LHL4BH

04

दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएँ (Linear Equation and Inequalities in two variables)

4.01 प्रस्तावना

किसी भी समस्या को हल करने के लिए उसे गणितीय रूप में निरूपित किया जाता है। हम जानते हैं कि समस्या एक या कई घटकों पर निर्भर होती है। पिछली कक्षा में हमने इस प्रकार की समस्याओं का समीकरण के रूप में निरूपण किया है। समस्या की स्थिति के अनुसार ये समीकरण एक चर दो चर या अधिक चरों पर आधारित होते हैं। यदि कोई समीकरण एक सरल रेखा को व्यक्त करता है तो रैखिक समीकरण कहलाता है। सामान्य रूप में $ax+b=0, a\neq 0$ जहां a, b वास्तविक संख्याऐं है, एक चर वाले रैखिक समीकरण को व्यक्त करता है। चर x के जिस मान पर यह समीकरण संतुष्ट होता है उसे इस समीकरण का हल कहते है। एक चर वाले रैखिक समीकरण का आलेख किसी भी एक अक्ष के समान्तर रेखा होती हैं। नवीं कक्षा में हमने दो चरों वाले रैखिक समीकरणों $ax+by+c=0;\ \ a,b\neq 0$ के आलेखों को बनाया है। x तथा y के जिन मानों के लिए यह समीकरण संतुष्ट होता है वह युग्म इसके हल कहलाते हैं। दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख (ग्राफ) भी एक सरल रेखा होता है। इस सरल रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु (x, y) इस समीकरण के हल को व्यक्त करता है।

यहाँ हम दो चरों x, y में दो रैखिक समीकरणों पर विचार करते हैं।

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \qquad \ldots (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0, \qquad \ldots (2)$$

जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ सभी वास्तविक संख्याएँ हैं, और a_1, b_1 तथा a_2, b_2 कोई भी शून्य नहीं है अर्थात् समीकरण (1) व (2) के लिए $a_1^2+b_1^2\neq 0$ एवं $a_2^2+b_2^2\neq 0$ प्रतिबन्ध है। ये दो रैखिक समीकरण उन्हीं दो चरों x, y में है। इस प्रकार के समीकरणों को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का एक युग्म कहते हैं। समीकरणों का यह युग्म एक युगपत रैखिक समीकरण (Simultaneous Linear Equations) निकाय कहलाता है। यहाँ हम इन समीकरणों के हल एवं इस हल की संगतता एवं असंगतता के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे।

इस अध्याय में हम असमिकाओं के बारे में भी पढ़ेंगे। यदि रैखिक समीकरणों में बराबर के चिह्न (=) के स्थान पर छोटा (<) बड़ा (>) या ये दोनों चिह्न बराबर के चिह्न के साथ ($\leq$) या ($\geq$) (sign of inequations) के रूप में प्रयुक्त होते हैं तो ये असमिकाएँ (inequations) कहलाती है। यहाँ हम दो चरों वाली असमिकाओं को आलेखीय (ग्राफीय) विधि द्वारा हल करेंगे। यह हल एक क्षेत्र के रूप में प्राप्त होता है। दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं के समूह(Set of Simultaneous Linear inequations) का हल भी आलेखन (ग्राफ) द्वारा उभयनिष्ठ क्षेत्र के रूप में प्राप्त किया जाता है।

4.02 दो चरों वाले रैखिक युगपत समीकरण (Simultaneous Linear Equation of two variables)

दो चरों वाली रैखिक समीकरणों का युग्म एक युगपत रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है। उदाहरणार्थ $5x+2y=17;$ $2x-5y=1$ या $x+2y=3;\ \ 2x-y=5$ आदि।

किसी भी रैखिक समीकरण युग्म को हल करना अर्थात् उसके दोनों चरों के ऐसे मान प्राप्त करना जो युग्म की दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यहाँ हम रैखिक युगपत समीकरणों के हल की प्रकृति के बारे में निम्न उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण-1. रैखिक युगपत समीकरण $3x+2y-5=0;\ \ 4x+7y-11=0$ के हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं। उक्त दोनों समीकरणों में $x=1$ और $y=1$ रखते है।

तब $\quad 3(1)+2(1)-5=0$

तथा $\quad 4(1)+7(1)-11=0$

अर्थात् $x=1$ और $y=1$ पर दोनों समीकरण संतुष्ट होते हैं अतः ये समीकरण युग्म के अभीष्ट हल है।

उदाहरण-2. रैखिक युगपत समीकरण $2x+7y=11;\ x-3y=5$ के $x=2$ तथा $y=1$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं।

उक्त दोनों समीकरणों में $x=2$ तथा $y=1$ रखते हैं। तब

$$2(2)+7\,(1)=11$$

अर्थात् प्रथम समीकरण संतुष्ट होता है।

दूसरे समीकरण के लिए x, y के दिये गए मान रखने पर,

$$2-3(1)=-1\neq 5$$

अतः दूसरा समीकरण $x=2, y=1$ पर संतुष्ट नहीं होता है। अर्थात् समीकरण युग्म का हल $x=2, y=1$ नहीं है।

उदाहरण-3. रैखिक समीकरण युग्म $x+2y-5=0;\ 2x+4y-10=0$ के $x=1, y=2$ तथा $x=3, y=1$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं।

स्थिति – 1, $x=1$ और $y=2$ पर युगपत समीकरण

$$1+2(2)-5=0$$

तथा $$2(1)+4(2)-10=0$$

समीकरण संतुष्ट होते हैं।

स्थिति – 2, $x=3$ और $y=1$ पर युगपत समीकरण

$$3+2\,(1)-5=0$$

तथा $$2(3)+4\,(1)-10=0$$

अतः इस स्थिति में भी समीकरण संतुष्ट है।

अर्थात् $x=1$ और $y=2$

तथा $x=3$ और $y=1$

दोनों ही दिए गए समीकरण युग्म के हल है। इस प्रकार इन समीकरणों के अनेक हल संभव है।

यहाँ इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि रैखिक समीकरण युग्म के 'अद्वितीय हल' अनेक हल या फिर कोई हल नहीं प्रकृति के हल प्राप्त हो सकते हैं। अतः यदि किसी युगपत समीकरण युग्म का हल ज्ञात किया जा सकता है चाहे वह अद्वितीय हो या अनेक हल प्राप्त हो, तो इस प्रकार के रैखिक समीकरण संगत (consistent) युग्म कहलाते हैं। और यदि हल प्राप्त नहीं होता है तो ऐसे युग्म असंगत (inconsistent) युग्म कहलाते हैं।

हम यहां उल्लेख करना चाहेंगे कि दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर यह एक सरल रेखा प्राप्त होता है। अतः रैखिक समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएँ एक समतल में प्राप्त होगी। जिनकी परस्पर स्थिति इस प्रकार हो सकती है।

(i) दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करे।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करे अर्थात् समान्तर हो।

(iii) दोनों रेखाएँ एक दूसरे का ढके अर्थात् संपाती हो।

आइए इन स्थितियों को हम आलेखीय निरूपण द्वारा समझते है एवं रैखिक समीकरण युग्म को संगत या अंसगत होने पर दोनों रेखाएँ किस प्रकार दिखाई पड़ती है।

4.03 रैखिक समीकरणों का आलेखीय निरूपण एवं हल

HATJ4Q

यहाँ हम निम्न उदाहरणों में लिए गए रैखिक समीकरण युग्मों के ग्राफीय (आलेखीय) निरूपण द्वारा इनके हल की प्रकृति पता लगाएंगे एवं समीकरणों के गुणांकों के परस्पर अनुपातों की तुलना कर हल की प्रकृति का आंकलन करेंगे।

उदाहरणार्थ निम्न रैखिक समीकरण युग्मों के ग्राफीय निरूपण करते हैं।

(i) $2x+3y=13;\ 5x-2y=4$

(ii) $2x+4y=10;\qquad 3x+6y=12$

(iii) $4x+6y=18;\qquad 2x+3y=9$

उदाहरण-4. समीकरण

$$2x+3y=13 \qquad \ldots(1)$$

$5x - 2y = 4$ . . . (2)

इनका तुल्य ज्यामितीय निरूपण करने के लिए समीकरण (1) एवं (2) में दी गई रेखाओं पर दो–दो बिन्दु प्राप्त करते हैं। सर्वप्रथम समीकरणों में $x = 0$ या $y = 0$ पर बिन्दु प्राप्त करने का प्रयास करते हैं चूंकि एक चर के शून्य होने पर समीकरण एक चर वाले रैखिक समीकरण में बदल जाती है जिससे दूसरे चर को सुगमता से प्राप्त किया जा सकता है।

समीकरण (1) में $x = 0$ या $y = 0$ पर दूसरे चर का मान एक पूर्णांक प्राप्त नहीं होता अतः हम सुगमता के लिए दूसरे मान रखकर बिन्दु प्राप्त करेंगे।

समीकरण (1) में $x = 2$ पर

$2 \times 2 + 3y = 13$ $\quad 3y = 13 - 4 = 9$ $\quad y = 3$

तथा $x = 5$ पर $\quad 2 \times 5 + 3y = 13$ $\quad 3y = 13 - 10 = 3$

$y = 1$

अतः बिन्दु निम्न सारणी अनुसार प्राप्त होंगे

x	2	5
y	3	1

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 0$

$5 \times 0 - 2y = 4$ $\quad y = -2$

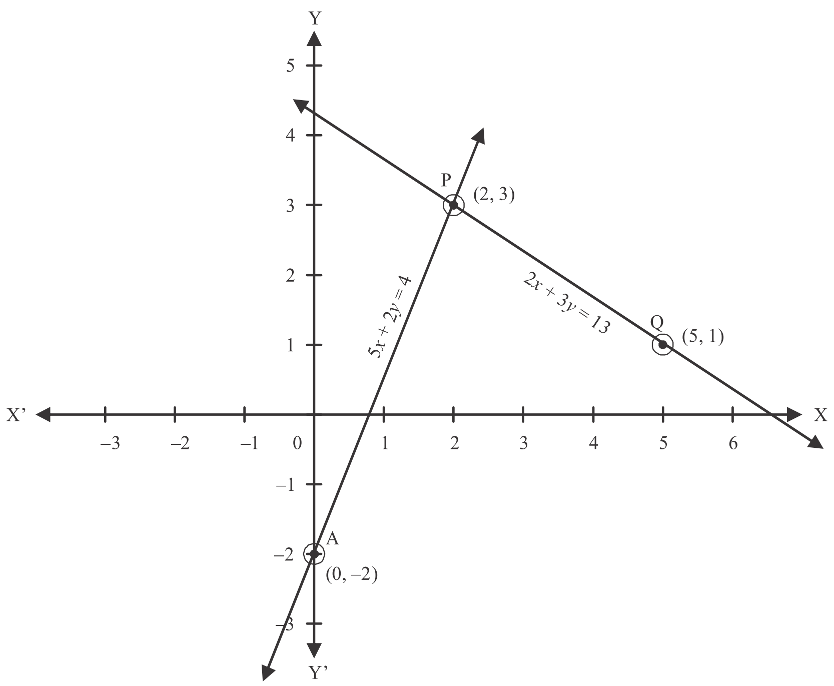
तथा $x = 2$ पर

$5 \times 2 - 2y = 4$ $\quad -2y = -6$ $\quad y = 3$

अतः समीकरण (2) के लिए बिन्दु निम्न प्रकार प्राप्त होंगे।

x	0	2
y	–2	3

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर निरूपित कर निम्न सरल रेखाएँ प्राप्त करते है। अर्थात् ग्राफ पेपर पर XOX' एवं YOY' अक्षों का निर्माण कर सारणी में दिए गए बिन्दुओं को मिलाकर सरल रेखा प्राप्त करते है।



ग्राफ (आलेख) 4.1

उपरोक्त चित्र में हम देखते हैं कि सरल रेखाएँ बिन्दु P(2,3) पर प्रतिच्छेद करती है।

उदाहरण-5. समीकरण युग्म

$$2x+4y=10 \quad \ldots(1)$$

$$3x+6y=12 \quad \ldots(2)$$

का तुल्य ज्यामितीय निरूपण करने के लिए निम्न प्रकार से बिन्दु ज्ञात करते हैं।

समीकरण (1) में $y=0$ पर

$$2x+4\times 0=10$$

$$x=5$$

तथा $x=1$ पर

$$2\times 1+4y=10$$

$$4y=10-2=8$$

$$y=2$$

अतः समीकरण (1) के लिए बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती हैं

x	5	1
y	0	2

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x=0$ पर

$$3\times 0+6y=12$$

$$6y=12$$

$$y=2$$

तथा $y=0$ पर

$$3x+6\times 0=12$$

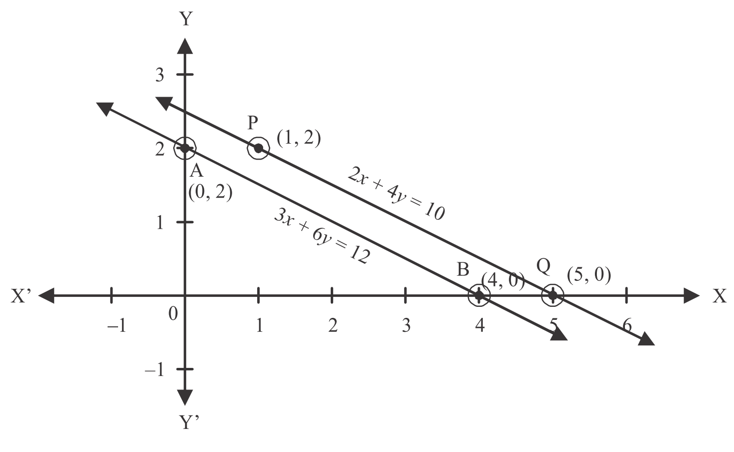
$$3x=12$$

$$x=4$$

अतः समीकरण (2) के लिए निम्न बिन्दु सारणी होगी

x	5	1
y	0	2

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करते हैं, एवं बिन्दुओं को मिलाकर निम्न ग्राफ (आलेख) प्राप्त करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.2

उपरोक्त चित्र में हम देखते है कि दोनों सरल रेखाएं एक दूसरे के समानान्तर है।

उदाहरण-6. समीकरण युग्म

$$4x + 6y = 18 \quad \ldots (1)$$

$$2x + 3y = 9 \quad \ldots (2)$$

में समीकरण (1) एवं (2) से बिन्दु प्राप्त करते हैं एवं इन रेखाओं का तुल्य ज्यामितीय निरूपण करते हैं।

समीकरण (1) में $x = 0$ पर

$$4 \times 0 + 6y = 18$$

$$6y = 18 \qquad \Rightarrow \qquad y = 3$$

तथा $y = 1$ पर

$$4x + 6 \times 1 = 18$$

$$4x = 18 - 6 = 12$$

$$x = 3$$

अतः बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	3
y	3	1

यहाँ समीकरण (2) के लिए $x = 0$ पर

$$2 \times 0 + 3y = 9$$

$$3y = 9 \qquad \Rightarrow \qquad y = 3$$

तथा $y = 1$ पर

$$2x + 3 \times 1 = 9$$

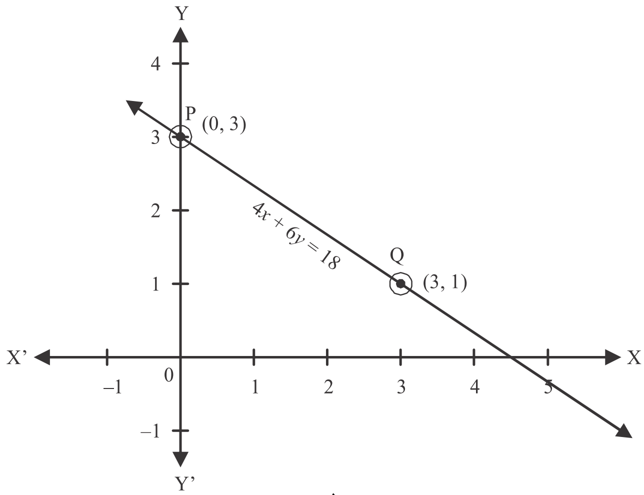
$$2x = 9 - 3 = 6$$

$$x = 3$$

इस प्रकार समीकरण (2) के लिए यहाँ निम्न बिन्दु सारणी प्राप्त होती है।

x	0	3
y	3	1

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं का ग्राफ पेपर पर आलेखन करते हैं एवं इस प्रकार प्राप्त रेखाओं का ग्राफ आलेख प्राप्त करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.3

उपरोक्त ग्राफ (आलेख) में दोनों रेखाएँ एक दूसरे को ढके हुए हैं अर्थात् दोनों रेखाऐं संपाती है। स्पष्ट है दोनों समीकरण तुल्य रेखाओं को प्रदर्शित करते हैं।

उपर्युक्त तीनों उदाहरणों (4), (5) व (6) में समीकरणों को निम्नलिखित प्रकार से व्यापक रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

तथा $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

यहाँ हम तीनों उदाहरणों के लिए x, y एवं अचर के गुणांकों की तुलना सारणी तैयार करते हैं तथा रेखा युग्मों की प्रकृति से इनके अनुपातों के सम्बन्धों की व्याख्या करते हैं।

तुलनात्मक सारणी

उदाहरण संख्या	समीकरण युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	गुणांक अनुपातों की तुलना	रेखाओं की प्रकृति	बीजीय हल
(i)	$2x + 3y = 13$ $5x - 2y = 4$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद रेखाएँ	अद्वितीय हल
(ii)	$2x + 4y = 10$ $3x + 6y = 12$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं
(iii)	$4x + 6y = 18$ $2x + 3y = 9$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अनेक हल

इस सारणी से स्पष्ट है कि रेखा युग्म

$$a_1x + b_1y + c = 0$$

$$a_2x + b_2y + c = 0$$

(i) परस्पर प्रतिच्छेद रेखाएँ है यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों का हल अद्वितीय होगा एवं प्रतिच्छेद बिन्दु (x, y) पर x, y के मान ही अभीष्ट हल होगा।

(ii) परस्पर समान्तर रेखाएँ है यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों का कोई हल नहीं होता।

(iii) परस्पर संपाती रेखाएँ हैं यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों के असीमित कई हल होंगे अर्थात् रेखाओं का प्रत्येक बिन्दु के लिए x, y के मान इसके हल होंगे।

विलोमतः यदि गुणांकों में सम्बन्ध दिए गए हैं तो रेखा युग्म की प्रकृति जाँची जा सकती हैं।

उपरोक्त व्याख्या से रैखिक समीकरणों को आलेखिक विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है।

आलेखीय विधिः

चरण–1: दिए गए रैखिक समीकरणों को मानक रूप में रखते हैं।

अर्थात् $a_1x+b_1y+c_1=0$ . . . (1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ . . . (2)

चरण–2: दोनों रेखाओं के समीकरणों से संगत बिन्दु सारणी तैयार कर रेखाएँ ग्राफ पेपर पर अक्षों XOX' एवं YOY' के निरूपण कर आलेखित करते हैं। माना रेखा L_1 समीकरण (i) एवं रेखा L_2 समीकरण (2) के संगत रेखा प्राप्त होती है।

चरण–3: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 किसी बिन्दु (α, β) पर प्रतिच्छेद करती है तो $x=\alpha$ तथा $y=\beta$ ही रेखा युग्म के संगत समीकरणों के हल होंगे।

चरण–4: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 समान्तर है तो कोई हल विद्यमान नहीं होगा अर्थात् समीकरण युग्म असंगत होगा।

चरण–5: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 संपाती है तो इनके अनन्त (असीमित) हल होंगे अर्थात् दोनों रेखाऐं एक ही समीकरण से व्यक्त की जा सकती है। एवं इस रेखा का प्रत्येक बिन्दु (α, β) रेखायुग्म के कई हलों $(x=\alpha, y=\beta)$ के रूप में प्राप्त होंगे।

यहाँ निम्न उदाहरणों के माध्यम से इस विधि को और अधिक स्पष्ट समझा जा सकेगा।

उदाहरण-7. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

(i) $3x+2y-11=0$

$2x-3y+10=0$

(ii) $2x+3y=8$

$x-2y=-3$

(iii) $2x+y-6=0$

$4x-2y-4=0$

हलः (i) दिए गए समीकरणों को निम्न प्रकार लिखने पर,

$3x+2y=11$ . . . (i)

$2x-3y=-10$ . . . (ii)

समीकरण (i) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है,

$y=1$ पर, $3x+2\times1=11$

$3x=11-2=9$

$x=3$

इसी प्रकार समीकरण (1) में $x=1$ पर

$3\times1+2y=11$

$2y=11-3=8$

$y=4$

अतः समीकरण (i) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	3	1
y	1	4

अब समीकरण (ii) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है।

$y=0$ पर, $2x-3\times0=-10$

$x=-5$

इसी प्रकार $y = 2$ पर, $2x - 3\times2 = -10$

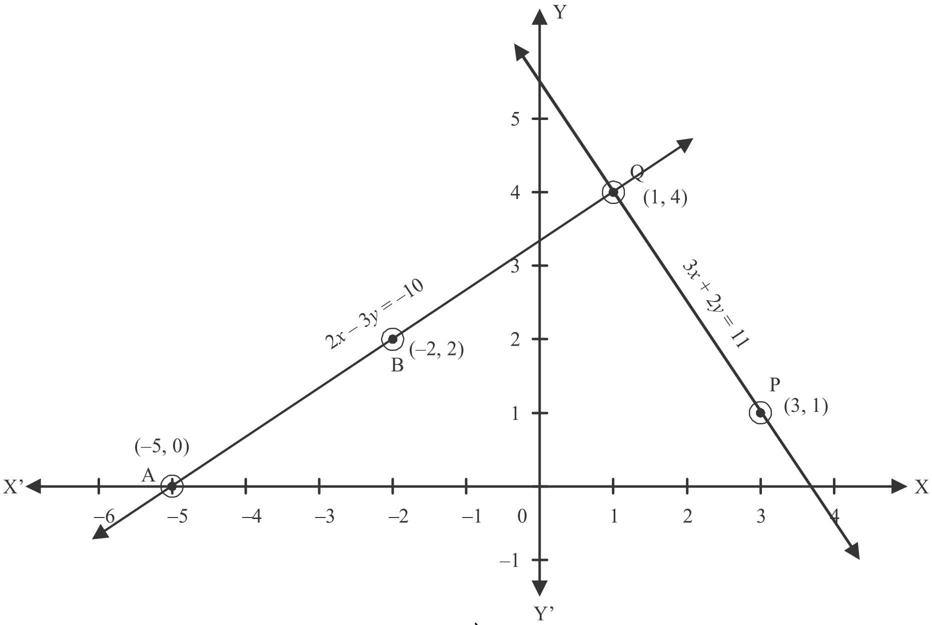
$2x = -4$

$x = -2$

अतः समीकरण (ii) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	-5	-2
y	0	2

उपरोक्त दोनों समीकरणों से संगत रेखाओं का ग्राफ पेपर पर आलेखन करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.4

उपरोक्त निरूपण से स्पष्ट है कि दोनों रेखाऐं बिन्दु (1, 4) पर प्रतिच्छेद करती है अतः $x = 1$ एवं $y = 4$ रेखायुग्म $3x + 2y = 11$; $2x - 3y = -10$ का अभीष्ट हल है। अर्थात् $x = 1, y = 4$ मान इन दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते है। अतः हल सत्यापित होता है।

हलः (ii) दिया गया समीकरण युग्म है

$$2x + 3y = 8 \qquad \ldots(1)$$

$$x - 2y = -3 \qquad \ldots(2)$$

हम समीकरण (1) की बिन्दु सारणी प्राप्त होते हैं,

$x = 1$ पर, $2\times1 + 3y = 8$

$3y = 8 - 2 = 6$

$y = 2$

इसी प्रकार $y = 0$ पर $2x + 3\times0 = 8$

$x = 4$

अतः समीकरण (1) की बिन्दु सारणी निम्न प्राप्त होती हैं।

x	1	4
y	2	0

अब हम समीकरण (2) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है।

समीकरण (2) में $y = 0$ पर $x - 2\times0 = -3$

$x = -3$

इसी प्रकार $x = 1$ पर $1 - 2y = -3$

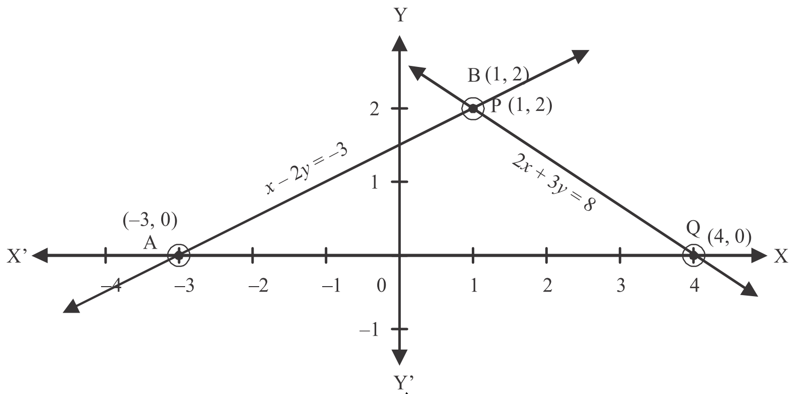
$$-2y = -4$$

$$y = 2$$

इस प्रकार निम्न बिन्दु सारणी समीकरण (2) के लिए प्राप्त होती है।

x	–3	1
y	0	2

उपरोक्त समीकरण (1) एवं (2) के संगत सारणीयों की सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखाओं की निरूपण करते है।



ग्राफ (आलेख) 4.5

उपरोक्त ग्राफ निरूपण से स्पष्ट है कि दोनों रेखाऐं बिन्दु (1,2) पर प्रतिच्छेद करती है। अतः $x = 1, y = 2$ रेखायुग्म $2x + 3y = 8;\ \ x - 2y = -3$ का अभीष्ट हल है। $x = 1$ एवं $y = 2$ मान दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

हल: (iii) दिए गए समीकरणों को निम्न प्रकार लिखने पर

$$2x + y = 6 \qquad \ldots (1)$$

$$4x - 2y = 4 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) के संगत बिन्दु सारणी प्राप्त करते हैं।

$x = 0$ पर $20 + y = 6$

$$y = 6$$

तथा $x = 1$ पर $2 \times 1 + y = 6$

$$y = 6 - 2 = 4$$

इस प्रकार समीकरण (1) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	1
y	6	4

अब समीकरण (2) के संगत बिन्दु सारणी प्राप्त करते है। समीकरण (2) में $x = 0$ पर $4 \times 0 - 2y = 4$

$$y = -2$$

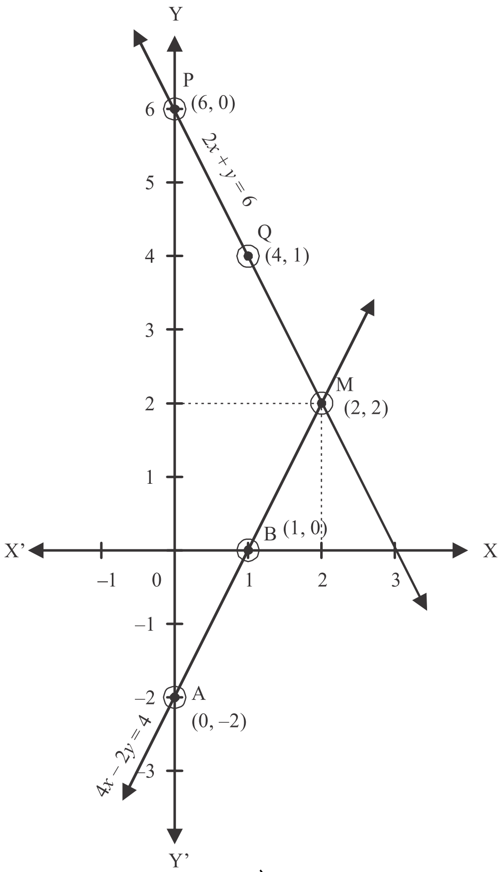
तथा $y = 0$ पर $4x - 2 \times 0 = 4$

$$x = 1$$

अतः समीकरण (2) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	1
y	–2	0

उपरोक्त समीकरण (1) एवं (2) से प्राप्त बिन्दु सारणियों की सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखायुग्म का निरूपण करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.6

उपरोक्त ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों रेखाएँ बिन्दु (2, 2) पर प्रतिच्छेद करती है अतः $x = 2, y = 2$ दिए गए रेखा युग्म समीकरणों का अभीष्ट हल है एवं इन समीकरणों को $x = 2, y = 2$ मान संतुष्ट करते है।

प्रश्नावली 4.1

1. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत है या असंगत।

   (i) $2x - 3y = 8;$ $\quad 4x - 6y = 9$ $\qquad$ (ii) $3x - y = 2;$ $\quad 6x - 2y = 4$

   (iii) $2x - 2y = 2;$ $\quad 4x - 4y = 5$ $\qquad$ (iv) $\frac{4}{3}x + 2y = 8;$ $\quad 2x + 3y = 12$

2. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को ग्राफीय विधि से हल कीजिए एवं हल की प्रकृति बताइए।

   (i) $x + y = 3;$ $\quad 3x - 2y = 4$ $\qquad$ (ii) $2x - y = 4;$ $\quad x + y = -1$

   (iii) $x + y = 5;$ $\quad 2x + 2y = 10$ $\qquad$ (iv) $3x + y = 2;$ $\quad 2x - 3y = 5$

3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों को आलेखीय विधि से हल कीजिए तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए जहाँ इनके द्वारा निरूपित रेखाएँ y– अक्ष को काटती हैं।

   (i) $2x - 5y + 4 = 0;$ $\quad 2x + y - 8 = 0$ $\qquad$ (ii) $3x + 2y = 12;$ $\quad 5x - 2y = 4$

4. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए तथा y– अक्ष तथा युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं से निर्मित त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

   $4x - 5y = 20;$ $\quad 3x + 5y = 15$

4.04 दो चर राशि वाली रैखिक असमिकाएँ

एक गणितीय कथन जिसमें चर एवं चिह्न $>, <, \geq$ या $\leq$ विद्यमान हो असमिका कहलाती है। असमिकाऐं एक चर वाली या एक से अधिक चर वाली हो सकती है। माना a एक अशून्य वास्तविक संख्या हैं तो चर x के लिए $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b>0$ और $ax+b\geq 0$ असमिकाएँ एक चर वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती है।

MB3F6D

यदि चरों की संख्या दो हो तो असमिकाएँ दो चर वाली कहलाती है उदाहरणार्थ $2x+3y\leq 6$ $x+y<4$, व्यापक रूप में हम दो चर वाली रैखिक असमिकाओं को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

माना a, b दो अशून्य वास्तविक संख्याएँ है x और y चरों के लिए असमिकाएँ $ax+by<c$, $ax+by\leq c$, $ax+by>c$ या $ax+by\geq c$ दो चरों वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती है।

इस अनुच्छेद में हम दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को हल करने के बारे में पढ़ेंगे। इन असमिकाओं के कई हल संभव है। सभी संभव हलों के समुच्चय को ही एक असमिका का हल समुच्चय (Solution set) कहते हैं।

4.05 आलेखन विधि द्वारा दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं का हल

यहाँ हम दो चरों x, y वाली रैखिक असमिकाओं का आलेखन विधि द्वारा हल करेंगे। निर्देशांक ज्यामिति में हमने पढ़ा है कि सरल रेखा $ax+by=c$, x, y तल में ग्राफ पेपर पर $x-$अक्ष एवं $y-$अक्ष के सापेक्ष समीकरण को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं को मिलाने पर निरूपित होती है।

MBCB81

सरल रेखा $ax+by=c$, $x\,y-$तल को दो भागों में विभाजित करती है।

अर्थात् ये विभाजित क्षेत्र $ax+by\leq c$ एवं $ax+by\geq c$ द्वारा व्यक्त किये जा सकते है। इन्हें संवृत एवं खुला अर्धआकाशीय क्षेत्रों के रूप में निम्न समुच्चयों से व्यक्त करते हैं। समुच्चय निरूपण में

समुच्चय $\{(x,y): ax+by=c\}$ सरल रेखा, समुच्चय $\{(x,y): ax+by\leq c\}$ तथा $\{(x,y): ax+by\geq c\}$ संवृत अर्ध आकाशीय क्षेत्र और समुच्चय $\{(x,y): ax+by<c\}$ तथा $\{(x,y): ax+by>c\}$ विवृत या खुला अर्ध आकाशीय क्षेत्र को प्रदर्शित करते हैं। ये सभी अर्ध आकाशीय क्षेत्र असमिकाओं के हल समुच्चय कहलाते हैं।

इस प्रकार की दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को ग्राफीय (आलेखन) विधि द्वारा निम्न चरणों में हल किया जा सकता है।

चरण–1: दी गई असमिका को समीकरण रूप में लिखिए यह एक सरल रेखा को व्यक्त करेगी।

चरण–2: अब सरल रेखा के समीकरण में $x=0$ रखकर y-अक्ष पर कटान बिन्दु प्राप्त कीजिए एवं $y=0$ रखकर x - अक्ष पर रेखा के कटान बिन्दु प्राप्त कीजिए।

चरण–3: उपरोक्त दोनों कटान बिन्दुओं को मिलाकर सरल रेखा का निरूपण कीजिए।

चरण–4: अब एक बिन्दु (मूल बिन्दु भी हो सकता है) लेकर उसके निर्देशांकों के मान असमिका में रखते है। यदि इस बिन्दु के निर्देशांक असमिका को संतुष्ट करते हैं तो सरल रेखा से लेकर बिन्दु की तरफ वाले क्षेत्र को छांयाकित कर दीजिए। यही छायांकित क्षेत्र असमिका का अभीष्ट हल समुच्चय है।

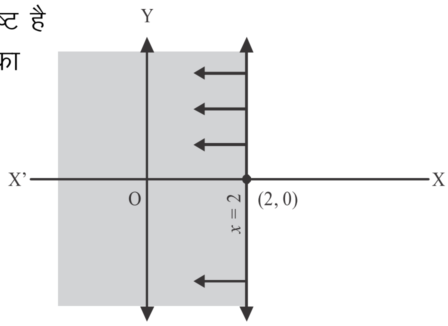
यदि मूल बिन्दु असमिका को संतुष्ट नहीं करता है तो छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की विपरीत होगा एवं यही क्षेत्र असमिका का अभीष्ट हल होगा।

किसी असमिका को हल करने की उपरोक्त विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट समझी जा सकती है।

उदाहरण-8. निम्न असमिकाओं को आलेखन विधि से हल कीजिए।

(i) $x\leq 2$ (ii) $2x-y\geq 1$ (iii) $|y-x|\leq 3$

हल: (i) असमिका $x\leq 2$ को समीकरण में बदलने पर $x=2$ प्राप्त होता है। स्पष्ट है यह सरल रेखा y-अक्ष के समान्तर है एवं x-अक्ष के बिन्दु $(2, 0)$ से गुजरेगी। इसका ग्राफ (आलेख) 4.7 के अनुरूप प्राप्त होता है।

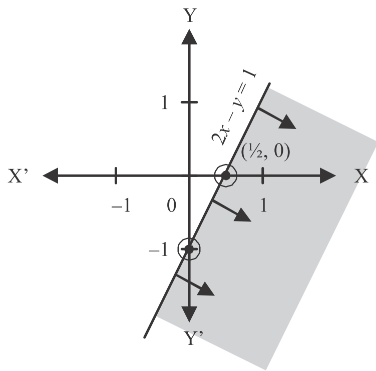


ग्राफ (आलेख) 4.7

अब मूल बिन्दु $(0, 0)$ से असमिका $x \le 2$ संतुष्ट होती है अतः क्षेत्र रेखा $x = 2$ से मूल बिन्दु की ओर आच्छादित (छायांकित) क्षेत्र ही इसका हल समुच्चय होगा।

(ii) असमिका $2x - y \ge 1$ को समीकरण रूप में बदलने पर $2x - y = 1$ प्राप्त होता है।

इस समीकरण में $x = 0$ रखने पर, $y = -1$ प्राप्त होता है अतः y-अक्ष पर बिन्दु $(0, -1)$ कटान बिन्दु है इसी प्रकार समीकरण में $y = 0$ रखने पर, $x = \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है। अतः $x-$ अक्ष पर बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ कटान बिन्दु प्राप्त हुआ दोनों कटान बिन्दु $(0, -1)$ एवं $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ को मिलाने पर इसका ग्राफ आलेखन चित्र निम्न प्राप्त होता है।



ग्राफ (आलेख) 4.8

अब मूल बिन्दु (0, 0) से असमिका $2x - y \ge 1$ संतुष्ट नहीं होती अर्थात् $2 \times 0 - 0 \ge 1$ सत्य नहीं है। अतः रेखा $2x - y = 1$ से मूल बिन्दु के विपरीत छायांकित क्षेत्र ही इसका हल समुच्चय होगा।

(iii) यहाँ दी गई असमिका $|y - x| \le 3$ है इसे मोड्यूलस को हटाने पर निम्नानुसार लिखा जा सकता है–

$$-3 \le y - x \le 3$$

इसे पुनः निम्नानुसार दो असमिकाओं के रूप में लिखा जा सकता है।

$$-3 \le y - x$$

तथा $y - x \le 3$

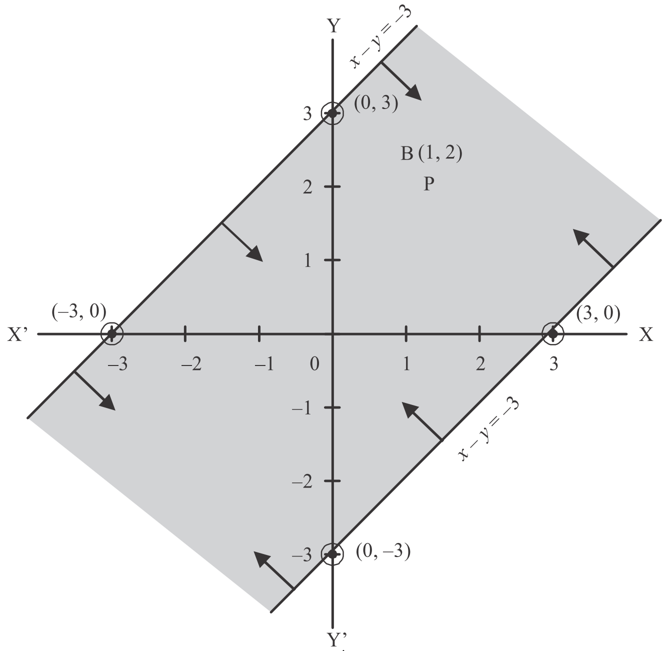
अर्थात् $x - y - 3 \le 0$ ... (i)

तथा $x - y + 3 \ge 0$ ... (ii)

असमिका (i) को समीकरण रूप में लिखने पर $x - y - 3 = 0$ प्राप्त होता है।

इसके X-अक्ष पर कटान बिन्दु $(3, 0)$ एवं Y-अक्ष पर कटान बिन्दु $(0, -3)$ प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार द्वितीय (ii) असमिका को समीकरण रूप में लिखने पर $x - y + 3 = 0$ प्राप्त होता है।

इस रेखा के X-अक्ष पर कटान बिन्दु $(-3, 0)$ एवं Y-अक्ष पर कटान बिन्दु $(0, 3)$ प्राप्त होते है। अब इन दोनों रेखाओं के ग्राफ (आलेख) 4.9 के अनुसार प्राप्त होते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.9

अब मूल बिन्दु $(0, 0)$ से असमिका $x - y - 3 \le 0$ संतुष्ट होती है। अर्थात् $0 - 0 - 3 \le 0$ सत्य है अतः इसका छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की ओर होगा।

दूसरी असमिका $x - y + 3 \ge 0$ भी मूल बिन्दु $(0, 0)$ से संतुष्ट होती है अर्थात् $0 - 0 + 3 \ge 0$ सत्य है। अतः इसका छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की ओर ही होगा। अतः दोनों रेखाओं के मध्य का छायांकित क्षेत्र ही अभीष्ट हल समुच्चय होगा।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्न असमिकाओं का आलेखीय विधि से हल समुच्चय दर्शाइये।

   (i) $x \ge 2$ (ii) $y \le -3$ (iii) $x - 2y < 0$ (iv) $2x + 3y \le 6$

2. निम्न असमिकाओं का आलेखीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

   (i) $|x| \le 3$ (ii) $3x - 2y \le x + y - 8$ (iii) $|x - y| \ge 1$

विविध प्रश्नमाला–4

1. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $x + y - 4 = 0;\ 2x + ky - 3 = 0$ का कोई हल नहीं होगा–

   (क) 0 (ख) 2 (ग) 6 (घ) 8

2. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $3x - 2y = 0$ तथा $kx + 5y = 0$ के अनन्त हल होंगे–

   (क) $\frac{1}{2}$ (ख) 3 (ग) $\frac{-5}{3}$ (घ) $\frac{-15}{2}$

4. समीकरण युग्म $kx - y = 2;\ 6x - 2y = 3$ का हल अद्वितिय होगा यदि

   (क) $k = 2$ (ख) $k = 3$ (ग) $k \ne 3$ (घ) $k \ne 0$

4. असमिकाओं $x \ge 0, y \ge 0$ के संगत समीकरण व्यक्त करते हैं–

   (क) x-अक्ष को (ख) y-अक्ष को (ग) x एवं y-अक्षों को (घ) $x = y$ रेखा को

5. असमिका $y - 3 \le 0$ के संगत रेखा के लिए निम्न कथन सत्य है–

   (क) x-अक्ष के समान्तर है (ख) y-अक्ष के समान्तर है

   (ग) x-अक्ष को विभाजित करती है (घ) मूल बिन्दु से गुजरती है

6. निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हलों की संख्या लिखिए।

   $x + 2y - 8 = 0; 2x + 4y = 16$

7. यदि समीकरण युग्म $2x + 3y = 7; (a + b)x + (2a - b)y = 21$ के अनन्त हल हो तो a, b के मान ज्ञात कीजिए।

8. असमिका $|x| \le 3$ के हल समुच्चय को छायांकित कीजिए।

9. असमिका $2x + 3y \ge 3$ के हल समुच्चय को छायांकित कीजिए।

10. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को आलेखीय विधि से हल कीजिए तथा इसकी सहायता से 'a' का मान ज्ञात कीजिए जबकि $4x + 3y = a$ है। $x + 3y = 6; 2x - 3y = 12$

11. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखिक विधि से हल कीजिये तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिये जहाँ इनके द्वारा निरूपित रेखाएँ y– अक्ष को काटती है। $3x + 2y = 12;\ 5x - 2y = 4$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ है तो दो चरों x, y वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप $ax+by+c=0$ जहाँ $a, b \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।
2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ द्वारा दिया जाता है। x, y के मानों का वह युग्म जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता हैं, रैखिक समीकरण युग्म (युगपत समीकरण) का हल कहलाता है।
4. दो चरों वाली रैखिक समीकरण युग्म 'संगत' युग्म कहलाते हैं यदि इस युग्म का कम से कम एक हल हो। यदि किसी युग्म का कोई हल न हो तो ऐसे युग्म 'असंगत' युग्म कहलाते है।
4. रेखा युग्म $a_1x+b_1y+c=0$

   $a_2x+b_2y+c=0$

   के गुणांको में सम्बन्ध देखकर इसके हल की प्रकृति निम्न प्रकार जाँची जा सकती हैं–

   (i) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ हो तो हल अद्वितीय होगा एवं युग्म संगत होगा।

   (ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ हो तो युग्मों का कोई हल नहीं होगा एवं युग्म असंगत होगा।

   (iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ हो तो हल असीमित होंगे एवं युग्म संगत होगा।
5. दो चरों वाली रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय (ग्राफीय) विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है

   (i) दोनों रेखाओं के समीकरणों से संगत बिन्दु सारणी प्राप्त कर इसकी सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखाँग्रिरूपित करते है।

   (ii) यदि दोनों रेखाएँ बिन्दु (α, β) पर प्रतिच्छेद करे तो $x=\alpha, y=\beta$ रैखिक समीकरण युग्म का अभीष्ट हल होगा।

   (iii) यदि रेखाऐं संपाती है तो इनके अनन्त हल होंगे एवं दोनों रेखाएँ एक ही समीकरण से व्यक्त की जा सकती है अतः प्रत्येक बिन्दु (α, β) हल $x=\alpha, y=\beta$ के रूप में प्राप्त होंगे।

   (iv) यदि रेखाएँ समान्तर है तो कोई हल विद्यमान नहीं होगा।
6. यदि a, b दो अशून्य वास्तविक संख्याएँ है तब x और y चरों के लिए असमिकाएँ $ax+by<c$, $ax+by \leq c$, $ax+by>c$ या $ax+by \geq c$ दो चरों वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती हैं।
7. दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को ग्राफीय आलेखन विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है–

   (i) दी गई असमिकाओं को समीकरण रूप में लिखिए।

   (ii) उक्त समीकरणों में $x=0$ रखकर y-अक्ष पर कटान बिन्दु एवं $\mathrm{y}=0$ रखकर x-अक्ष पर कटान बिन्दु प्राप्त कर दोनों कटान बिन्दुओं को मिलाकर संगत सरल रेखाऐं ग्राफ पेपर पर एक ही अक्षीय निकाय पर निरूपित करते हैं।

   (iii) अब मूल बिन्दु $(0, 0)$ के निर्देशांक से असमिका को संतुष्ट करते हैं। यदि संतुष्ट होती हैं तो हल समुच्चय संगत रेखा से मूल बिन्दु की ओर का छायांकित क्षेत्र होगा। यदि मूल बिन्दु $(0, 0)$ असमिका को संतुष्ट नहीं करता है तो हल समुच्चय रेखा से मूल बिन्दु के विपरीत ओर का छायांकित क्षेत्र होगा।

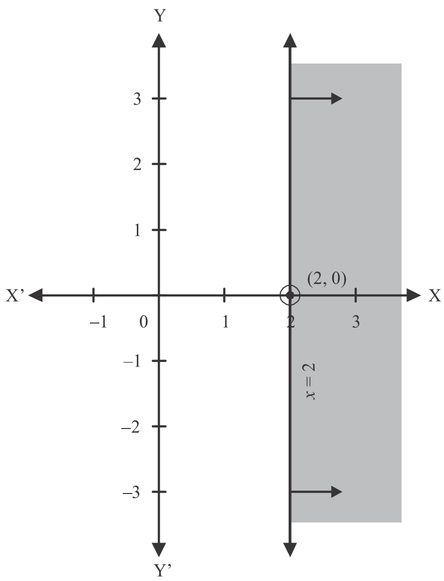
   (iv) इस प्रकार सभी रैखिक असमिकाओं का उभयनिष्ठ छायांकित क्षेत्र रैखिक असमिकाओं के निकाय का अभीष्ट हल समुच्चय होगा।
8. अभीष्ट हल सभी असमिकाओं को संतुष्ट करने वाला छायांकित क्षेत्र (Common rigion) होगा। यह हल समुच्चय रिक्त समुच्चय, परिबद्ध या अपरिबद्ध (Bounded or unbounded) क्षेत्र भी हो सकता है।

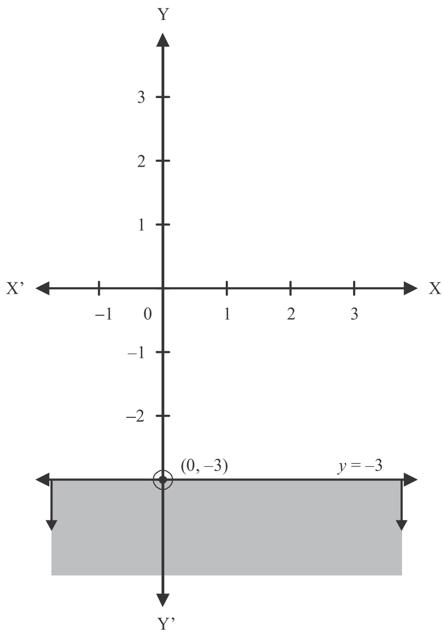
उत्तरमाला

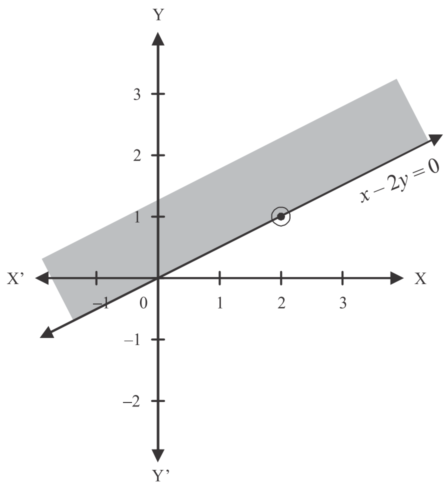
प्रश्नमाला 4.1

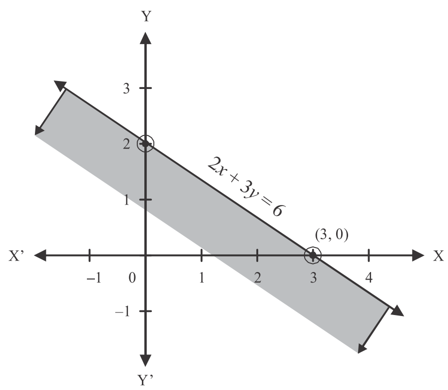
1. (i) असंगत (ii) संगत (iii) असंगत (iv) संगत
2. (i) अद्वितीय हल $x = 2, y = 1$ (ii) अद्वितीय, $x = 1, y = -2$ (iii) अनन्त हल
   (iv) अद्वितीय, $x = 1, y = -1$
3. (i) $x = 3, y = 2$; (0, 415), (0, 8) (ii) $x = 2, y = 3$; (0, 6), (0, –2)
4. $x = 5$, y = 0; (5, 0), (0, 3), (0, –4)

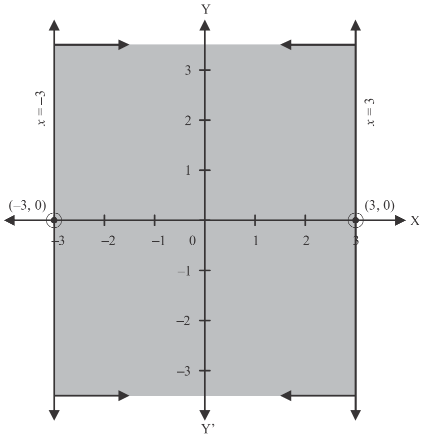
प्रश्नमाला 4.2

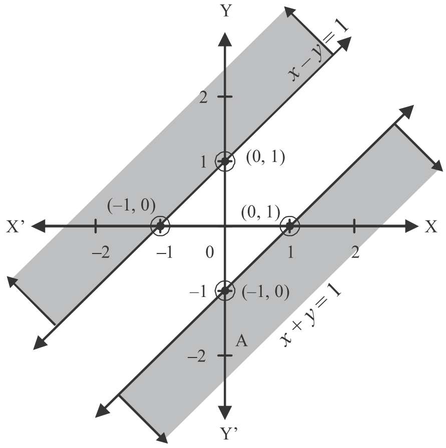
1. (i) 

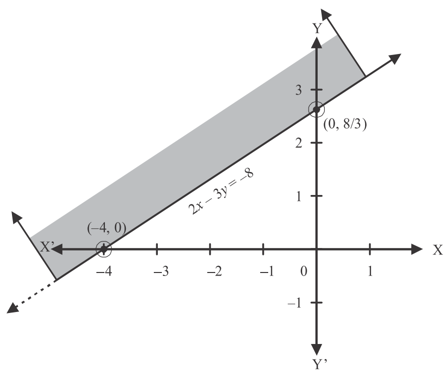
(ii) 

(iii) 

(iv) 

2. (i) 

(ii) 

(iii) 

विविध प्रश्नमाला–4

1. (ख) 2. (घ) 3. (ग) 4. (ग) 5. (क)

6. अनन्त हल 7. $a = 5, b = 1$ 10. $x = 6, y = 0$ अतः $a = 24$

11. $x = 2, y = 3$; (0, 6) और (0, –2)