

8

अध्याय

त्रिकोणमिति का परिचय

1. त्रिकोण भित्ति अनुपात : $\triangle ABC$ में $\angle B = 90^\circ$ कोण A के लिए—

$$\sin A = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

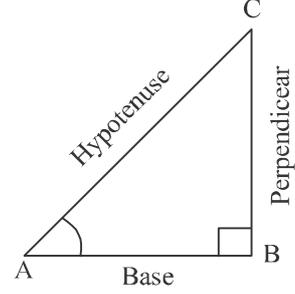
$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$



2. व्युत्क्रम

$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

3. आनुपातिक संबंध

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

4. सर्वसामिकाएं

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ और } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \text{ और } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \Rightarrow \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 \text{ और } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

5. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात:

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
Sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
Cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
Cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

6. पूरक कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $\sin \theta = \cos \theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan \theta = \cot (30^\circ + \theta)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\sin \theta = \cos (\theta - 6^\circ)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\cos A = \frac{7}{25}$ तो $\tan A + \cot A$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. यदि $\tan \theta = \frac{4}{3}$ तो $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. यदि $3x = \operatorname{Cosec} \theta$ और $\frac{3}{x} = \cot \theta$ तो $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान बताइए।
7. यदि $x = a \sin \theta$ तथा $y = a \cos \theta$ तो $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. $\operatorname{Cosec} 70^\circ - \sec 20^\circ$ का मान बताइए।
9. यदि $5x = \sec \theta$ और $\frac{5}{x} = \tan \theta$ तो $5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।
10. $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ का मान बताइए।
11. $\sec \theta$ को $\cot \theta$ में व्यक्त कीजिए।
12. $\cos \theta \cos (90^\circ - \theta) - \sin \theta (90^\circ - \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।
13. यदि $\sin (20^\circ + \theta) = \cos 30^\circ$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
14. $\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta}$ का मान बताइए।
15. $\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

सिद्ध कीजिए

16. $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$
17. $\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \tan \theta + \sec \theta$
18. यदि $x = p \sec \theta + q \tan \theta$ और $y = p \tan \theta + q \sec \theta$ तो सिद्ध कीजिए $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$

19. यदि $7 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 4$ तो दिखाइए $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
20. यदि $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।
21. $\frac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{\sin^2 59^\circ + \sin^2 31^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए
22. सिद्ध कीजिए: $\tan 1^\circ \tan 11^\circ \tan 21^\circ \tan 69^\circ \tan 79^\circ \tan 89^\circ = 1$
23. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ तो A का मान ज्ञात कीजिए
24. यदि $3 \cot A = 4$, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A + 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।
25. यदि $\tan(3x - 15^\circ) = 1$ तो x का मान बताइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए:

26. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$
27. $\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sec x + \tan x}$
28. $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta + 1$
29. $(\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2 = 7 + \tan^2 \theta + \cot^2 \theta$
30. $\sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$
31. यदि $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ तो दिखाइए कि $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$
32. यदि $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$ तो दिखाइए कि $m^2 - n^2 = 4 \sqrt{mn}$.
33. यदि $\sec \theta = x + \frac{1}{4x}$, तो सिद्ध करिए $\sec \theta + \tan \theta = 2x$ या $\frac{1}{2x}$

34. यदि $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ तो सिद्ध करिए $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$
35. त्रिकोणमितिय सारणी को प्रयोगकिये बिना।
 $\cot \theta \tan (90^\circ - \theta) - \sec (90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta + \sin^2 65^\circ + \sin^2 25^\circ + \sqrt{3} \tan 5^\circ \tan 85^\circ$ का मान ज्ञात करिए
36. सिद्ध करिए $\frac{\cot (90^\circ - \theta)}{\tan \theta} + \frac{\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) \sin \theta}{\tan (90^\circ - \theta)} = \sec^2 \theta$
37. $\frac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{\sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ} + 2 \operatorname{cosec}^2 58^\circ - 2 \cot 58^\circ \tan 32^\circ - 4 \tan 13^\circ \tan 37^\circ \tan 77^\circ \tan 45^\circ \tan 53^\circ$. का मान ज्ञात कीजिए।
38. यदि A, B, C त्रिभुज ABC के अंत कोण है तो सिद्ध कीजिए $\operatorname{cosec}^2 = \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{B+C}{2} \right) - \tan^2 \frac{A}{2} = 1$
39. $\sec^2 10^\circ - \cot^2 80^\circ + \frac{\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos \theta \sin (90^\circ - \theta) + \sin \theta \cos (90^\circ - \theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।
40. सिद्ध कीजिए $\frac{\tan \theta - \cot \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan^2 \theta - \cot^2 \theta$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

सिद्ध कीजिए:

41. $\frac{\sec \theta + \tan \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$
42. $\left(1 + \frac{1}{\tan^2 A} \right) \left(1 + \frac{1}{\cot^2 A} \right) = \frac{1}{\sin^2 A - \sin^4 A}$
43. $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0$
44. $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \sin A \tan A - \cot A \cos A$
45. यदि $\sin \theta + \cos \theta = m$ और $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = n$ तो दिखाइए $n(m^2 - 1) = 2m$

$$46. \frac{\cot(90^\circ - \theta) \tan \theta - \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) \sec \theta}{\sin 12^\circ \cos 15^\circ \sec 78^\circ \operatorname{cosec} 75^\circ} + \frac{\cos^2(50^\circ + \theta) \tan^2(40^\circ - \theta)}{\tan 15^\circ \tan 37^\circ \tan 53^\circ \tan 75^\circ}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

47. सर्वसमिका सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}$$

48. यदि $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = m$ और $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = n$ है तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2) \cos^2 \beta = n^2$

49. यदि $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$, है, तो सिद्ध कीजिए $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

50. सिद्ध कीजिए:

$$\sec^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta - 2\sin^4 \theta}{2\cos^4 \theta - \cos^2 \theta} = 1$$

51. $\cot \theta \tan(90^\circ - \theta) - \sec(90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta + \sqrt{3} \tan 12^\circ \tan 60^\circ \tan 78^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

52. मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\sec(90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta - \tan(90^\circ - \theta) \cot \theta + \cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ}{3 \tan 27^\circ \tan 63^\circ}$$

उत्तरमाला

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. 45° | 2. 30° |
| 3. 24° | 4. $\frac{625}{168}$ |
| 5. 7 | 6. $\frac{1}{3}$ |
| 7. a | 8. 0 |
| 9. $\frac{1}{5}$ | 10. 9 |
| 11. $\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}{\cot \theta}$ | 12. 0° |
| 13. 50° | 14. $\tan^2 \theta$ |
| 15. $\tan \theta$ | 16. |
| 17. | 18. |
| 19. | 20. $A = 45^\circ, B = 15^\circ$ |
| 21. 1 | 22. |
| 23. 22° | 24. $\frac{17}{8}$ |
| 25. 20° | 35. $\sqrt{3}$ |
| 37. -1 | 39. 2 |
| 46. 0 | |
| 51. 2 | 52. $\frac{2}{3}$ |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

त्रिकोणमिति का परिचय

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

1. यदि $\sin \theta = \frac{4}{5}$ तो $\cos \theta$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
2. $\sin(45^\circ + \theta) - \cos(45^\circ - \theta)$ का मान बताइए। 1

खण्ड—ब

3. यदि $5 \tan \theta = 4$ तो $\frac{5 \sin \theta - 3 \cos \theta}{5 \sin \theta + 2 \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
4. $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड—स

5. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{Cosec} \theta$ 3
6. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{1 - \tan A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A} = \sin A + \cos A$ 3

खण्ड—द

7. यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ तथा $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। 4
8. सिद्ध कीजिए : $\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$ 4

□□□