ac}{b+c}$
45. 15 सेमी, 20 सेमी
48. 240 वर्ग सेमी

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

त्रिभुज

समय : 50 मिनट

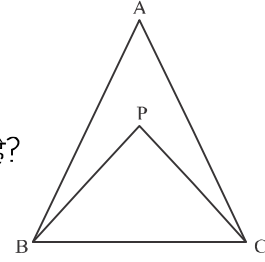
अंक : 20

खण्ड—अ

1. यदि एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई क्रमशः 16 सेमी तथा 12 सेमी है। समचतुर्भुज के भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 1
2. एक समबाहु त्रिभुज ABC, $AD \perp BC$ तथा $\frac{AD^2}{BC^2} = x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 1

खण्ड—ब

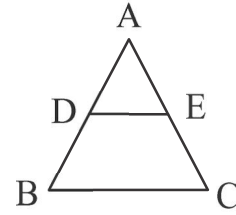
3. त्रिभुज ABC में, यदि $DE \parallel BC$, $AD = x + 1$, $DB = x - 1$, $AE = x + 3$ तथा $EC = x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2



4. दिए गए चित्र में, क्या ΔABC , ΔPBC के समरूप हैं? यदि हाँ तो कारण बताइये। 2

खण्ड—स

5. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ है। यदि $QS = SR$, तो सिद्ध कीजिए: $PR^2 = 4PS^2 - 3PQ^2$. 3
6. दिए गए चित्र में, $DE \parallel BC$ तथा $AD : DB = 5 : 4$, तो $\frac{\text{Area}(\Delta DFE)}{\text{Area}(\Delta CFB)}$ बताइये।



खण्ड—द

7. पाइथागोरस प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए। 4
8. ΔLMN एक समबाहु त्रिभुज है, O भुजा MN का समत्रिभाजन बिन्दु है, तो सिद्ध करो $\frac{LO^2}{LM^2} = \frac{7}{9}$. 4

□□□