बिन्दु पथ

Ex 10.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथनों में से सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए

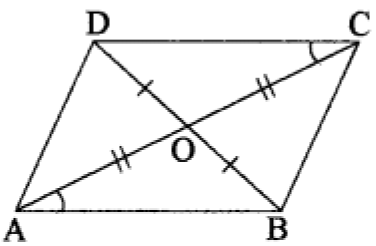
1. किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का समुच्चय एक रेखा होती
2. एक वृत्त उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ है जो किसी दिए गए बिन्दु से नियत दूरी पर स्थित है।
3. तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगे जब वह एक रेखा के बिन्दुओं के समुच्चय के अवयव नहीं हों।
4. दो रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ दोनों रेखाओं के समान्तर रेखा होगी।
5. दो दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्बअर्द्धक होता है।

उत्तर:

1. असत्य है क्योंकि किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ उसके दोनों ओर उस रेखा के समान्तर रेखाएँ होती हैं।
2. सत्य है। एक वृत्त उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ है जो किसी दिये गये बिन्दु से नियत दूरी पर स्थित है। ये दिया गया बिन्दु तथा नियत दूरी त्रिज्या होती है।
3. असत्य है क्योंकि तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगे जब तीनों उस एक रेखा पर स्थित हों जिसके सभी बिन्दुओं के समुच्चयों में से तीनों दिए गए बिन्दु भी समुच्चय के अवयव हों।
4. असत्य है क्योंकि यह निर्भर करता है। दोनों रेखाएँ किस स्थिति में स्थित हैं। यदि दोनों समान्तर हों तो उनके समान्तर रेखा होगी और यदि प्रतिच्छेदी रेखाएँ हों तो प्रतिच्छेदी बिन्दुओं पर बनने वाले.कोण के अर्द्धक वाली रेखा होगी।
5. सत्य है। दो दिये गये बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्द्धक (लम्ब समद्विभाजक) होता है।

प्रश्न 2. एक चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि यह चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज है।

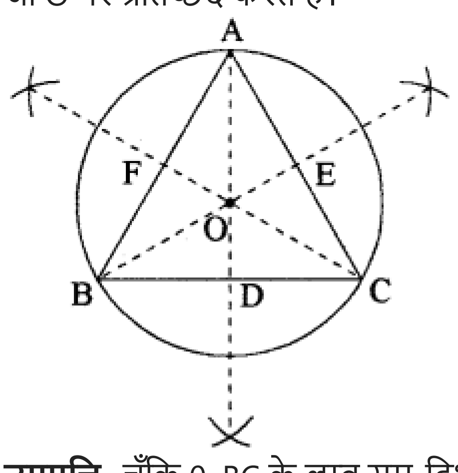
हल: दिया है–
एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर।
Pसमद्विभाजित करते हैं, अर्थात्
OA = OC और OB = OD



सिद्ध करना है- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
उत्पत्ति- ΔAOB और Δ COD में
OA = OC (दिया है)
∠AOB = ∠COD (शीर्षाभिमुख कोण) और
OB = OD (दिया है)।
अतः भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से ΔAOB = ΔCOD (SAS सर्वांगसमता से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे। अर्थात्। ∠OAB = ∠OCD
परन्तु यह तिर्यक रेखा AC द्वारा रेखाओं AB और CD पर बने एकान्तर कोण हैं।
अतः AB || CD
इसी प्रकार AD || BC
अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 3. तीन असंरेख बिन्दुओं A, B और C के समदूरस्थ बिन्दुओं का । बिन्दुपथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।

हल: दिया है–
तीन असंरेख बिन्दु A, B और C हैं।
सिद्ध करना है- A, B तथा C से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ।
रचना- AB, BC तथा CA को मिलाइये तथा AB, BC व CA के लम्ब, समद्विभाजक OF, OD तथा OE खींचें जो O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

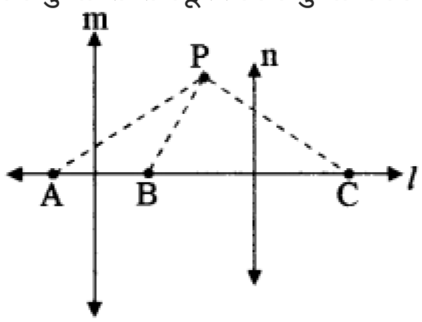


उपपत्ति- चूँकि 0, BC के लम्ब सम-द्विभाजक पर स्थित है।
∴ OB = OC ....(1)
इसी प्रकार OA = OB ....(2)
समीकरण (1) तथा (2) से

OA = OB = OC
∴केवल O बिन्दु ही A, B, C से समदूरस्थ है।
अतः हम कह सकते हैं कि अभीष्ट बिन्दु उस वृत्त का केन्द्र है जो ज्ञात तीन असंरेख बिन्दुओं से गुजरता है। इसे वृत्त का परिकेन्द्र कहते हैं। उत्तर

प्रश्न 4. तीन समरेख बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं को बिन्दुपथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।

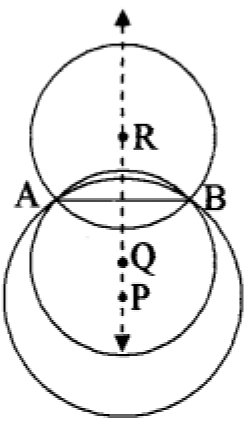
हल: कल्पना कीजिये कि /एक सरल रेखा है और उस पर A, B तथा C तीन भिन्न्ना बिन्दु हैं। हमें तीनों बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात करना है।



मान लीजिये कोई बिन्दु P, बिन्दुओं A, B और C से समदूरस्थ है।
परीक्षण
∵ P, बिन्दुओं A तथा B से समदूरस्थ है।
∴ P, AB के लम्ब समद्विभाजक m पर होगा।
∴ m ⊥ /
∵ P, बिन्दुओं B और C से भी समदूरस्थ है।
∴ P, BC के लम्बे समद्विभाजक n पर होगा।
जिससे
∵ n ⊥ /
∴ m ⊥ /और n ⊥ /
∴ m || n
∴ m ∩ n = Φ अर्थात् रेखाओं m तथा n का कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं, अतःP ऐसा कोई बिन्दु नहीं है जो A, B और C से समदूरस्थ हो। अतः ऐसे बिन्दु का अस्तित्व नहीं है। उत्तर

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि A और B बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ रेखाखण्ड AB का लम्बअर्द्धक है।

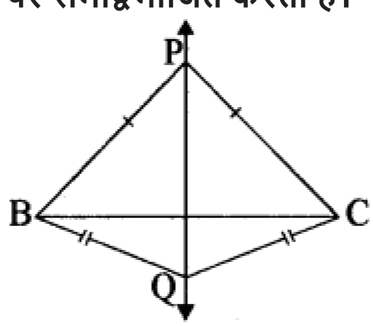
हल: दिया है–
बिन्दु A और B दो दिए हुए बिन्दु हैं जिनसे जाने वाले वृत्तों के केन्द्र P, Q और R हैं।
सिद्ध करना है- P, Q और R का बिन्दु पथ, AB, का लम्ब समद्विभाजक है।



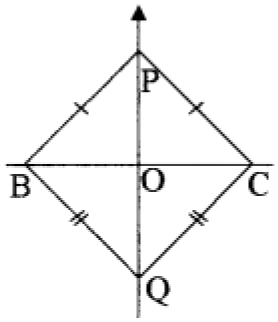
उपपत्ति-

∵ बिन्दु P ऐसे वृत्त का केन्द्र है जो बिन्दुओं A तथा B से जाता है।
∴ P, A और B से समदूरस्थ है। क्योंकि PA = PB (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)।
∴ P, AB के लम्ब समद्विभाजक पर है। इसी प्रकार, Q तथा R भी ऐसे वृत्तों के केन्द्र हैं जो बिन्दुओं A तथा B (दोनों) से होकर जाते हैं अतःQ तथा R, बिन्दुओं A तथा B से समदूरस्थ हैं।
∴ Q तथा R, AB के लम्ब समद्विभाजक पर हैं।
∴ P Q तथा R, रेखाखण्ड AB के लम्बे समद्विभाजक पर हैं।
∴ P, Q तथा R, वृत्त-केन्द्रों का बिन्दुपथ AB का लम्बे समद्विभाजक है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. दी गई आकृति में उभयनिष्ठ आधार BC पर रेखा BC के विपरीत ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज ΔPBC और ΔQBC स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P और Q को मिलाने वाली रेखा, BC को समकोण पर समद्विभाजित करती है।



हल: दिया है-दो समद्विबाहु APBC वे
ΔQBC आधार BC के विपरीत और स्थित हैं।
तथा BP = PC
BQ= OC
तथा PQ और BC बिन्दु 0 पर प्रतिच्छेद करती हैं। B0 = CO तथा ∠BOP = 90°



उपपत्ति- ΔPBQ तथा ΔPCQ में,
PB = PC (दिया है)
BQ= CQ (दिया है)
PQ= PQ (उभयनिष्ठ भुजा)
∴ ΔPBQ ≅ ΔPCQ (SSS नियम से)
∴ ∠BPQ = ∠CPQ (CPCT से)
ΔBPO = ΔCPO
∴ ΔBPO ≅ ΔCPO में।
BP = CP दिया है।
∠BPO=∠CPO (समी, 1 से)
PO = PO उभयनिष्ठ भुजा
∴ ΔBPO ≅ ΔCPO (SAS नियम से)

$\Rightarrow \quad \boxed{BO = CO}$ (CPCT से)

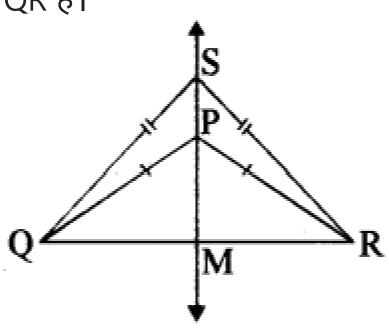
तथा $\angle BOP = \angle COP$

परन्तु $\angle BOP + \angle COP = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

अतः $\boxed{\angle BOP = 90^\circ}$ (इतिसिद्धम्)

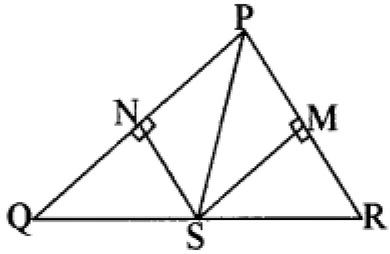
प्रश्न 7. दी गई आकृति में उभयनिष्ठ आधार QR पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज PQR और SQR स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि SP रेखा QR की लम्बअर्द्धक है।

हल: दिया गया है–
दी गई आकृति के अनुसार दो समद्विबाहु त्रिभुज PQR और SQR Q4 हैं। इन दोनों का उभयनिष्ठ आधार QR है।



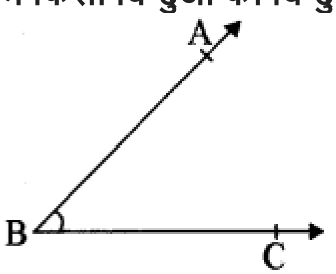
यहाँ पर QP = PR और QS = SR है।
सिद्ध करना है- रेखा SP, आधार QR की लम्बअर्द्धक है।
रचना- रेखा SP, QR को M बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
उपपत्ति- हम जानते हैं कि उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो दिये हुए बिन्दुओं से समदूरस्थ हो, इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड का लम्बअर्द्धक होता है। अतः
QP = PR के बिन्दु P का आधार QR के लम्बअर्द्धक पर स्थित होगा।
QS = SR बिन्दु S का आधार QR के लम्बअर्द्धक पर स्थित होगा।
अतः हम कह सकते हैं कि रेखाखण्ड SP आधार QR के लम्बअर्द्धक पर स्थित है अर्थात् यह भी कहा जा सकता है कि SP रेखा QR की लम्बअर्द्धक है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. दी गई आकृति में ∠P का अर्द्धक PS, भुजा QR को S बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। SN ⊥ PQ एवं SM ⊥ PR खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि SN = SM

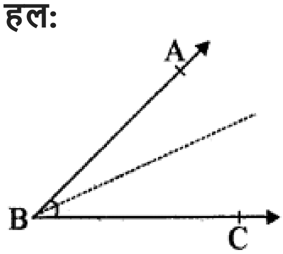


हल: प्रश्नानुसार ∠P का अर्द्धक PS है।
अतः बिन्दु S, ∠QPR की भुजाओं PQ और PR से समान दूरी पर है। यहाँ SN बिन्दु S की PQ से और SM, बिन्दु S की PR से दूरी है।
अतः SN = SM.

प्रश्न 9. दी गई आकृति में ∠ABC दिया गया है। BA और BC से समदूरस्थ तथा ∠ABC के अन्तः भाग में किसी बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।



हल:



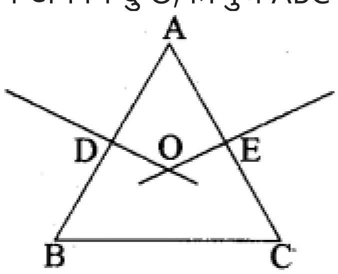
BA तथा BC से समदूरस्थ तथा ∠ABC के अन्त भाग में स्थित बिन्दुओं का बिन्दु पथ दोनों रेखाओं के उभयनिष्ठ बिन्दु पर बने कोण ∠ABC का समद्विभाजक होगा।

Ex 10.2

प्रश्न 1. त्रिभुज के तीनों शीर्षों एवं तीनों भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये।

हल: (i) दिया हुआ है–
ABC एक त्रिभुज है जिसमें D और E, AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। ज्ञात करना है-ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ जो ΔABC के शीर्षों से समदूरस्थ रहकर गमन करे।

हम जानते हैं कि AB भुजा का मध्य बिन्दु D त्रिभुज ABC के शीर्ष A व B से समान दूरी पर है। इसलिये D उसे बिन्दु के बिन्दुपथ पर होगा जो A और B से
समान दूरी पर रहकर गमन करता है और भुजा AC का मध्य बिन्दु E उस बिन्दु के बिन्दुपथ पर होगा जो A और C से समान दूरी पर रहकर गमन करता है। हम यह भी जानते हैं कि AB और AC के लम्ब अर्धकों पर सभी बिन्दु A व B और C व D से समान दूरी पर होंगे इसलिये AB और AC भुजाओं के लम्ब अर्थकों के कटान बिन्दु O, त्रिभुज ABC के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होगा।

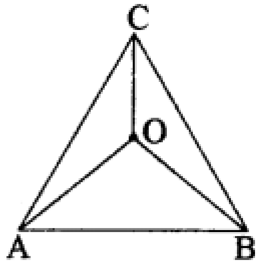


चूँकि किसी त्रिभुज की दो भुजा के लम्बे अर्धक का कटान बिन्दु परिवृत्त का केन्द्र होता है, इसलिये अभीष्ट बिन्दुपथ ΔABC के परिवृत्त का केन्द्र O होगा। अतः त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ परिकेन्द्र होगा। उत्तर

(ii) दिया हुआ है- ABC एक त्रिभुज है।
ज्ञात करना है-उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो ΔABC की भुजाओं से समदूरस्थ रहकर गमन करे।

ΔABC का शीर्ष A और B, AB व AC और BA व BC पर स्थित होने के कारण AB व AC और BA व BC से समान दूरी पर स्थित हैं इसलिये A और B उन बिन्दुओं के बिन्दुपथों पर होंगे जो AB व AC और BA व BC से समान दूरी पर रहकर गमन करते हैं। हम यह भी जानते हैं कि ∠BAC और ∠ABC के कोण अर्थकों के सभी बिन्दु क्रमशः AB व AC और BA व BC से समान दूरी पर होंगे, इसलिये ∠BAC और ∠ABC के कोण

अर्धकों का कटान बिन्दु O ΔABC की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होगा।



चूँकि किसी भी त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों के अर्धकों का कटान बिन्दु उस त्रिभुज के अन्तःवृत्त का केन्द्र होता है इसलिये अभीष्ट बिन्दुपथ ΔABC का अन्त∴वृत्त का केन्द्र O होगा।

प्रश्न 2. एक ΔABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दू O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि AG = 6 सेमी., BE = 9 सेमी. और GF = 4.5 सेमी. हों, तो GD, BG और CF ज्ञात कीजिये।

हल: ΔABC में AD, BC की माध्यिका है और माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु G है।

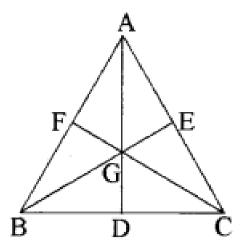
$\therefore \quad \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

लेकिन $\quad AG = 6$ सेमी.

$\therefore \quad \frac{6}{GD} = \frac{2}{1}$

$\therefore \quad GD = \frac{6}{2} = 3$ सेमी. उत्तर

Δ ABC में BE, AC की माध्यिका है।



$\therefore \quad \frac{BG}{GE} = \frac{2}{1}$

लेकिन $\quad BE = 9$ सेमी.

$\therefore \quad \frac{BG}{BE - BG} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad \frac{BG}{9 - BG} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad BG = 18 - 2\ BG$

$\Rightarrow \quad 3\ BG = 18$

$\therefore \quad BG = \frac{18}{3} = 6$ सेमी. उत्तर

इसी प्रकार से ΔABC में CF, भुजा AB की माध्यिका है।

$\therefore \quad \frac{GC}{GF} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad \frac{GC}{4.5} = \frac{2}{1}$

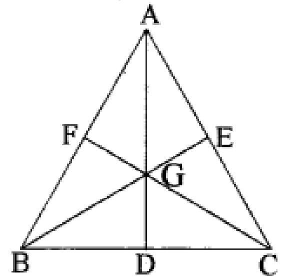
$\Rightarrow \quad GC = 2 \times 4.5 = 9$ सेमी.

लेकिन $\quad CF = GC + FG$

$\quad = 9 + 4.5 = 13.5$ सेमी. उत्तर

प्रश्न 3. एक AABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिये कि AD+ BE > $\frac{3}{2}$ AB [संकेत AG + BG > AB]

हल: दिया है-
AD, BE और CE, ΔABC की तीन माध्यिकाएँ हैं जो बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है—$AD + BE > \frac{3}{2}AB$

उपपत्ति— $\because BG + GE = BE$

$$\therefore \quad \frac{BG}{BG}+\frac{GE}{BG} = \frac{BE}{BG}$$

(BG से दोनों पक्षों को भाग करने पर)

$$\therefore \quad 1+\frac{GE}{BG} = \frac{BE}{BG}$$

$$\therefore \quad 1+\frac{1}{2} = \frac{BE}{BG} \qquad (GE : BG = 1 : 2)$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2} = \frac{BE}{BG}$$

$$\Rightarrow \quad 2\,BE = 3BG$$

$$\Rightarrow \quad BE = \frac{3}{2}BG \qquad .....(1)$$

इसी तरह से,

$$AG + GD = AD$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AG}{AG}+\frac{GD}{AG} = \frac{AD}{AG} \qquad \text{[दोनों तरफ AG से भाग देने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{1}{2} = \frac{AD}{AG} \qquad (\because AG : GD = 2 : 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{AD}{AG}$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{3}{2}AG \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$AD + BE = \frac{3}{2}AG+\frac{3}{2}BG$$

$$AD + BE = \frac{3}{2}(AG+BG) \qquad .....(3)$$

परन्तु ΔAGB में

$$AG + BG > AB$$

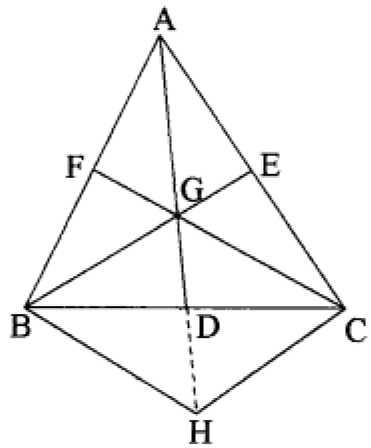
$$\frac{3}{2}(AG+BG) > \frac{3}{2}AB \qquad .....(4)$$

समीकरण (3) तथा (4) से

$$AD + BE > \frac{3}{2}AB \quad \text{(इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज की दो माध्यिकाओं का योग तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।

हल: दिया है-
AD, BE और CE, AABC की तीन माध्यिकायें हैं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु G है। अतः G केन्द्रक होगा।
सिद्ध करना है- दो माध्यिकाओं का योग > तीसरी माध्यिकता से



अर्थात्
AD + BE > CF
BE + CF > AD
AD + CF > BE
रचना-AD को H तक बढ़ाया
जब AG = GH
HB और HC को मिलाया।

उपपत्ति-
ΔABH में E, AB का मध्य बिन्दु है। (दिया है) G, AH का मध्य बिन्दु है। (रचना से)
∴ FG || BH
[∵ त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा के समान्तर होती है।]
GC || BH
E, AC का मध्य बिन्दु है। (दिया है)
G, AH कां मध्य बिन्दु हैं। (रचना से)
∴ GE || HC
⇒ BG || HC ....(2)
इस प्रकार चतुर्भुज BHCG से
GC || BH (समीकरण 1 से)
और BG|| HC (समीकरण 2 से)
अब चतुर्भुज BHCG एक समान्तर चतुर्भुज है।
⇒ BH = CG
चूँकि, त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

अब ΔBHG में BG + GH > BH
⇒ BG + AG > CG
∵ AG = GH (रचना से)
BH= CG (समीकरण 3 से)

$$\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}AD > \frac{2}{3}CF$$

$$\left[\begin{array}{ll} \because & AG = \frac{2}{3}AD, \\ & BG = \frac{2}{3}BE \\ \text{और} & CG = \frac{2}{3}CF \end{array}\right]$$

$$\frac{2}{3}(BE + AD) > \frac{2}{3}CF$$

$$BE + AD > CF$$

इसी प्रकार BE + CF> AD
और AD + CF > BE इतिसिद्धम्।

प्रश्न 5. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिये कि– 4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)

हल: दिया है-
ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF का प्रतिच्छेद बिन्दु G है।
सिद्ध करना है- 4 (AD + BE + CF) > 3 (AB + BC + CA)
उपपत्ति-
∴ माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु G है।

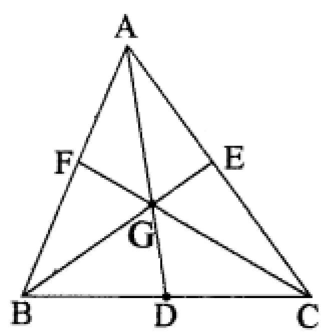
$$\therefore \quad AG : GD = 2 : 1$$

$$\therefore \quad \frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{GD}{AG} = \frac{1}{2} + 1$$

$$\therefore \quad \frac{AG + GD}{AG} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$$



$\therefore \quad AD = \frac{3}{2} AG \quad .....(i)$

इसी प्रकार से $\quad BE = \frac{3}{2} BG \quad .....(ii)$

और $\quad CF = \frac{3}{2} CG \quad .....(iii)$

समीकरण (i) व समीकरण (ii) से,

$$AD + BE = \frac{3}{2}(AG + BG)$$

परन्तु ΔAGB में,

$$AG + BG > AB$$

$$\therefore \quad AD + BE > \frac{3}{2} AB$$

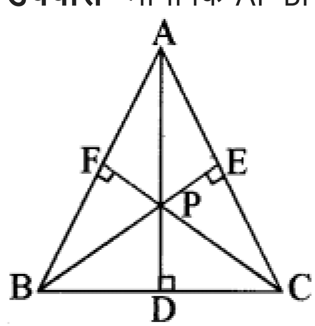
$$\therefore \quad 2(AD + BE) > 3AB \quad .....(iv)$$

(प्रश्न 3 के परिणाम से)

समीकरण (ii) व समीकरण (iii) को जोड़ने पर।
.....................(v)
समीकरण (iii) व समीकरण (i) को जोड़ने पर
$CF + AD = \frac{3}{2}(GC + AG)$
$\therefore CF + AD > \frac{3}{2} CA$ ($\therefore GC + AG > GA$)
$\therefore 2(CF + AD) > 3CA$. ....(vi)
समीकरण (iv), (v) व (vi) को जोड़ने पर
2(AD+ BE) + 2(BE + CF) + 2(CF + AD) > 3AB + 3BC + 3CA 44(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. ΔABC का लम्ब केन्द्र P है। सिद्ध कीजिए कि ΔPBC को लम्ब केन्द्र बिन्दु A है।

हल: दिया है-
P लम्ब केन्द्र है ΔABC का।।
उपपत्ति- माना कि AP BP CP को बढ़ाने पर बिन्दु D, E F पर क्रमशः भुजा BC, AC एवं AB पर काटते हैं।



तब $AD \perp BC$

$BE \perp AC$

$CF \perp AB$

इससे स्पष्ट है कि

$\Rightarrow$ $AD \perp BC$

$AB \perp CP$

$AC \perp BP$

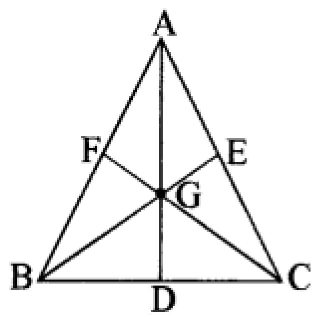
अतः बिन्दु A, ΔPBC का लम्ब केन्द्र है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. AABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G से गुजरती

(a) यदि GF = 4 सेमी. हो तो GC का मान ज्ञात कीजिए।

(b) यदि AD = 7.5 सेमी. हो तो GD का मान ज्ञात कीजिए।

हल: (i) ΔABC में CE, भुजा AB की माध्यिका है।



$\therefore \quad \frac{GC}{GF} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad \frac{GC}{4} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow \quad GC = 2 \times 4$

= 8 सेमी. उत्तर

(ii) पुनः $\because$ $CF = GC + FG$

= 8 + 4 = 12 सेमी.

ΔABC में AD, भुजा BC की माध्यिका है।

अतः $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

या, $\frac{AG}{GD} + 1 = \frac{2}{1} + 1 = 3$

या, $\frac{AG+GD}{GD} = 3$

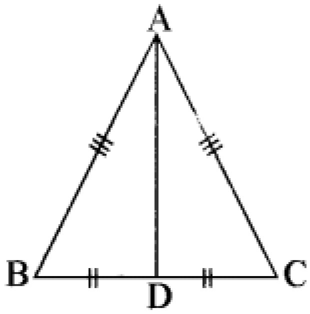
या, $\frac{AD}{GD} = 3$ $[\because AG + GD = AD]$

या, $\frac{7.5}{GD} = 3 \quad \Rightarrow GD = \frac{7.5}{3}$

$\therefore$ GD = 2.5 सेमी. उत्तर

प्रश्न 8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, BC को मध्य बिन्दु D है। सिद्ध कीजिए कि परिकेन्द्र, अंतःकेन्द्र, लम्ब केन्द्र तथा केन्द्रक सभी AD रेखा पर स्थित हैं।

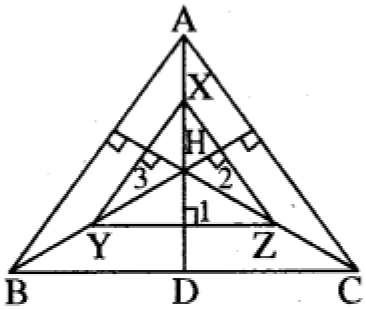
हल: दिया है–
ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, D, BC का मध्य बिन्दु है।।
सिद्ध करना है-परिके न्द्र, अंत:केन्द्र, लम्बकेन्द्र तथा केन्द्रक सभी AD रेखा पर स्थित हैं।
उपपत्ति-परिकेन्द्र-किसी त्रिभुज का परिकेन्द्र इसकी भुजा के लम्ब समद्विभाजक पर होता है।



$\Delta ABD = \Delta ACD$
(भुजा-भुजा-भुजा नियम)
$\Rightarrow \angle ADB = \angle ADG = 90°$
$(\because \angle ADB + \angle ADC = 180°)$
$AD \perp BC$
अब $AD \perp BC$ तथा BD = DC.
AD, भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है। अतः परिकेन्द्र AD पर स्थित है। अंतकेन्द्र-त्रिभुज के अंतकेन्द्र, कोणों के समद्विभाजक पर स्थित होता है।
$\Delta ABD = \Delta ACD$ (भुजा-भुजा-भुजा नियम)
$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$ (CPCT से)
$\therefore$ AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।
अतः त्रिभुज का अंत:केन्द्र, AD पर स्थित है। लम्ब केन्द्र-त्रिभुज का लम्ब केन्द्र, लम्ब पर स्थित होता है।
$\Delta ABD = \Delta ACD$ (भुजा-भुजा-भुजा नियम से) ।
$\angle ADB = \angle ADC = 90°$
अतः त्रिभुज का लम्ब केन्द्र AD पर स्थित है। केन्द्रक-त्रिभुज का केन्द्रक, माध्यिकाओं पर स्थित होता है।
$\therefore$ D, भुजा BC का मध्य बिन्दु है।
$\Rightarrow$ AD, ΔABC की माध्यिका है।
अतः केन्द्रक AD पर स्थित है। (इतिसिद्धम्)

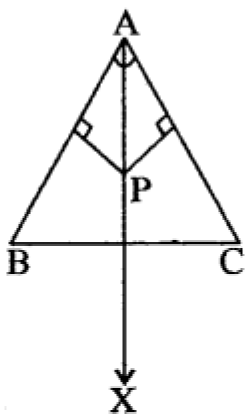
प्रश्न 9. ΔABC का लम्ब केन्द्र H है। AH, BH और CH में मध्य बिन्दु क्रमशः X, Y और Z हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔXYZ का लम्ब केन्द्र भी H है।

हल: दिया है-
ΔABC का लम्ब H है। AH, BH और CH में मध्य बिन्दु क्रमशः X, Y और Z हैं।
सिद्ध करना है-
ΔXYZ का लम्ब केन्द्र भी H है।
उपपत्ति-
ΔABC का लम्ब केन्द्र H है। (दिया है)



ΔABH में X, AH का मध्य बिन्दु है तथा Y, BH का मध्य बिन्दु है।
$\therefore$ XY || AB होगी। (मध्य बिन्दु प्रमेय से)
इसी प्रकार, YZ || BC एवं
ZX || AC होंगी।
अब संगत कोण बराबर होने से
$\angle 1 = \angle 2 = 23$ (प्रत्येक 90°)
अतः ΔXYZ को लम्ब केन्द्र भी H है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. ΔABC की भुजा BC में वह बिन्दु किस प्रकार ज्ञात करेंगे जो भुजाओं AB और AC से समदूरस्थ हों।

हल: ΔABC में,
$\angle A$ का समद्विभाजक AX खींचा जो BC को D पर काटता है। AX पर कोई बिन्दु P लेते हैं, बिन्दु P से भुजा AB पर PN तथा AC पर PM लम्ब डाला।
$PN \perp AB$ तथा $PM \perp AC$
ΔAPN वे ΔAPM से


$\angle PNA = \angle PMA = 90°$ (रचना से).
AP = AP (उभयनिष्ठ है)
$\angle PAN = \angle PAM$
$\angle A$ का समद्विभाजक AX है।
ASA से,
$\Delta PNA \cong \Delta APM$

⇒ PN = PN (CPCT से)
अतः बिन्दु P से AB व AC समान दूरी पर है।
∴ AX रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु AB व AC से समान दूरी पर होगी।
अतः BC रेखा पर स्थित बिन्दु D, AB व AC से समान दूरी पर होगा।

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 10

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 7 तक)

प्रश्न 1. किसी त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु कहलाता है
(क) गुरुत्व केन्द्र
(ख) परिकेन्द्र
(ग) लम्बकेन्द्र
(घ) अन्तःकेन्द्र

उत्तर: (ख) परिकेन्द्र

प्रश्न 2. त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र होता है
(क) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से खींचे गये लम्बे-समद्विभाजक को संगामी-बिन्दु
(ख) त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक का संगामी-बिन्दु
(ग) त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी-बिन्दु
(घ) त्रिभुज के शीर्षलम्ब का संगामी बिन्दु

उत्तर: (ग) त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी-बिन्दु

प्रश्न 3. समतल में लुढ़कने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होता है
(क) वृत्त
(ख) वक्र
(ग) समतल के समान्तर रेखा
(घ) समतल पर लम्बवत् रेखा

उत्तर: (ग) समतल के समान्तर रेखा

प्रश्न 4. यदि किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान हों, तो त्रिभुज होगा
(क) समकोण त्रिभुज
(ख) समद्विबाहु त्रिभुज

(ग) समबाहु त्रिभुज
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (ख) समद्विबाहु त्रिभुज

प्रश्न 5. यदि AB और CD दो असमन्तिर रेखाएँ हों, तो इनसे समान दूरी पर रहने वाले बिन्दु P का बिन्दुपथ होगा
(क) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB के समान्तर रेखा
(ख) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD से अन्तरित कोण की समद्विभाजक रेखा
(ग) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के समान्तर रेखा
(घ) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के लम्बवत् रेखा

उत्तर: (ख) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD से अन्तरित कोण की समद्विभाजक रेखा

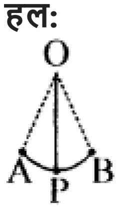
प्रश्न 6. वह त्रिभुज जिसके लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र और अन्त:केन्द्र सम्पाती हों, कहलाता है
(क) समबाहु त्रिभुज
(ख) समकोण त्रिभुज
(ग) समद्विबाहु त्रिभुज
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (क) समबाहु त्रिभुज

प्रश्न 7. वह त्रिभुज जिसका लम्बकेन्द्र त्रिभुज का शीर्ष बिन्दु होता है, कहलाता है
(क) समकोण त्रिभुज
(ख) समबाहु त्रिभुज
(ग) समद्विबाहु त्रिभुज
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (क) समकोण त्रिभुज

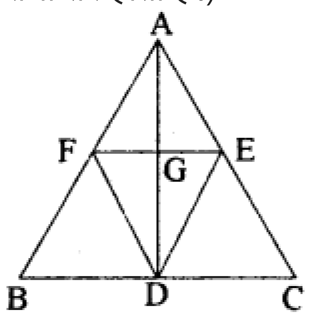
प्रश्न 8. घड़ी के पेन्डुलम के सिरे का बिन्दुपंथ लिखिये।

हल:


AB घड़ी के पेन्डुलम के सिरे का बिन्दु पथ एक वृत्त का चाप होगा यहाँ O केन्द्र तथा APB वृत्त का चाप है।

प्रश्न 9. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु, क्रमशः D, E और F हों, तो सिद्ध कीजिये कि EE, AD को समद्विभाजित करती है।

हल: दिया है-
ΔABC में D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। माध्यिका AD, EF को बिन्दु G पर काटती है।
रचना-
E और DIF को मिलाया। सिद्ध करना है-EE, AD को समद्विभाजित करती है।
उपपत्ति-
∴ E और F क्रमश: AC और AB के मध्य बिन्दु हैं।
$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}BC$
तथा EF || BC
(त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को F मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा का आधा और उसके समान्तर होता है।)



$(\because BD = \frac{1}{2}BC)$

∴ EF || BD
और EF = BD
ΔFAD में
FG || BD (क्योंकि (G, EF पर है।)
और E, AB का मध्य बिन्दु है।
∴ FG, AD को समद्विभाजित करेगी।
(त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा के मध्य बिन्दु पर मिलती है।)
∴ G, AD का मध्य बिन्दु है। यहाँ पर G, EF पर स्थित है। इसलिये FE, AD को समद्विभाजित करती है।
क्योंकि (BD = FE)
∴ G, FE का मध्य बन्दु है। अर्थात् AD, रेखाखण्ड EF को भी समद्विभाजित करती है।

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. बँटे से बँधी बकरी बँटे के चारों ओर अधिक से अधिक दूरी पर चक्कर लगाने पर आकृति बनाती है
(क) वर्गाकार
(ख) वृत्ताकार
(ग) त्रिभुजाकार
(घ) आयताकार

उत्तर: (ख) वृत्ताकार

प्रश्न 2. पंखे के ब्लेडों के सिरे से घूमते समय आकृति बनती है
(क) वर्गाकार
(ख) वृत्ताकार
(ग) त्रिभुजाकार
(घ) दीर्घ वृत्ताकार

उत्तर: (ख) वृत्ताकार

प्रश्न 3. एक स्थिर बिन्दु A के चारों ओर आकाश में, A से सदा 4 सेमी. की दूरी पर एक दूसरा बिन्दु B परिभ्रमण कर रही है। बिन्दु B का बिन्दुपथ होगा
(क) एक गोला।
(ख) एक वृत्त
(ग) एक अर्द्धगोला
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (ख) एक वृत्त

प्रश्न 4. 10 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की त्रिज्याओं के मध्य बिन्दुओं को बिन्दुपथ होगा
(क) 15 सेमी. त्रिज्या का वृत्त
(ख) 2.5 सेमी. त्रिज्या का संकेन्द्रीय वृत्त
(ग) 5 सेमी. त्रिज्या का संकेन्द्र वृत्त
(घ) 7.5 सेमी. त्रिज्या का वृत्त

उत्तर: (ग) 5 सेमी. त्रिज्या का संकेन्द्र वृत्त

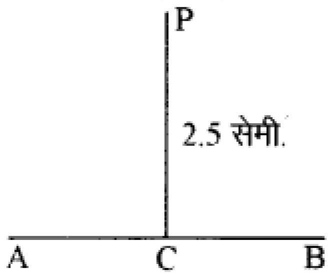
प्रश्न 5. AABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। शीर्ष A का बिन्दुपथ जो B और C से समान दूरी पर रहता है, होगा
(क) AB के समान्तर रेखा
(ख) AC के समान्तर रेखा
(ग) BC के समान्तर रेखा
(घ) BC की लम्बार्धक रेखा

उत्तर: (घ) BC की लम्बार्धक रेखा

प्रश्न 6. किसी त्रिभुज की भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु कहलाता है
(क) परिकेन्द्र
(ख) अन्त:केन्द्र
(ग) केन्द्रक
(घ) लम्ब केन्द्र

उत्तर: (ख) अन्त:केन्द्र

प्रश्न 7. AB एक स्थिर रेखा है तथा P एक चर बिन्दु है। जिसकी दूरी AB रेखा से प्रत्येक स्थिति में 2.5 सेमी. रहती है तो P का बिन्दुपथ होगा



(क) P से AB पर डाला गया लम्ब PC 2.5 सेमी.
(ख) रेखा PC
(ग) रेखा PB
(घ) P से जाती हुई AB के समान्तर रेखा

उत्तर: (घ) P से जाती हुई AB के समान्तर रेखा

प्रश्न 8. किसी त्रिभुज में माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है
(क) लम्ब केन्द्र
(ख) परिवृत्त का केन्द्र
(ग) अन्त:वृत्त का केन्द्र
(घ) केन्द्रक

उत्तर: (घ) केन्द्रक

प्रश्न 9. 5 सेमी. आधार पर समद्विबाहु त्रिभुज बनायें इन त्रिभुजों के शीर्ष बिन्दुओं का बिन्दुपथ होगा
(क) आधार की त्रिज्या मानकर खींचा गया वृत्त
(ख) आधार को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त
(ग) आधार का लम्ब अर्द्धक
(घ) आधार के कोणों के अर्द्धक

उत्तर: (ग) आधार का लम्ब अर्द्धक

प्रश्न 10. दो बिन्दुओं में होकर गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र का बिन्दुपथ है
(क) उन बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा के समान्तर सरल रेखा
(ख) उन बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा की लम्ब अर्द्धक रेखा
(ग) वृत्त की परिधि
(घ) वर्ग

उत्तर: (ख) उन बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा की लम्ब अर्द्धक रेखा

प्रश्न 11. त्रिभुज के केन्द्रक प्रत्येक माध्यिका को विभाजित करता है—
(क) 2 : 1
(ख) 1 : 2
(ग) 2 : 3
(घ) 3 : 2

उत्तर: (क) 2 : 1

प्रश्न 12. चर्बी वाले झूले में झूलने को बिन्दु पथ होगा—
(क) लम्ब अर्द्धक
(ख) रेखाखण्ड
(ग) अर्द्धवृत्त
(घ) वृत्त

उत्तर: (घ) वृत्त

प्रश्न 13. आकाश में बिन्दुओं के बिन्दुपथ की कल्पना की जा सकती है।
(क) गोला
(ख) घनाभ

(ग) बेलन
(घ) शंकु

उत्तर: (क) गोला

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी दिये हुए आधार के एक ही ओर अन्तरित होने वाले समकोणों के शीर्षों का बिन्दुपथ लिखिये।

उत्तर: आधार के समान्तर शीर्ष बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा इसका बिन्दुपथ होगा।

प्रश्न 2. दो समान्तर सरल रेखाओं से समान दूरी पर रहने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ लिखिये।।

उत्तर: समान्तर सरल रेखाओं के मध्य की समान्तर रेखा।

प्रश्न 3. 5 सेमी. आधार पर रचित समद्विबाहु त्रिभुजों में शीर्ष बिन्दुओं को बिन्दुपथ लिखिये।

उत्तर: इनका बिन्दुपथ शीर्ष से गुजरती हुई आधार के समान्तर रेखा होगी।

प्रश्न 4. समान आधार व समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के शीर्ष का बिन्दुपथ लिखिये।

उत्तर: आधार के समान्तर खींची गई रेखा जो त्रिभुजों के शीर्षों से गुजरती

प्रश्न 5. बिन्दु O से 2 सेमी. की दूरी पर रहने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ – लिखिये।

उत्तर: बिन्दु O से 2 सेमी. की त्रिज्या का खींचा गया वृत्त।

प्रश्न 6. $\angle ABC = 135°$ उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ लिखिये जिनकी AB व BC से दूरी समान हो।

उत्तर: $\angle ABC$ को समद्विभाजित करने वाली रेखा बिन्दुपथ होगी।

प्रश्न 7. दो बिन्दुओं में से होकर गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ लिखिये।

उत्तर: दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्बअर्द्धक बिन्दुपथ होगा।

प्रश्न 8. उस बिन्दु का बिन्दुपथ लिखिये जिसकी स्थिर बिन्दु M से दूरी सदा 5.3 सेमी. हो।

उत्तर: स्थिर बिन्दु M को केन्द्र मानकर 5.3 सेमी. त्रिज्या का वृत्त खींचने पर वृत्त की परिधि पर अभीष्ट बिन्दुपथ होगा।

प्रश्न 9. समतल में लुढ़कने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ लिखिए।

उत्तर: समतल के समान्तर रेखा ।

प्रश्न 10. किसी त्रिभुज के शीर्षों से समान दूरी पर स्थित बिन्दु को नाम लिखिए।

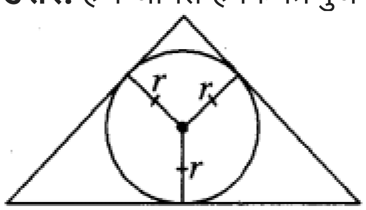
उत्तर: परिकेन्द्र।

प्रश्न 11. जिस त्रिभुज में लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र और अन्तःकेन्द्र एक ही हों, उस त्रिभुज का नाम लिखिए।

उत्तर: समबाहु त्रिभुज

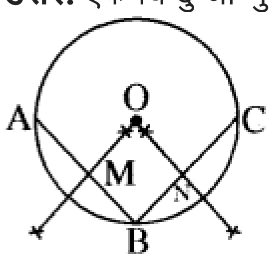
प्रश्न 12. त्रिभुज के अन्दर उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये जो कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर हो।।

उत्तर: हम जानते हैं कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दु वृत्त का अन्त:केन्द्र होता है।



प्रश्न 13. तीन असंरेखीय बिन्दु A, B तथा C से होकर जाने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ निर्धारित कीजिये।

उत्तर: एक बिन्दु जो भुजाओं AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु O होगा।



प्रश्न 14. एक घड़ी में सेकण्ड की सुई के सिरे का बिन्दुपथ लिखिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

उत्तर: वृत्त

प्रश्न 15. तीन असंरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या लिखिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

उत्तर: तीन बिन्दु जो एक सरल रेखा में नहीं हैं, से होकर जाने वाला एक ही वृत्त है।

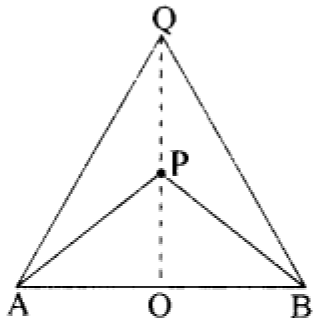
प्रश्न 16. दो दिये गये बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ लिखिये। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

उत्तर: दिये हुये दो बिन्दुओं से समदूरस्थ किसी बिन्दु को बिन्दुपथ उन्हें मिलाने वाले रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक होता है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध करो कि दो स्थिर बिन्दुओं से बराबर दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ स्थिर बिन्दुओं में खींचे जाने वाले रेखाखण्ड की लम्बार्द्धक रेखा होती है।

हल: दिया है-
A और B दो स्थिर बिन्दु हैं। एक बिन्दु P इस तरह चलता है कि हर दशा में AP = PB.
सिद्ध करना है-
बिन्दु P सरल रेखा AB के लम्बद्विभाजक पर है।
रचना-
A और B को मिलाओ, AB पर PO लम्ब खींचो। AP और PB को मिलाओ।
उपपत्ति-
ΔAOP एवं ΔBOP में
AP = BP (दिया है)
AO = OB (रचना से)
OP = OP (उभयनिष्ठ)
भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से



ΔAOP = ΔBOP

अतः ∠AOP = ∠BOP = 90°

अर्थात् OP रेखा AB का लम्ब-समद्विभाजक है। यही सिद्ध करना था।

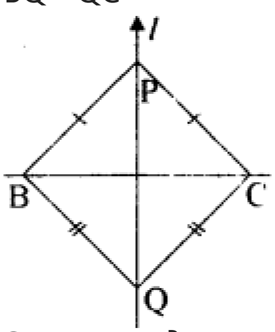
प्रश्न 2. ΔPBC और ΔOBC एक ही आधार पर विपरीत दिशा में दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। सिद्ध कीजिये रेखा PQ, रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

हल: दिया है-

दो समद्विबाहु APBC व ΔQBC आधार BC के विपरीत ओर स्थित हैं। तथा

BP = PC

BQ= QC



सिद्ध करना है-

PQ. BC का लम्ब समद्विभाजक

उपपत्ति-

चूँकि APBC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। (ज्ञात है)

∴ PB = PC

चूँकि दो बिन्दुओं B और C से समदूरस्थ बिन्दु का पथ BC के लम्ब समद्विभाजक /पर स्थित होता है।

∴ P रेखा /पर स्थित है। इसी प्रकार Q भी रेखा /पर स्थित है।

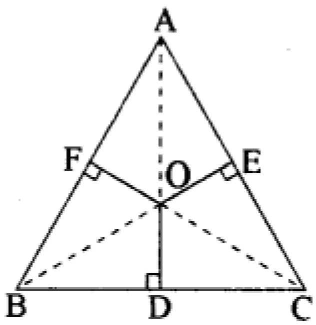
∴ $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

प्रश्न 3. त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।

अथवा

त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

हल: दिया है-
ΔABC में भुजा AB एवं AC के लम्ब-समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं और OD भुजा BC पर लम्ब है।
सिद्ध करना है-
OD, भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है।
रचना-
OA, OB और C को मिलाया।
उपपत्ति-
OE एवं OF क्रमश: AC एवं AB के लम्ब-समद्विभाजक हैं, अतः



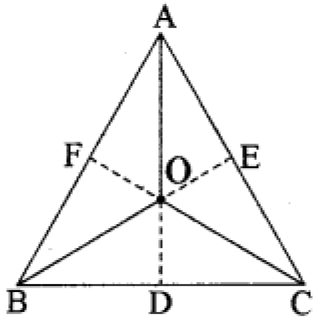
OA = OB = OC
ΔBOD व ΔDOC में
OB = OC तथा OD उभयनिष्ठ है।
अतः ΔBOD = ΔDOC
∴ ∠BDO = ∠ODC
तथा ∠BDO + ∠ODC = 180°
∴ ∠BDO +∠BDO = 180°
∴ ∠BDO = 90° B
∴ OD भुजा BC पर लम्ब है OB = OC
अतः OD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है।

प्रश्न 4. त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं।

अथवा

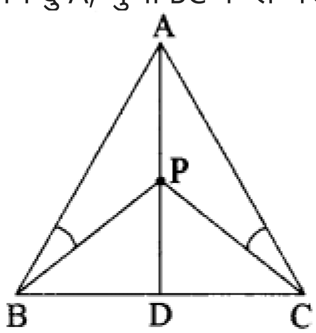
त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

हल: दिया है-
ΔABC में ∠B एवं ∠C के समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं।
सिद्ध करना है-
OA, ∠A को समद्विभाजित करता है।

रचना-
O से लम्ब OD, OE और OF खींचे।
उपपत्ति-
OB एवं OC क्रमशः ∠B एवं ∠C के समद्विभाजक हैं अतः


OD = OF ....(1)
और OD = OE .....(2)
(1) और (2) से OE = OF
अत: O, AB और AC से समान दूरी पर स्थित है।
अर्थात् OA, ∠A को समद्विभाजित करता है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 5. चित्र में, BC को लम्ब-समद्विभाजक AD हो, तो सिद्ध कीजिए कि ∠ABP = ∠ACP.

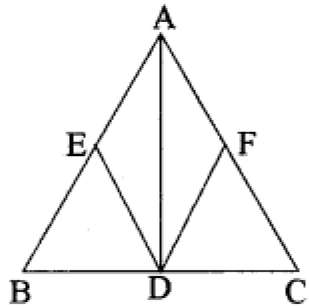
हल: दिया है-
BC का लम्ब-समद्विभाजक AD है।
सिद्ध करना है-
∠ABP = ∠ACP
उपपत्ति-
बिन्दु A, भुजा BC के लम्बसमद्विभाजक पर स्थित है।


∴ AB = AC
∴ ∠ABC = ∠ACB .....(1)
इसी प्रकार बिन्दु P भी, भुजा BC के लम्ब-समद्विभाजक पर स्थित है।
∴ PB = PC
∴ ∠PBC = ∠PCB .....(2)
समीकरण (1) और (2) से

$\angle ABC - \angle PBC = \angle ACB - \angle PCB$
$\angle ABP = \angle ACP$ इतिसिद्धम्

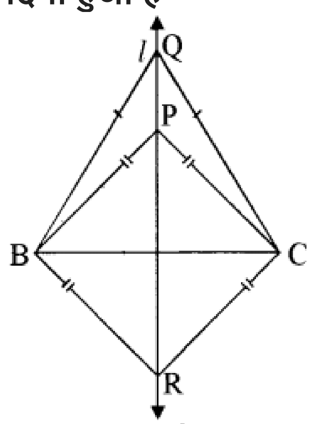
प्रश्न 6. त्रिभुज ABC में $\angle A$ को समद्विभाजक AD है। AB एवं AC पर लम्ब क्रमशः DE तथा DF हैं। सिद्ध कीजिए कि DE = DE.

हल: दिया है-
कोण A का समद्विभाजक AD है, अतः बिन्दु D, $\angle BAC$ की भुजाओं AB और AC से समान दूरी पर है। यहाँ DE बिन्दु D की AB से और DE, बिन्दु D की AC से दूरी है।
अतः DE = DF



प्रश्न 7. एक ही आधार BC पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज $\triangle PBC$, $\triangle QBC$ और $\triangle RBC$ स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P Q और R समरेख हैं।

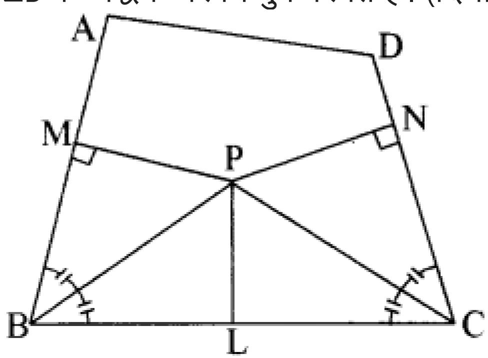
हल: दिया हुआ है:
$\triangle PBC$, $\triangle QBC$ तथा $\triangle RBC$ इस प्रकार हैं कि PB = PC, QB = QC, RB = RC
सिद्ध करना है-
P, Q, R समरेख हैं।
उपपत्ति-
$\triangle PBC$ समद्विबाहु है
दिया हुआ है-



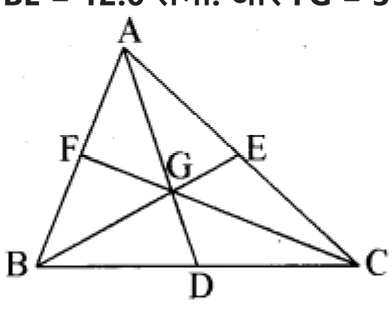
PB = PC, B और C से समदूरस्थ बिन्दु पथ BC का लम्बअर्द्धक होगा, मान लीजिए यह l है।

P बिन्दु l पर स्थित है। .....(1)
इसी प्रकार Q और R, l पर स्थित हैं। .....(2)
(1) व (2) से P Q व R समरेख हैं।

प्रश्न 8. चतुर्भुज ABCD के ∠B एवं ∠C के अर्द्धक परस्पर बिन्दु P पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ है।

हल: दिया हुआ है-
चतुर्भुज ABCD जिसमें ∠B व ∠C के अर्द्धक P पर मिलते हैं, साथ ही PM ⊥ AB तथा PN ⊥ CD
सिद्ध करना है-
PM = PN
रचना-
PL ⊥ BC खींचा।
उपपत्ति-
∠B के अर्द्धक पर बिन्दु P स्थित है। (दिया हुआ है)।


∴ PM = PL ....(1)
∵ ∠C के अंर्द्धक पर भी बिन्दु P स्थित है (दिया हुआ है)
∴ PL = PN .... (2)
(1) व (2) से PM = PN इतिसिद्धम्

प्रश्न 9. एक △ABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक बिन्दु G से गुजरती हैं। यदि AG = 6 सेमी., BE = 12.6 सेमी. और FG = 3 सेमी. हो, तो DG, GE और GC ज्ञात कीजिए।


हल: हम जानते हैं कि केन्द्रक G त्रिभुज B
की माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अत: $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

या $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

या $\frac{GD}{AG}+1 = \frac{1}{2}+1$

या $\frac{GD+AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$

या $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$

या $\frac{AD}{6} = \frac{3}{2}$ $\quad \because$ AG = 6 सेमी. दिया है

या $AD = \frac{3}{2} \times 6$

या $AD = 9$ सेमी.

इसी प्रकार $\frac{BG}{GE} = \frac{2}{1}$

या $\frac{BG}{GE}+1 = \frac{2}{1}+1$

या $\frac{BG+GE}{GE} = \frac{2+1}{1}$

या $\frac{BE}{GE} = \frac{3}{1}$

या $GE = \frac{1}{3}BE$

या $GE = \frac{12.6}{3}$

या $GE = 4.2$

और $\frac{FG}{GC} = \frac{1}{2}$

या $2FG = GC$

या $GC = 2 \times 3 = 6$ सेमी.

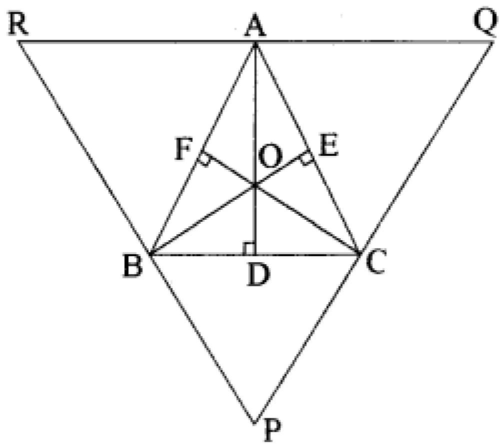
निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब संगामी होते हैं।

अथवा

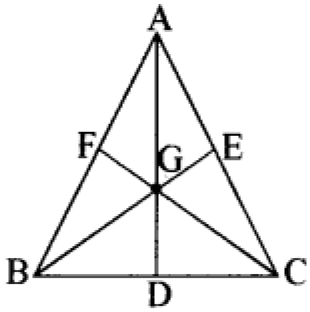
सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज के शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं।

हल: दिया है-
ΔABC के R AD, BE एवं CF शीर्षलम्ब हैं।



सिद्ध करना है-
AD, BE एवं CF एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।
रचना-
शीर्ष A, B तथा C से RQ || BC, RP || AC 39 QP || AB खींचकर ΔPQR बनाया।
उपपत्ति-
चतुर्भुज BCAR में,
AC || RB (रचना से)
और BC || RA (रचना से)
∴ BCAR एक समान्तर चतुर्भुज है।
अतः RA = BC ....(1)
(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।)
इसी प्रकार ABCQ भी एक समान्तर चतुर्भुज है,
अतः AQ = BC .....(2)
(1) और (2) से AR = AQ .....(3)
एवं AD ⊥ BC और BC || QR
अतः AD ⊥ QR .....(4)
समीकरण (3) और (4) से, AD भुजा QR का लम्ब-समद्विभाजक है। इसी प्रकार BE एवं CF क्रमश: PR एवं PQ के लम्ब-समद्विभाजक है। इस प्रकार AD, BE और CE, APQR की भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक हैं। अतः AD, BE और CF एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं। इतिसिद्धम्।

प्रश्न 2. यदि एक त्रिभुज की सभी माध्यिकाएँ समान हों, तो वह समबाहु त्रिभुज होगा।



हल: दिया है-

ΔABC की माध्यिकाएँ AD, DE और CF बिन्दु G पर मिलती हैं और AD = BE = CF

सिद्ध करना है-

ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाओं को केन्द्रक 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अत: $AD = BE = CF$ (दिया है)

$\therefore \quad \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$

$\Rightarrow \quad AG = BG = CG \quad .....(1)$

इसी प्रकार $\frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}CF$

$\Rightarrow \quad GD = GE = GF \quad .....(2)$

अब ΔBGF और ΔCGE में,

$BG = CG$ [(1) से]

$GF = GE$ [(2) से]

और $\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$

अत: सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

$\therefore \quad BF = CE$

$\therefore \quad 2BF = 2CE$

$\Rightarrow \quad AB = AC \quad .....(3)$

इसी प्रकार $\Delta CGD \cong \Delta AGF$ होंगे।

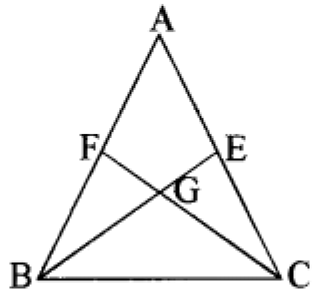
अत: $BC = AB \quad .....(4)$

(3) और (4) से

$AB = BC = AC$

$\therefore$ ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 3. एक त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान माप की हों तो वह त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होता है।



हल: दिया हुआ है-

$\triangle ABC$ में BE एवं CF दो समान माप की माध्यिकाएँ हैं।

तथा BE = CE, F तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है-

$\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति-

$\triangle ABC$ का केन्द्रक G है (ज्ञात है)

$\therefore \quad BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

अत: $\quad BG = \frac{2}{3} BE \quad .....(1)$

$GE = \frac{1}{3} BE \quad .....(2)$

तथा $\quad CG = \frac{2}{3} CF \quad .....(3)$

$GF = \frac{1}{3} CF \quad .....(4)$

परन्तु $\quad BE = CF$ (ज्ञात है)

$\therefore$ (1) और (3) से $\quad BG = CG$

और (2) और (4) से $\quad GE = GF$

अब ΔBGF और ΔCGE में

$BG = CG$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$GE = GF$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$ (भुजा-कोण-भुजा नियम से)

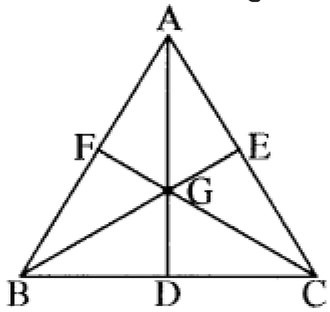
अत: $\quad BF = CE$ या $2BF = 2CE$

$\therefore \quad AB = AC$

$\therefore \Delta ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 4. एक △ABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक बिन्दु G से गुजरती हैं। यदि AG = 5 सेमी., BE = 12 सेमी. और FG = 3 सेमी. हो तो AD, GE और GC ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: चित्र में △ABC की माध्यिकायें AD, BE और CF हैं जो एक बिन्दु G से गुजरती हैं।
हम जानते हैं कि बिन्दु G माध्यिकाओं को 2: 1 में अन्त:विभाजित करता है।



इसलिए $AD = \frac{3}{2}AG$

$= \frac{3}{2} \times 5$

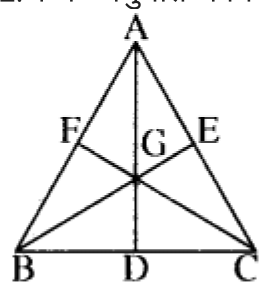
$= \frac{15}{2} = 7.5$ सेमी.

$GE = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ सेमी.

तथा $\mathrm{GC} = 2\mathrm{FG} = 2 \times 3 = 6$ सेमी.

प्रश्न 5. एक त्रिभुज ABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक बिन्दु G से गुजरती हैं। यदि AD = 9 सेमी., GE = 4.2 सेमी. और GC = 6 सेमी., तो AG, BE और FC की लम्बाइयों के मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: हम जानते हैं कि केन्द्रक G त्रिभुज की माध्यिका को 2: 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



अत: $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

या $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$\frac{GD}{AG} + 1 = \frac{1}{2} + 1$ या $\frac{GD + AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$

या $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$ या $\frac{9}{AG} = \frac{3}{2}$

$\because$ AD = 9 सेमी. दिया है

या $\quad AG = \frac{9 \times 2}{3} = 6$ सेमी. उत्तर

इसी प्रकार $\frac{BG}{GE} = \frac{2}{1}$ या $\frac{BG}{GE} + 1 = \frac{2}{1} + 1$

दोनों तरफ 1 जोड़ा गया है।

या $\frac{BG + GE}{GE} = \frac{2+1}{1}$ या $\frac{BE}{GE} = \frac{3}{1}$

या $\quad BE = 3GE$

$= 3 \times 4.2 = 12.6$ सेमी. उत्तर

और $\frac{FG}{GC} = \frac{1}{2}$ या $FG = \frac{1}{2}GC$

$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$ सेमी. उत्तर