

समरूपता

Ex 11.1

प्रश्न 1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

- (i) सभी वृत्त होते हैं।
- (ii) सभी वर्ग होते हैं।
- (iii) सभी त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि
(a) (b)

हल: (i) समरूप

(ii) समरूप

(iii) समबाहु

(iv)

(a) उनके संगत कोण बराबर हों।

(b) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

प्रश्न 2. निम्न कथन में सत्य व असत्य बताइए

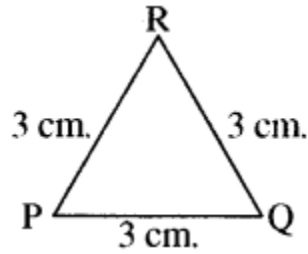
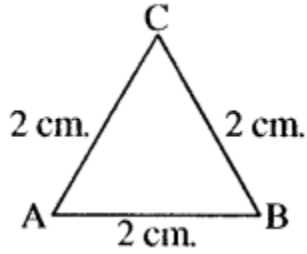
1. दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।
2. दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।
3. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।
4. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण बराबर हों।
5. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों।

हल:

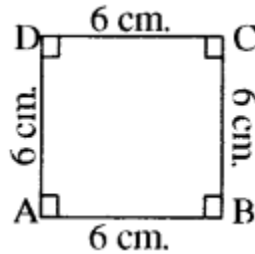
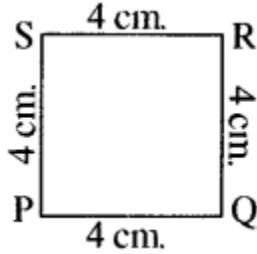
1. सत्य
2. असत्य
3. असत्य (क्योंकि केवल संगत भुजाओं का समानुपाती होना पर्याप्त नहीं है)
4. सत्य
5. असत्य।

प्रश्न 3. समरूप आकृतियों के कोई दो उदाहरण आकृति बनाकर दीजिए।

हल: दोनों त्रिभुज समरूप हैं, क्योंकि उनके संगत कोण बराबर हैं। तथा संगत भुजायें समानुपाती हैं। <



1. दोनों चतुर्भुज समरूप हैं क्योंकि उनके संगत कोण बराबर हैं तथा संगत भुजायें समानुपाती हैं। <



Ex 11.2

प्रश्न 1. $\triangle ABC$ की भुजाएँ AB व AC पर क्रमशः D व E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $DE \parallel BC$ हो तो

- यदि $AD = 6$ सेमी., $DB = 9$ सेमी. और $AE = 8$ सेमी. हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{13}$ और $AC = 20.4$ सेमी. हो तो EC का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{4}$ और $AE = 6.3$ सेमी. हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $AD = 4x - 3$, $AE = 8x - 7$, $BD = 3 - 1$ और $CE = 5x - 3$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: (i) $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया गया है अतः

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से)}$$

$$\text{या } \frac{6}{9} = \frac{8}{EC}$$

$$\therefore EC = 9 \times 8 = 3 \times 4 = 12 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore AC = AE + EC$$

$$= 8 + 12$$

$$= 20 \text{ सेमी.}$$

(ii) $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया गया है अतः

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{AC - AE}$$

$$\text{या, } \frac{4}{13} = \frac{AE}{20.4 - AE}$$

$$\text{या, } 13AE = 4(20.4 - AE):$$

$$\text{या, } 13AE = 4 \times 20.4 - 4AE$$

$$\text{या, } 13AE + 4AE = 4 \times 20.4$$

$$\text{या, } 17AE = 4 \times 20.4$$

$$\therefore AE = \frac{4 \times 20.4}{17} = 4 \times 1.2 = 4.8 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore AE = 4.8 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore EC = AC - AE$$

$$= 20.4 - 4.8 = 15.6 \text{ सेमी.}$$

(iii) $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया गया है अतः

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{या } \frac{7}{4} = \frac{6.3}{EC}$$

$$17EC = 4 \times 6.3$$

$$\therefore EC = \frac{4 \times 6.3}{7} = 4 \times 0.9 = 3.6 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore AC = AE + EC = 6.3 + 3.6 = 9.9 \text{ सेमी. उत्तर}$$

(iv) $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया गया है अतः

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से)}$$

$$\text{प्रश्नानुसार } \frac{4x-3}{3x-1} = \frac{8x-7}{5x-3}$$

$$\text{या } (4-3)(5x-3) = (3x-1)(8x-7)$$

$$\text{या } 20-15-12x+9 = 24-8x-21+7$$

$$\text{या } 24-20-29x+27x+7-9 = 0$$

$$\text{या } 4-2x-2 = 0$$

$$\text{या } 4-4x+2-2 = 0$$

$$4x(x-1)+2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(4x+2) = 0$$

$$\therefore \text{ या तो } x-1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

$$\text{या } 4x+2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

प्रश्न 2. $\triangle ABC$ की भुजाएँ AB एवं AC पर क्रमशः D व E दो बिन्दु स्थित हैं, निम्न प्रश्नों में दिये गये मानों के माध्यम से $DE \parallel BC$ होने एवं नहीं होने की जानकारी दीजिए।

(i) $AB = 12$ सेमी., $AD = 8$ सेमी., $AE = 12$ सेमी. और $AC = 18$ सेमी.

(ii) $AB = 5.6$ सेमी., $AD = 1.4$ सेमी., $AC = 9.0$ सेमी. तथा $AE = 1.8$ सेमी.

(iii) $AD = 10.5$ सेमी., $BD = 4.5$ सेमी., $AC = 4.8$ सेमी. तथा $AE = 2.8$ सेमी.

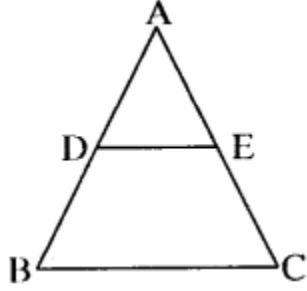
(iv) $AD = 5.7$ सेमी., $BD = 9.5$ सेमी., $AE = 3.3$ सेमी. तथा $EC = 5.5$ सेमी.

हल: (i) दिया है कि $\triangle ABC$ की भुजाओं AB एवं AC पर क्रमशः D व E दो बिन्दु स्थित हैं अतः

$AB = 12$ सेमी., $AD = 8$ सेमी., $AE = 12$ सेमी. और $AC = 18$ सेमी.

हम जानते हैं कि

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से)



∴ $BD = AB - AD = 12 - 8 = 4$ सेमी.

तथा $EC = AC - AE = 18 - 12 = 6$ सेमी.

∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{8}{4} = 2$ सेमी.(1)

तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{12}{6} = 2$ सेमी.(2)

(1) व (2) से $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

$DE \parallel BC$

(आधारभूत अनुपातिक प्रमेय के विलोम से)

(ii) $AB = 5.6$ सेमी., $AD = 1.4$ सेमी., $AC = 9.0$ सेमी. तथा $AE = 1.8$ सेमी.

∴ $BD = AB - AD = 5.6 - 1.4 = 4.2$ सेमी.

तथा $EC = AC - AE = 9.0 - 1.8 = 7.2$ सेमी.

∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ सेमी.(3)

तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{7.2} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$ सेमी.(4)

∴ (3) व (4) से

$$\frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{EC}$$

∴ DE, BC के समान्तर नहीं है।

(iii) $AD = 10.5$ सेमी., $BD = 4.5$ सेमी., $AC = 4.8$ सेमी. तथा $AE = 2.8$ सेमी.

यहाँ $EC = AC - AE = 4.8 - 2.8 = 2$ सेमी.

अब $\frac{AD}{BD} = \frac{10.5}{4.5} = \frac{105}{45} = \frac{7}{3}$ सेमी.(5)

तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{2.8}{2} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$ सेमी.(6)

समीकरण (5) व (6) से

$$\frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{EC}$$

∴ DE, BC के समान्तर नहीं है।

(iv) AD = 5.7 सेमी., BD = 9.5 सेमी., AE = 3.3 सेमी., EC = 5.5 सेमी.

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{5.7}{9.5} = \frac{3}{5} \text{ सेमी.} \quad \dots(7)$$

तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{3.3}{5.5} = \frac{3}{5} \text{ सेमी.} \quad \dots(8)$

समीकरण (7) व (8) से

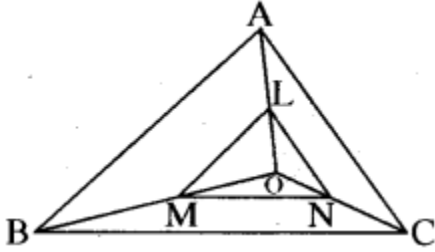
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से

$\Rightarrow DE \parallel BC$

$\Rightarrow DE$ भुजा BC के समान्तर है।

प्रश्न 3. दी गई आकृति में OA, OB और OC पर क्रमशः L, M एवं N बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि LM \parallel AB तथा MN \parallel BC है तो दर्शाइए LN \parallel AC है।



हल: दिया है-

$\triangle ABC$ में बिन्दु L, M एवं N क्रमशः OA, OB तथा OC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित हैं कि LM \parallel AB तथा MN \parallel BC.

सिद्ध करना है-

LN \parallel AC

उपपत्ति-

$\triangle OAB$ में LM \parallel AB (दिया है)

$$\therefore \frac{OL}{AL} = \frac{OM}{BM} \text{ (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से) } \dots(i)$$

पुनः $\triangle OBC$ में MN \parallel BC (दिया है)

$$\therefore \frac{OM}{BM} = \frac{ON}{CN} \text{ (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से) } \dots(ii)$$

(i) व (ii) से $\frac{ON}{CN} = \frac{OL}{AL}$

\therefore आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से

$\triangle OAC$ में LN \parallel AC है।

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. $\triangle ABC$ में AB व AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = CE$ है। यदि $\angle B = \angle C$ हो तो दर्शाइए $DE \parallel BC$ ।

हल: $\triangle ABC$ में दिया है कि $\angle B = \angle C$

$$\Rightarrow AC = AB$$

[\because समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ भी समान होती हैं।]

$$\Rightarrow AE + EC = AD + BD$$

$$\Rightarrow AE + CE = AD + BD$$

$$\Rightarrow AE + CE = AD + CE \quad [\because BD = CE]$$

$$\Rightarrow AE = AD$$

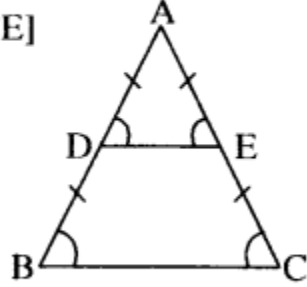
अतः $AD = AE$ तथा $BD = CE$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

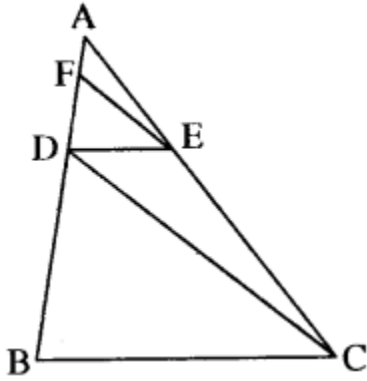
$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow DE \parallel BC \quad [\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय के विलोम से}]$$

(इतिसिद्धम्)



प्रश्न 5. आकृति में $DE \parallel BC$ और $CD \parallel EF$ हो तो सिद्ध कीजिए $AD^2 = AB \times AF$



हल: $\triangle ABC$ में दिया है कि $DE \parallel BC$ हैं।

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \dots(i)$$

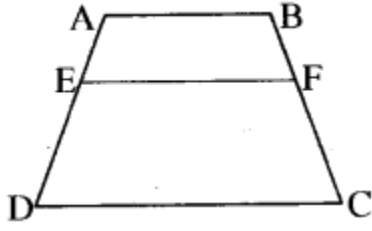
$\triangle ADC$ में दिया है कि $FE \parallel DC$ है।

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AE} \quad \dots(ii)$$

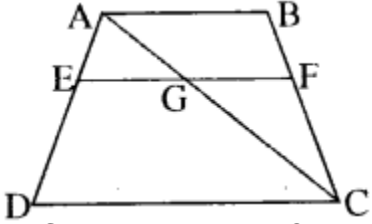
$$(i) \text{ व } (ii) \text{ से } \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AB \times AF \quad (\text{ इतिसिद्धम् })$$

प्रश्न 6. आकृति में यदि $EF \parallel DC \parallel AB$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



हल: A और C को मिलाएँ जो EF को G पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति)।
 $AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया है)



इसलिए $EF \parallel DC$ (एक ही रेखा के समान्तर रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं) अब $\triangle ADC$ में,
 $EG \parallel DC$ (PTF $EF \parallel DC$)

अतः $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (प्रमेय 6.1 के अनुसार)(i)

इसीप्रकार $\triangle CAB$ में

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

अर्थात्

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad \dots\dots(ii)$$

अतः (i) और (ii) से,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 7. ABCD पर समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी भुजा BC पर कोई बिन्दु P स्थित है। यदि DP एवं AB को आगे बढ़ाएँ तो वे L पर मिलते हैं। तो सिद्ध कीजिए

(i) $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$

(ii) $\frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$

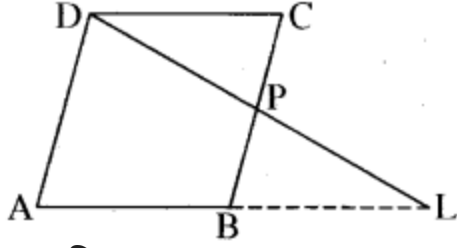
हल: दिया है-

एक समान्तर चतुर्भुज ABCD है जिसकी भुजा BC पर बिन्दु P इस प्रकार है कि बढ़ी हुई DP भुजा AB को बिन्दु L पर काटती है।

सिद्ध करना है-

(i) $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$

(ii) $\frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$



उपपत्ति-

(i) स्पष्ट है कि $\triangle AALD$ में $BP \parallel AD$ है।
अतः आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से

$$\frac{BL}{AB} = \frac{PL}{DP}$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{DC} = \frac{PL}{DP}$$

[\because ABCD एक \parallel gm है। अतः $AB = DC$]

$$\Rightarrow \frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL} \quad [\text{दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लेने पर}]$$

(ii) हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$ [(i) से]

$$\Rightarrow \frac{PL}{DP} = \frac{BL}{DC} \quad [\text{दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लेने पर}]$$

$$\Rightarrow \frac{PL}{DP} = \frac{BL}{AB} \quad [\because DC = AB]$$

$$\Rightarrow \frac{PL}{DP} + 1 = \frac{BL}{AB} + 1 \quad [\text{दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर}]$$

$$\Rightarrow \frac{PL+DP}{DP} = \frac{BL+AB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{DL}{DP} = \frac{AL}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC} \quad [\because AB = DC] \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 8. $\triangle ABC$ की भुजा AB पर D और E दो ऐसे बिन्दु स्थित हैं कि $AD = BE$ हो। यदि $DP \parallel BC$ तथा $EQ \parallel AC$ हो तो सिद्ध कीजिए $PQ \parallel AB$ ।

हल: $\triangle ABC$ में दिया है कि $DP \parallel BC$ और $EQ \parallel AC$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PC} \text{ तथा } \frac{BE}{EA} = \frac{BQ}{QC}$$

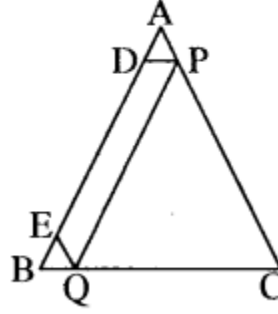
$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PC} \text{ और } \frac{AD}{DB} = \frac{BQ}{QC}$$

$$\left[\begin{array}{l} EA = ED + DA = ED + BE = BD \\ \therefore AD = BE \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC}$$

= बिन्दु P और Q त्रिभुज ABC की भुजाओं CA और CB को एक ही अनुपात में विभाजित करते हैं।

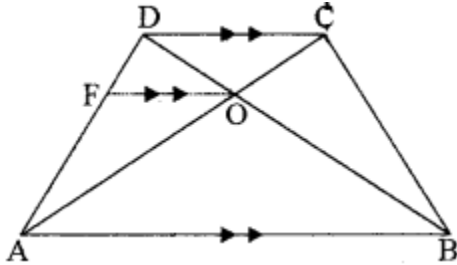
$\Rightarrow PO \parallel AB$.



प्रश्न 9. $\triangle BCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

हल: दिया है-

ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है। विकर्ण AC तथा BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है-

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

रचना-

O में से $FO \parallel DC \parallel AB$ खींचिए।

उपपत्ति-

अब $\triangle DAB$ में,

$$FO \parallel AB \quad (\text{रचना से})$$

$$\therefore \frac{DF}{FA} = \frac{DO}{OB} \quad \dots(i)$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से]

पुनः $\triangle DCA$ में,

$$FO \parallel DC \quad (\text{रचना से})$$

$$\frac{DF}{FA} = \frac{CO}{OA} \quad \dots(ii)$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से]

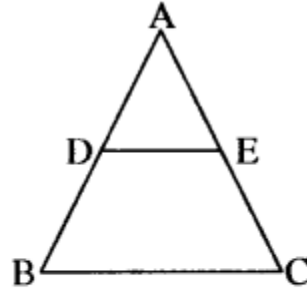
$$(i) \text{ और } (ii) \text{ से, } \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$$

$$\text{या } \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 10. यदि D और E क्रमशः AB और AC, त्रिभुज ABC की भुजाओं पर स्थित ऐसे बिन्दु हैं कि $BD = CE$ हो तो सिद्ध कीजिए $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल: त्रिभुज ABC में,

$$\begin{aligned} & \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE} \\ \Rightarrow & \frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{CE} + 1 \\ \Rightarrow & \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+CE}{CE} \\ \Rightarrow & \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CE} \\ \Rightarrow & \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BD} \quad (\because BD = CE) \\ \Rightarrow & AB = AC \end{aligned}$$



अतः त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु है।

Ex 11.3

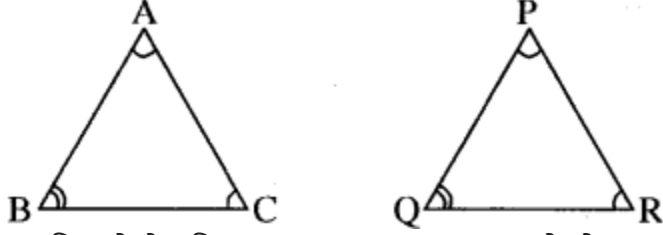
प्रश्न 1. दो त्रिभुज ABC और PQR में 28 और BF दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होना चाहिए, ताकि ये दोनों A समरूप हो सकें। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

हल: दिए गए दोनों त्रिभुजों $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में यह दिया गया है कि

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

या

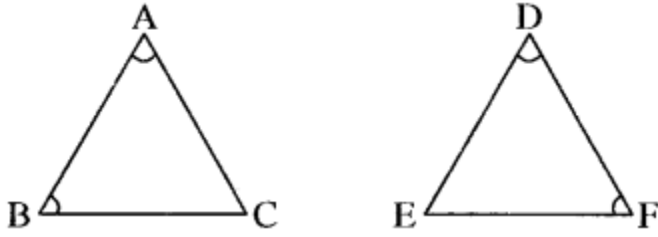
$$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$$



इन त्रिभुजों में यदि $\angle A = \angle P$ तथा $\angle C = \angle R$ हो तो $\angle B = \angle Q$ स्वतः ही हो जायेंगे तो दो त्रिभुज समान कोणिक हो जायेंगे तथा ये दोनों $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ समरूप हो जायेंगे।

प्रश्न 2. त्रिभुजों ABC एवं DEF में, $2A = \angle D$, $\angle B = \angle F$ हो तो क्या $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल:



चित्र के अनुसार $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ नहीं है क्योंकि दिए गए कोणों के क्रम में $\angle A = \angle D$ तो ठीक है लेकिन $\angle B \neq \angle F$ अतः दिए गए कोणों के क्रम के अनुसार $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ होना चाहिए।

प्रश्न 3. यदि $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ हो तो क्या जा सकता है ? उत्तर को कारण सहित लिखिए।

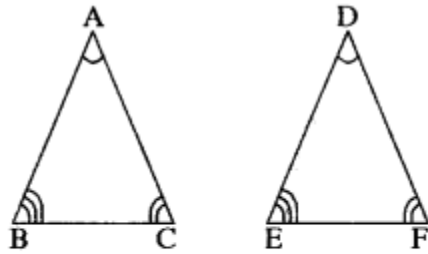
हल: प्रश्न में दिया गया है कि $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ लेकिन इसके आधार पर $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ नहीं लिखा जा सकता है। दिए गए अनुसार वास्तव में शीर्षों के क्रम में यह अनुपात $\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EF}$ होना चाहिए।

प्रश्न 4. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के क्रमशः समानुपाती एवं बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? कारण सहित उत्तर लिखिए।

हल: प्रश्न में दिया गया कथन सत्य नहीं है क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएँ और उनके अन्तर्गत बने कोण समान होने पर ही दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।

प्रश्न 5. समानकोणिक त्रिभुजों से क्या तात्पर्य है? इनमें परस्पर क्या सम्बन्ध हो सकता है?

हल: यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों तो वे दोनों त्रिभुज समानकोणिक त्रिभुज कहलाते हैं।



ΔABC व ΔDEF में,

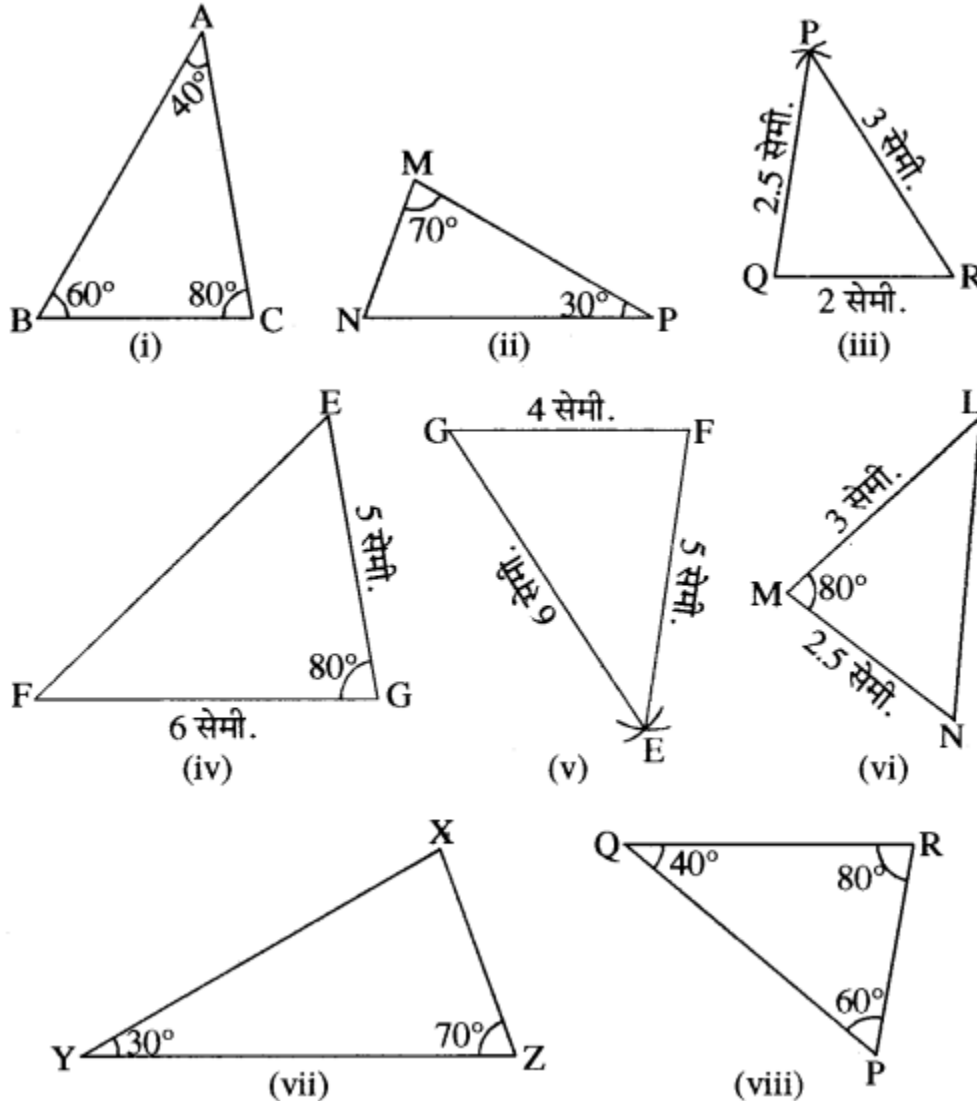
$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$$

तथा

$$\angle C = \angle F$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

प्रश्न 6. निम्न दिए गए त्रिभुजों की आकृतियों में से समरूप त्रिभुज युग्मों का चयन कीजिए और उन्हें समरूप होने की सांकेतिक भाषा में लिखिए।



हल:

(a) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (i) व (viii) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ लिखा जा सकता है क्योंकि यहाँ

$$\angle A = \angle Q = 40^\circ$$

$$\angle B = \angle P = 60^\circ$$

$$\angle C = \angle R = 80^\circ$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta QPR$$

(b) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (ii) व (vii) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta MPN \sim \Delta ZYX$ लिखा जा सकता है क्योंकि यहाँ

$$\angle M = \angle Z = 70^\circ$$

$$\angle P = \angle Y = 30^\circ$$

$$\therefore \Delta MPN \sim \Delta ZYX$$

(c) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (iii) व (v) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta PQR \sim \Delta EFG$ लिखा जा सकता है क्योंकि

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{2.5}{5.0} = \frac{1}{2}, \frac{QR}{GF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

तथा $\frac{PR}{GE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अतः $\frac{PQ}{EF} = \frac{QR}{GF} = \frac{PR}{GE}$

$\therefore \Delta PQR$ व ΔEFG समरूप हैं।

(d) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (iv) व (vi) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta MLN \sim \Delta EFG$

लिखा जा सकता है। क्योंकि

$$\angle E = \angle M = 80^\circ$$

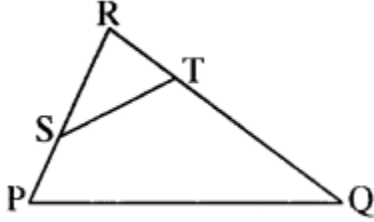
$$\frac{ML}{EF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{MN}{EG} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{ML}{EF} = \frac{MN}{EG}$$

$$\therefore \Delta MLN \sim \Delta EFG$$

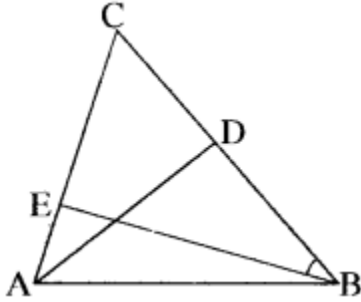
प्रश्न 7. आकृति में $\triangle PRQ \sim \triangle TRS$ हो तो बताइए इस समरूप त्रिभुज युग्म में कौन-कौनसे कोण परस्पर समान होने चाहिए?



हल: प्रश्न में दिए अनुसार $\triangle PQR \sim \triangle TRS$ है। इन दोनों समरूप त्रिभुजों में $\angle RPQ = \angle RTS$ तथा $\angle RQP = \angle RST$ होने चाहिए।

$\angle R = \angle R$	(उभयनिष्ठ कोण)
$\angle P = \angle T$	संगत कोण
$\angle Q = \angle S$	संगत कोण

प्रश्न 8. आपको आकृति में स्थित उन दो त्रिभुजों का चयन करना है जो परस्पर समरूप हैं। यदि $\angle CBE = \angle CAD$ है।



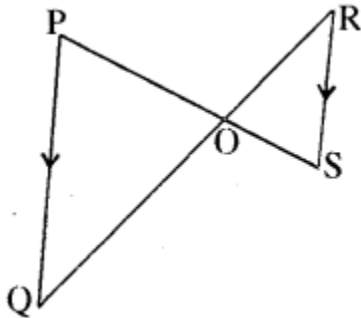
हल: प्रश्न में दी गई शर्त के अनुसार,

$$\because \angle CBE = \angle CAD$$

\therefore वे ऐसे समरूप त्रिभुज ADC तथा त्रिभुज BEC होंगे अर्थात्

$$\triangle ADC \sim \triangle BEC.$$

प्रश्न 9. आकृति में PQ और RS समान्तर हैं, तो सिद्ध कीजिए $\triangle POQ \sim \triangle SOR$



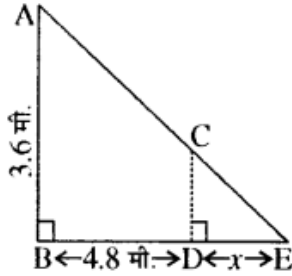
(माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

	PQ RS	(दिया है)
अतः	$\angle P = \angle S$	(एकान्तर कोण)
और	$\angle Q = \angle R$	(एकान्तर कोण)
साथ ही	$\angle POQ = \angle SOR$	(शीर्षाभिमुख कोण)
इसलिये	$\Delta POQ \sim \Delta SOR$	(AAA समरूपता कसौटी) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्भे के आधार से परे 1.2 मीटर/सेकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सेकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?

हल: माना AB एक बल्ब लगा खम्भा है। तथा एक लड़की है जो 1.2 मी./से. की चाल से चल रही है तथा 4 सेकण्ड के पश्चात् उसकी स्थिति CD पर है तथा DE उसकी छाया है।



माना

$$DE = x \text{ मीटर}$$

$$BD = 1.2 \text{ मीटर} \times 4$$

$$4.8 \text{ मीटर}$$

अब ΔABE तथा ΔCDE में,

$$\angle B = \angle D = 90^\circ$$

[क्योंकि खम्भा व लड़की दोनों जमीन पर ऊर्ध्वाधर हैं] $\angle A = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

इसलिये AA समरूपता से

$$\Delta ABE \sim \Delta CDE$$

$$\text{अतएव} \quad \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} \quad \left[\because 90 \text{ सेमी.} = \frac{90}{100} \text{ मीटर} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4.8 + x}{x} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 4.8 + x = 4x$$

$$\Rightarrow \quad 4x - x = 4.8$$

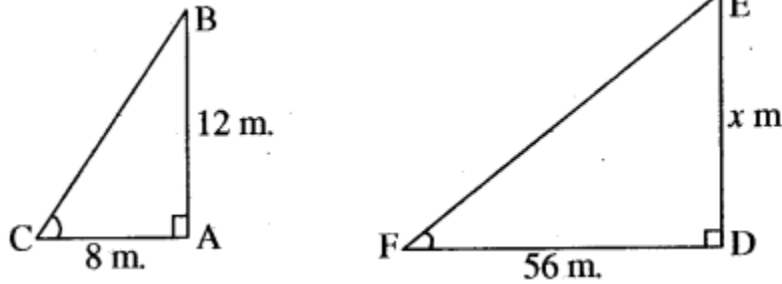
$$\Rightarrow \quad 3x = 4.8$$

$$\therefore \quad x = \frac{4.8}{3} = 1.6 \text{ मीटर}$$

\therefore 4 सेकण्ड के बाद लड़की की छाया 1.6 मीटर होगी।

प्रश्न 11. 12 मीटर लम्बाई वाली ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 8 मीटर है, उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: पहले चित्रानुसार माना AB एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ है तथा AC उसकी परछाई है। पुनः दूसरे चित्रानुसार DE एक मीनार है और DF उसकी परछाई है।



प्रश्नानुसार $AB = 12 \text{ m}$, $AC = 8 \text{ m}$ तथा $DF = 56 \text{ m}$
माना $DE = x \text{ m}$, अब $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में
 $\angle A = \angle D = 90^\circ$ तथा $\angle C = \angle F$ (उन्नयन कोण सूर्य का)
अतः समरूपता की AA कसौटी से

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{8}{56} \quad \Rightarrow x = \frac{12 \times 56}{8}$$

$$\therefore x = 84 \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 84 m है।

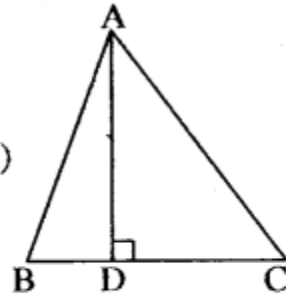
प्रश्न 12. किसी $\triangle ABC$ के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा BC पर लम्ब डालने पर $AD^2 = BD \times DC$ प्राप्त होता है, तो सिद्ध कीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल: त्रिभुज BDA तथा $\triangle ADC$ में

$$\Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$$

$$\Rightarrow AD^2 = BD \times DC \text{ (दिया है)}$$

तथा $\angle BDA = \angle ADC$
(प्रत्येक कोण समकोण)



अतः समरूपता की SAS कसौटी से
 $\triangle BDA \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle CAD \text{ और } \angle BAD = \angle ACD$$

$$\Rightarrow \angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle BAD$$

$$\Rightarrow \angle B + \angle C = \angle A$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 2\angle A \text{ (दोनों पक्षों में } \angle A \text{ जोड़ने पर)}$$

$$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर बनने वाले चारों त्रिभुज अपने मूल त्रिभुज के समरूप होते ।

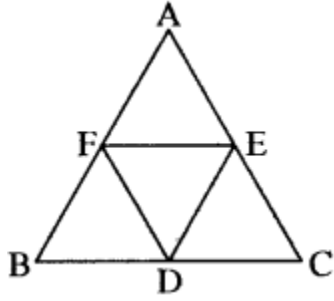
हल: दिया है—

एक $\triangle ABC$ है जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। DE, EF और FD को मिलाने पर हमें निम्न चार त्रिभुज प्राप्त होते हैं।

$\triangle AFE$, $\triangle FED$, $\triangle EDC$ तथा $\triangle DEF$

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की। दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसकी आधी होती है। स्पष्ट है कि $\triangle ABC$ में E और F क्रमशः भुजाओं AC और AB के मध्य-बिन्दु हैं।



$$\therefore FE \parallel BC$$

$$\Rightarrow \angle AFE = \angle B \text{ (संगत कोण)}$$

अतः $\triangle AFE$ और $\triangle ABC$ में

$$\angle AFE = \angle B$$

$$\text{तथा } \angle A = \angle A$$

$\therefore \triangle AFE \sim \triangle ABC$ (समरूपता की AA कसौटी से)

इसी प्रकार चूँकि $DE \parallel AB$ और $DF \parallel CA$ है। अतः $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ और $\triangle FBD \sim \triangle ABC$ होगा। अब हमें यह सिद्ध करना है कि $\triangle DEF$ भी $\triangle ABC$ के समरूप होगा। चूँकि E और F क्रमशः भुजाओं AC और AB के मध्य बिन्दु हैं।

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{इसी प्रकार } DE = \frac{1}{2}AB \text{ तथा } DF = \frac{1}{2}AC$$

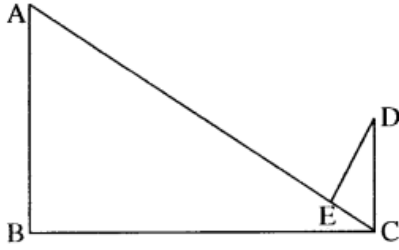
$$\text{अतः } \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \triangle DEF$ और $\triangle ABC$ की भुजाएँ समानुपाती हैं।

$$\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

अतः $\triangle AFE$, $\triangle FBD$, $\triangle EDC$ और $\triangle DEF$ प्रत्येक $\triangle ABC$ के समरूप है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. आकृति दर्शाए अनुसार यदि $AB \perp BC$, $DC \perp BC$ और $DE \perp AC$ हो तो सिद्ध कीजिए $\triangle CED \sim \triangle ABC$



हल: दिया है

$AB \perp BC$

$DC \perp BC$ एवं

$DE \perp AC$

सिद्ध करना है-

$\triangle CED \sim \triangle ABC$.

उपपत्ति-

$\triangle ABC$ में

$\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$ (1)

$\angle BCA + \angle ECD = 90^\circ$ (2) ($DC \perp BC$)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle BAC = \angle ECD$ (3)

$\triangle CED$ व $\triangle ABC$ में

$\angle CED = \angle ABC$ (प्रत्येक 90°)

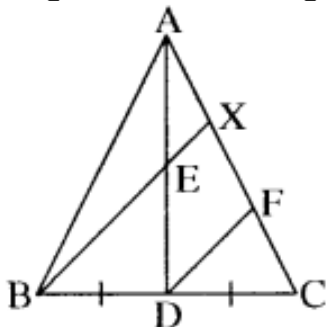
$\angle ECD = \angle BAC$ (समीकरण 3 से)

$\therefore \triangle CED \sim \triangle ABC$ (कोण-कोण सर्वांगसमता से)

प्रश्न 15. $\triangle ABC$ की भुजा BC के मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए $\frac{EX}{BE} = \frac{1}{2}$ है।

हल: दिया है-

बिन्दु D , BC का मध्य बिन्दु है तथा E , AD का मध्य बिन्दु है।



सिद्ध करना है-

$$\frac{EX}{BE} = \frac{1}{3}$$

रचना-

बिन्दु D से, $DF \parallel BX$.

उपपत्ति-

$\triangle AEX$ एवं $\triangle ADF$ में,

$\angle EAX = \angle DAF$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AXE = \angle AFD$ (सम्पूरक कोण)

$\therefore \triangle AEX \sim \triangle ADF$ (कोण-कोण सर्वांगसमता)

$$\frac{EX}{DF} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{EX}{DF} = \frac{AE}{2AE} \Rightarrow 2EX = DF \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार, $\triangle CDF \sim \triangle CBX$ (कोण-कोण सर्वांगसमता)

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DF}{BX}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{DF}{BE + EX}$$

$$\Rightarrow BE + EX = 2DF$$

$$\Rightarrow BE + EX = 2(2EX) \quad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\Rightarrow BE + EX = 4EX$$

$$\Rightarrow BE = 3EX$$

$$\therefore \frac{EX}{BE} = \frac{1}{3} \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

Ex 11.4

प्रश्न 1. निम्न के उत्तर सत्य एवं असत्य में देना है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए (यदि सम्भव हो)

(i) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं को अनुपात 4 : 9 है तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है।

(ii) दो त्रिभुजों क्रमशः ABC व DEF में यदि

$$\frac{\Delta ABC \text{ के क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ के क्षेत्रफल}} =$$

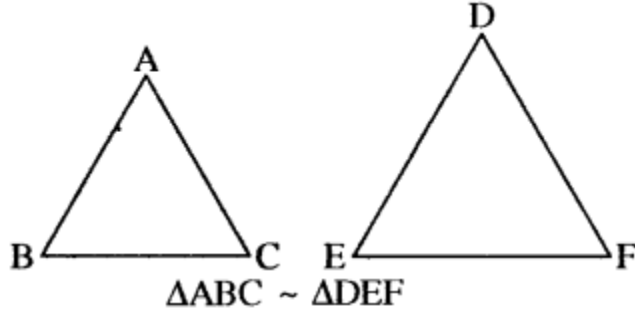
$$\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{9}{4} \text{ है तो } \Delta ABC = ADEF \text{ होगा।}$$

(iii) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।

(iv) $\triangle ABC$ एवं $\triangle AXY$ समरूप हों और उनके क्षेत्रफलों का मान समान हो तो XY एवं BC सम्पाती भुजाएँ हो सकती हैं।

हल:

(i)



$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DEF)} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

दिया गया कथन असत्य है। उत्तर

$$(ii) \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

संगत भुजाओं का अनुपात 3 : 2 है जबकि सर्वांगसमता के लिये यह अनुपात 1 : 1 होता है।

अतः कथन असत्य है।

(iii) यह दिया गया कथन भी असत्य है क्योंकि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के समानुपाती नहीं अपितु बराबर होता है।

(iv) $\Delta ABC \sim \Delta AXY$ समरूप है।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta AXY \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{(BC)^2}{(XY)^2} = \frac{(AC)^2}{(AY)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{(BC)^2}{(XY)^2} = \frac{(AC)^2}{(AY)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{1}{1} \text{ या } \frac{AB}{AX} = \frac{1}{1}$$

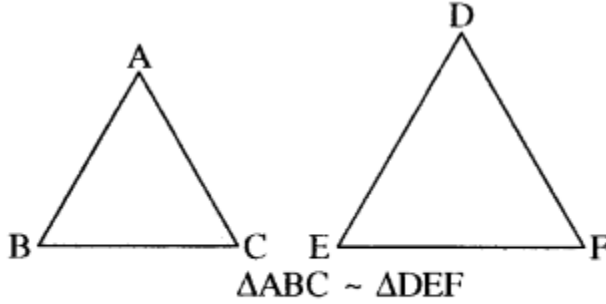
या $AB = AX$

इसी प्रकार $BC = XY$ और $AC = AY$

अतः कथन सत्य है।

प्रश्न 2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. हैं यदि $EF = 15.4$ सेमी. हो तो BC ज्ञात कीजिए।

हल: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, ΔABC का क्षेत्रफल = 64 cm और ΔDEF का क्षेत्रफल = 121 cm² और $EF = 15.4$ cm है।



$$\therefore \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

[\because हम जानते हैं कि यदि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।]

$$\text{या,} \quad \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\text{या,} \quad \left(\frac{8}{11}\right)^2 = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\text{या,} \quad \frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

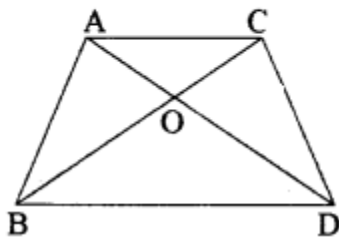
$$\therefore BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$BC = 8 \times 1.4$$

$$BC = 11.2 \text{ cm.}$$

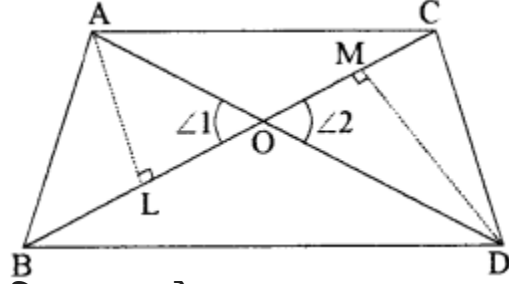
प्रश्न 3. एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं। यदि AD व BC परस्पर O पर प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$$



हल: दिया है-

ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर स्थित बने हुए दो त्रिभुज हैं। AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है-

$$\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$$

रचना-

$AL \perp BC$, $DM \perp BC$ खींचिए।

उपपत्ति-

ΔALO और ΔDMO में,

$$\angle 1 = \angle 2 \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

$$\angle L = \angle M \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\therefore \Delta ALO \sim \Delta DMO \text{ [AA समरूपता कसौटी]}$$

$$\therefore \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO} \quad \dots (i)$$

[\because यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।]

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times BC \times DM}$$

$$\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AL}{DM}$$

$$\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO} \quad \left[\because \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO} \right]$$

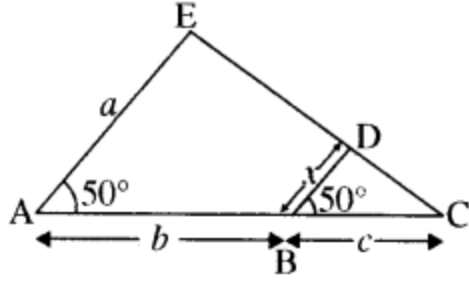
(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. निम्न प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए

(i) ΔABC में $DE \parallel BC$ एवं $AD:DB = 2:3$ हो तो ΔADE एवं ΔABC के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

(ii) रेखाखण्ड AB के बिन्दु A व B पर PB और QA लम्ब है। यदि P व Q, AB के दोनों ओर स्थित हों और P व Q को मिलाने पर वह AB को O पर प्रतिच्छेद करे तथा $PO = 5$ सेमी., $QO = 7$ सेमी., ΔPOB का क्षेत्रफल 150 सेमी. हो तो ΔQOA का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(iii) आकृति में x का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए।



हल:

हल—(i) ΔABC में

$BC \parallel DE$ तथा

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \text{ (दिया है)}$$

ΔABC व ΔDEA में

$$\angle B = \angle D$$

$$\angle C = \angle E$$

A-A समरूपता कसौटी से

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \text{ दिया है}$$

$$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{3}{2}$$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{DB + AD}{AD} = \frac{3 + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{5}{2}$$

....(1)

इसलिये

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

[त्रिभुज समरूप हो तो उन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनकी भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है ।]



$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\therefore ar(\Delta ADE) : ar(\Delta ABC) = 4 : 25 \text{ उत्तर}$$

(ii) ΔQAO और ΔPBO में

$$\angle QAO = \angle PBO = 90^\circ$$

तथा $\angle QOA = \angle POB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

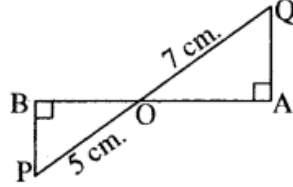
अतः समरूपता की कसौटी से

$$\Delta QAO \sim \Delta PBO$$

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta QAO)}{ar(\Delta PBO)} = \frac{QO^2}{PO^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta QAO)}{150} = \frac{7^2}{5^2}$$

$$\Rightarrow ar(\Delta QAO) = \frac{150 \times 49}{25} = 294 \text{ वर्ग सेमी. उत्तर}$$



(iii) ΔCBD व ΔCAE में

$$\angle CBD = \angle CAE = 50^\circ \text{ (दिया है)}$$

$$\angle C = \angle C \text{ (उभयनिष्ठ कोण)}$$

अतः समरूपता की कसौटी से

$$\Delta CBD \sim \Delta CAE$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AE}$$

(समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$$\Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ac}{b+c} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. ΔABC में $\angle B = 90^\circ$ हो एवं BD कर्ण AC पर लम्बे हो तो सिद्ध कीजिए $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

हल: दिया है-

एक समकोण त्रिभुज ABC है जिसमें $\angle ABC = 90^\circ$ है तथा $BD \perp AC$ है।

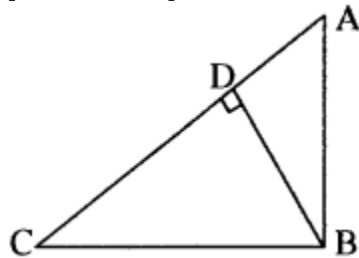
सिद्ध करना है-

$$\Delta ADB \sim \Delta BDC$$

उपपत्ति-

स्पष्ट है कि $\angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$

$$[\because \angle B = 90^\circ]$$



तथ $\angle C + \angle DBC + \angle BDC = 180^\circ$
(त्रिभुज BCD में कोण योग गुणधर्म से)

$$\Rightarrow \angle C + \angle DBC + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C + \angle DBC = 90^\circ$$

परन्तु $\angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 2\angle C + \angle DBC$$

$$\Rightarrow \angle DBC + 2\angle C = \angle ABD + \angle DBC$$

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle C \dots\dots(i)$$

अतः $\triangle ADB$ और $\triangle BDC$ में।

$\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$ (प्रत्येक कोण 90° के बराबर)

अतः समरूपता की कसौटी से

$\triangle ADB \sim \triangle BDC$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल: दिया है-

एक वर्ग $\triangle BCD$ है जिसकी भुजा BC पर समबाहु त्रिभुज BCE तथा विकर्ण AC पर समबाहु त्रिभुज ACF बनाया गया है।

सिद्ध करना है-

$$ar(\triangle BCE) = \frac{1}{2}ar(\triangle ACF)$$

उपपत्ति-

चूँकि $\triangle BCE$ और $\triangle ACF$ दोनों ही समबाहु त्रिभुज हैं।

$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACF$ [∵ दोनों त्रिभुजों का प्रत्येक कोण 60° है अतः दोनों त्रिभुज समानकोणीय हैं।]

$$\Rightarrow \frac{ar(\triangle BCE)}{ar(\triangle ACF)} = \frac{BC^2}{AC^2} \dots\dots(i)$$

स्पष्ट है कि वर्ग ABCD में

$$AC = \sqrt{2} BC$$

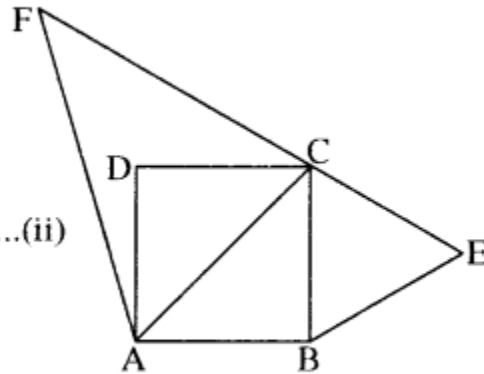
$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{ar(\triangle BCE)}{ar(\triangle ACF)} = \frac{1}{2}$$

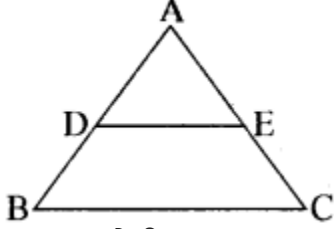
$$\Rightarrow ar(\triangle BCE) = \frac{1}{2}ar(\triangle ACF) \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$



Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 11

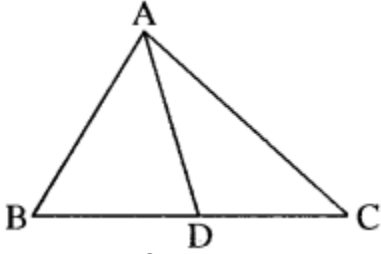
प्रश्न 1. आकृति में $DE \parallel BC$ हो, $AD = 4$ सेमी., $DB = 6$ सेमी. एवं $AE = 5$ सेमी. हो, तो EC का मान होगा



- (क) 6.5 सेमी.
- (ख) 7.0 सेमी.
- (ग) 7.5 सेमी.
- (घ) 8.0 सेमी

उत्तर: (ग) 7.5 सेमी.

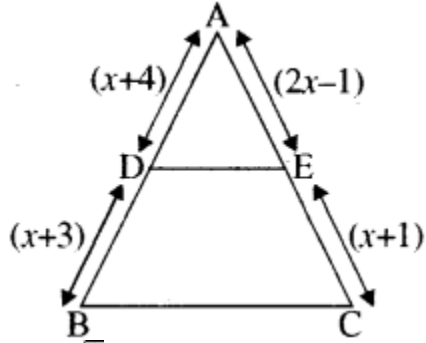
प्रश्न 2. आकृति में AD , कोण A का समद्विभाजक, $AB = 6$ सेमी., $BD = 8$ सेमी., $DC = 6$ सेमी. हो, तो AC का मान होगा



- (क) 4.0 सेमी.
- (ख) 4.5 सेमी.
- (ग) 5 सेमी.
- (घ) 5.5 सेमी.

उत्तर: (ख) 4.5 सेमी.

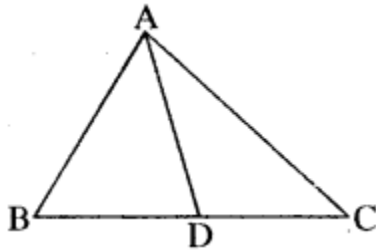
प्रश्न 3. आकृति में, यदि $DE \parallel BC$ हो, तो x को मान होगा



- (क) $\sqrt{5}$
- (ख) $\sqrt{6}$
- (ग) $\sqrt{3}$
- (घ) $\sqrt{7}$

उत्तर: (घ) $\sqrt{7}$

प्रश्न 4. आकृति में, यदि $AB = 3.4$ सेमी., $BD = 4$ सेमी., $BC = 10$ सेमी. हो, तो AC का मान होगा



- (क) 5.1 सेमी.
- (ग) 6 सेमी.
- (ख) 3.4 सेमी.
- (घ) 5.3 सेमी.

उत्तर: (क) 5.1 सेमी.

प्रश्न 5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 25 सेमी. एवं 36 सेमी. हैं, यदि छोटे त्रिभुज की माधिका 10 सेमी. हो तो बड़े त्रिभुज की संगत माधिका होगी

- (क) 12 सेमी.
- (ख) 15 सेमी.
- (ग) 10 सेमी.
- (घ) 18 सेमी.

उत्तर: (क) 12 सेमी.

प्रश्न 6. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB || CD है एवं इसके विकर्ण O बिन्दु पर मिलते हैं। यदि AB = 6 सेमी. एवं DC = 3 सेमी. हो, तो ΔAOB के क्षेत्रफल एवं ΔCOD के क्षेत्रफल का अनुपात होगा

- (क) 4:1
- (ख) 1:2
- (ग) 2:1
- (घ) 1:4

उत्तर: (क) 4:1

प्रश्न 7. यदि ΔABC एवं ΔDEF में $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$, $\angle E = 70^\circ$ एवं $\angle F = 50^\circ$ हो तो निम्नलिखित में सही है

- (क) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
- (ख) $\Delta ABC \sim \Delta EDF$
- (ग) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$.
- (घ) $\Delta ABC \sim \Delta FED$

उत्तर: (घ) $\Delta ABC \sim \Delta FED$

प्रश्न 8. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो एवं AB = 10 सेमी., DE = 8 सेमी. हो, तो ΔABC का क्षेत्रफल ΔDEF का क्षेत्रफल होगा

- (क) 25 : 16
- (ख) 16 : 25
- (ग) 4 : 5
- (घ) 5 : 4

उत्तर: (क) 25 : 16

प्रश्न 9. ΔABC की भुजाओं AB एवं AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि DE || BC है एवं AD = 8 सेमी., AB = 12 सेमी. तथा AE = 12 सेमी. हो, तो CE का माप होगा

- (क) 6 सेमी.
- (ख) 18 सेमी.
- (ग) 9 सेमी.
- (घ) 15 सेमी.

उत्तर: (क) 6 सेमी.

प्रश्न 10. एक 12 सेमी. लम्बी ऊर्ध्वाधर छड़ की जमीन पर छाया की लम्बाई 8 सेमी. लम्बी है। यदि इसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 40 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी

- (क) 60 मीटर
(ख) 60 सेमी.
(ग) 40 सेमी.
(घ) 80 सेमी.

उत्तर: (क) 60 मीटर

प्रश्न 11. $\triangle ABC$ में यदि D, BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ हो, एवं $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 50^\circ$ हो, तो $\angle BAD$ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-

$\triangle ABC$ जिसमें D, BC पर बिन्दु इस प्रकार है कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ तथा $\angle B = 70^\circ$ व $20 = 50^\circ$ ज्ञात करना है— $\angle BAD$

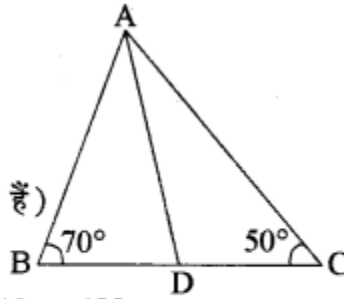
उपपत्ति—यहाँ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ (दिया है)

अतः $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ (लिख सकते हैं)

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ADC$

$$\angle A = [180 - (70 + 50)] = 60^\circ$$

अतः $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle A = \frac{60}{2} = 30^\circ$



प्रश्न 12. यदि $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ हो, एवं $AD = 6$ सेमी., $DB = 9$ सेमी. और $AE = 8$ सेमी. हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

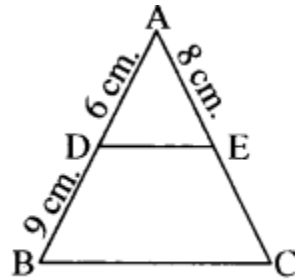
हल: $\triangle ABC$ में दिया है कि $DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{8}{EC}$$

$$\Rightarrow EC = \frac{9 \times 8}{6} = 12 \text{ सेमी.}$$

$\therefore AC = AE + EC = 8 + 12 = 20$ सेमी. उत्तर



प्रश्न 13. यदि $\triangle ABC$ में $2A$ का समद्विभाजक AD हो एवं $AB = 8$ सेमी., $BD = 5$ सेमी. एवं $DC = 4$ सेमी. हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ABC$ में

AD , शीर्ष कोण A का समद्विभाजक है।

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

इसलिए आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

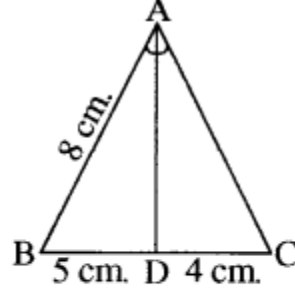
यहाँ $AB = 8$ सेमी., $BD = 5$ सेमी.

तथा $DC = 4$ सेमी.

मान रखने पर

$$\frac{5}{4} = \frac{8}{AC}$$

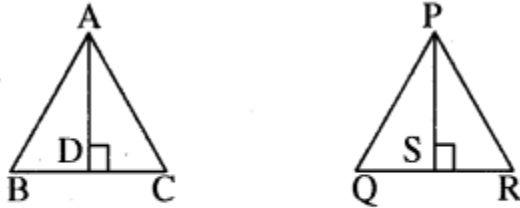
$$\Rightarrow AC = \frac{8 \times 4}{5} = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ सेमी.}$$



प्रश्न 14. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाइयों का अनुपात 4:9 हो, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बीच अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

माना $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ समरूप हैं और AD और PS इनकी संगत ऊँचाई है।



$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle PQR)} = \frac{(AD)^2}{(PS)^2} = \frac{(4)^2}{(9)^2} = \frac{16}{81}$$

इसलिये त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = 16 : 81

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

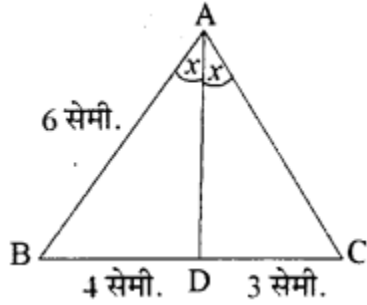
वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. दो सरल रेखाएँ जो एक ही रेखा के लम्बवत् हों, परस्पर कहलाती हैं

- (A) लम्ब रेखाएँ।
- (B) समान्तर रेखाएँ
- (C) समद्विभाजित रेखाएँ
- (D) समान रेखाएँ

उत्तर: (B) समान्तर रेखाएँ

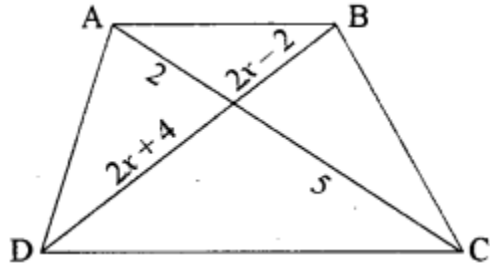
प्रश्न 2. दी गई आकृति में AD, $\angle A$ का अन्तः समद्विभाजक है। यदि AB = 6 सेमी., BD = 4 सेमी. और DC = 3 सेमी. हो तो AC का मान है



- (A) 3 सेमी.
- (B) 4 सेमी.
- (C) 4.5 सेमी.
- (D) 5 सेमी.

उत्तर: (C) 4.5 सेमी.

प्रश्न 3. संलग्न आकृति में यदि AB \parallel CD हो तो x का मान है



- (A) 1
- (B) 2

- (C) 3
(D) 4

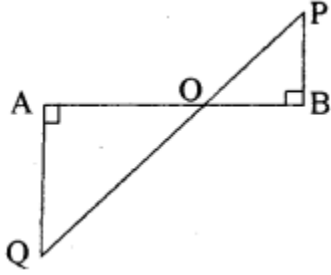
उत्तर: (C) 3

प्रश्न 4. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाइयों का अनुपात 9 : 16 हो तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा

- (A) 81 : 256
(B) 81 : 156
(C) 16 : 9
(D) 3 : 4

उत्तर: (A) 81 : 256

प्रश्न 5. दी गई आकृति में QA और PB, AB पर लम्बवत् हैं। यदि AO = 10 सेमी., BO = 6 सेमी. तथा PB = 9 सेमी. हो तो AQ की लम्बाई है



- (A) 12 सेमी.
(B) 15 सेमी.
(C) 18 सेमी.
(D) 21 सेमी.

उत्तर: (B) 15 सेमी.

प्रश्न 6. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है, यदि $\angle A = 40^\circ$, $\angle E = 80^\circ$ है तो $\angle C$ का मान है

- (A) 70°
(B) 60°
(C) 50°
(D) 40°

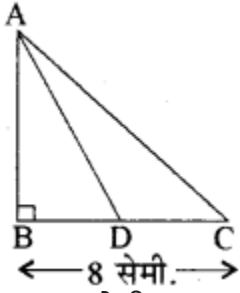
उत्तर: (B) 60°

प्रश्न 7. यदि $\triangle ABC$ में D भुजा BC को मध्य बिन्दु हो और $AB^2 + AC^2 = x (BD^2 + AD^2)$ तो x का मान होगा

- (A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) शून्य

उत्तर: (B) 2

प्रश्न 8. चित्र में $\triangle ABC$ एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है जहाँ $\angle B = 90^\circ$ है। यदि $BC = 8$ सेमी. है तो AD की लम्बाई क्या होगी? जहाँ D , BC का मध्य बिन्दु है



- (A) 20 सेमी.
(B) $\sqrt{20}$ सेमी.
(C) $2\sqrt{20}$ सेमी.
(D) $4\sqrt{20}$ सेमी.

उत्तर: (C) $2\sqrt{20}$ सेमी.

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. $\triangle ABC$ में AD कोण BAC का समद्विभाजक है। यदि $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BD = 2$ cm है तो BC का मान ज्ञात कीजिए।

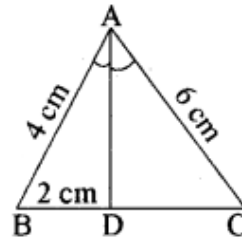
हल: आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

या

$$DC = \frac{BD \times AC}{AB}$$

मान रखने पर



$$= \frac{6 \times 2}{4} = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore BC = BD + DC$$

$$= 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

प्रश्न 2. किसी त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण कैसे होते हैं?

उत्तर: बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

प्रश्न 3. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 5 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: \because समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर है, अतः त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में अनुपात
 $= (4 : 5)^2$
 $= 16 : 25$

प्रश्न 4. बौधायन प्रमेय का कथन लिखिए।

उत्तर: बौधायन प्रमेय-किसी आयत के विकर्ण से बने वर्ग का क्षेत्रफल इसकी दोनों आसन्न भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

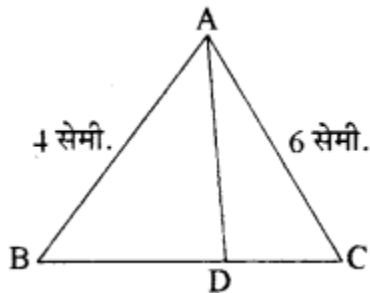
प्रश्न 5. दी गई आकृति में AD, $\angle A$ का अन्तःसमद्विभाजक है। यदि AB = 4 सेमी., AC = 6 सेमी. है तो BD : DC लिखिए।

हल:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

अतः $\frac{4}{6} = \frac{BD}{DC}$

अतः $BD : DC = 4 : 6 = 2 : 3$



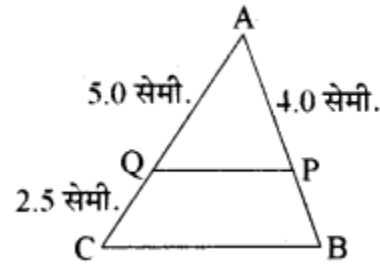
प्रश्न 6. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 5$ सेमी., $DE = 3$ सेमी. तथा ΔABC का क्षेत्रफल = 50 सेमी. है, तो ΔDEF का क्षेत्रफल लिखिए।

हल:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} &= \frac{(AB)^2}{(DE)^2} \\ &= \frac{50}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{25}{9} \\ \Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{50 \times 9}{25} = 18 \text{ सेमी.}^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 7. संलग्न आकृति में $BC \parallel PQ$ यदि $AP = 4$ सेमी., $AQ = 5$ सेमी. तथा $QC = 2.5$ सेमी. तो PB का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$



$$= \frac{5}{2.5} = \frac{4}{PB}$$

अतः $PB = \frac{4}{2} = 2$ सेमी.

प्रश्न 8. उपर्युक्त प्रश्न के चित्र में यदि $AB = 7$ सेमी., $AP = 5$ सेमी. तथा $AC = 10.5$ सेमी. तो AQ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AQ} &= \frac{AB}{AP} \\ &= \frac{10.5}{AQ} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

अतः $AQ = \frac{10.5 \times 5}{7} = 7.5$ सेमी.

प्रश्न 9. दो समरूप त्रिभुज ABC तथा PQR के परिमाण क्रमशः 36 सेमी. तथा 24 सेमी. हैं। यदि $PQ = 10$ सेमी. हो तो AB ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24}$$
$$= \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

अतः $AB = 15$ सेमी.

प्रश्न 10. यदि दो त्रिभुज ABC और XYZ में $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{ZX}$ ता ΔABC के कोण A का मान त्रिभुज XYZ के किस कोण के बराबर होगा?

उत्तर: $\angle X$ के समान।

प्रश्न 11. यदि ΔABC एवं ΔDEF $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ आपस में कैसे त्रिभुज होंगे?

उत्तर: समरूप त्रिभुज।

प्रश्न 12. दो त्रिभुजों के समरूप होने की दो दशाएँ बताइए।

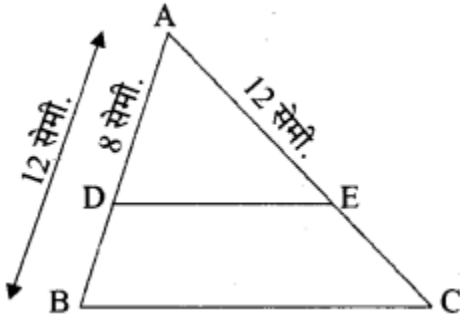
उत्तर: दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि

- उनके संगत कोण समान हों
- उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

प्रश्न 13. SSS नियम लिखिए।

उत्तर: SSS नियम-यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, तो वे दोनों समरूप होते हैं।

प्रश्न 14. ΔABC की भुजाओं AB और AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि $DE \parallel BC$ यदि $AD = 8$ सेमी., $AB = 12$ सेमी. तथा $AE = 12$ सेमी. हो तो CE का माप लिखिए।



हल: आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से

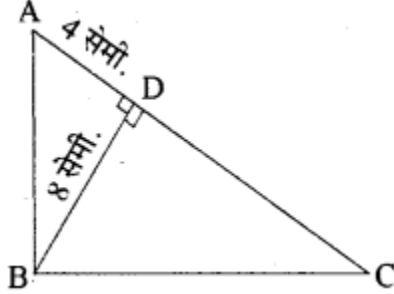
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

यहाँ $AD = 8$ सेमी., $BD = (12 - 8) = 4$ सेमी. तथा $AE = 12$ सेमी. है। अतः मान रखने पर

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{CE}$$

$$CE = \frac{12}{8} \times 4 = 6 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 15. दी गई आकृति में $\angle ABC = 90^\circ$ तथा $BD \perp AC$ है। यदि $BD = 8$ सेमी. तथा $AD = 4$ सेमी. हो तो CD को माप लिखिए।



हल: $\triangle ABD$ व $\triangle BDC$ में

$\triangle ABD$ व $\triangle BDC$ में

$$\angle BDC = \angle BDA \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle DBC = \angle BAD$$

अतः $\triangle ABD \sim \triangle BDC$

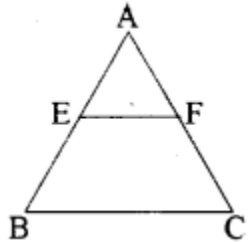
$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{CD} \text{ या } 4CD = 64$$

$$\text{अतः } CD = \frac{64}{4} = 16 \text{ सेमी. उत्तर}$$

प्रश्न 16. चित्र में $EF \parallel BC$, यदि $AE:BE = 4:1$ और $CF = 1.5$ सेमी. हो, तो AF की लम्बाई क्या होगी?

हल: चित्र में $EF \parallel BC$



$$\begin{aligned} \therefore \frac{AE}{BE} &= \frac{AF}{CF} \\ \Rightarrow \frac{4}{1} &= \frac{AF}{1.5} \\ \Rightarrow AF &= 4 \times 1.5 \\ &= 6.0 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

प्रश्न 17. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 16 : 81 है तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: ∵ समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।
 अतः इनकी भुजाओं का अनुपात
 $= \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$
 अतः इनकी भुजाओं का अनुपात = 4 : 9

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ है। यदि $AC = 5.6$ इकाई हो तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया हुआ है।

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा})$$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{(AC - AE)}$$

$$\text{या} \quad \frac{3}{5} = \frac{AE}{5.6 - AE}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \text{ एवं } AC = 5.6 \text{ इकाई}$$

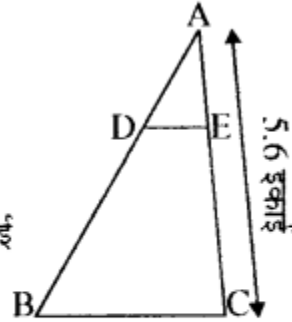
$$\text{या} \quad 3(5.6 - AE) = 5AE$$

$$\text{या} \quad 16.8 - 3AE = 5AE$$

$$\text{या} \quad 5AE + 3AE = 16.8$$

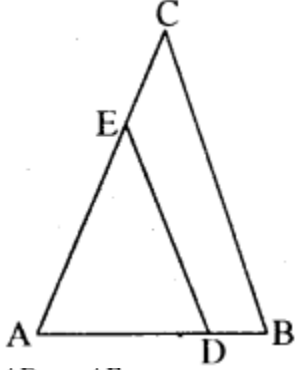
$$\text{या} \quad 8AE = 16.8$$

$$\text{या} \quad AE = \frac{16.8}{8} = 2.1 \text{ इकाई उत्तर}$$



प्रश्न 2. दी गई आकृति में $DE \parallel BC$ है यदि $AD = r$, $DB = r - 2$, $AE = r + 2$ और $EC = r - 1$ हो तो r का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ अतः



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा)}$$

$$\text{या } \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{या } x(x-1) = (x+2)(x-2)$$

$$\text{या } x^2 - x = x^2 - 4$$

$$\text{या } x = 4$$

प्रश्न 3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ है। AD व BC पर क्रमशः E और F इस प्रकार स्थित हैं कि $EF \parallel AB$ है। सिद्ध कीजिए

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

हल: A व C को मिलाइए। इस प्रकार AC, EI के बिन्दु G से गुजरता

$\therefore AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया हुआ है)

$\therefore EF \parallel DC$ (एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।)

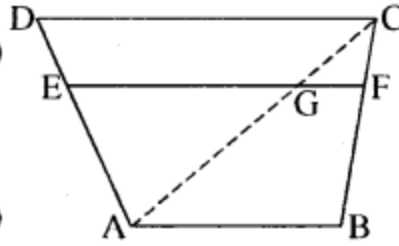
$\triangle ADC$ में $EG \parallel DC$ (यहाँ $EF \parallel DC$ और E(G, EF का ही भाग है।)

$$\text{अतः } \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \text{ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा)}$$

$$\text{या } \frac{AG}{CG} = \frac{AE}{ED} \text{(1)}$$

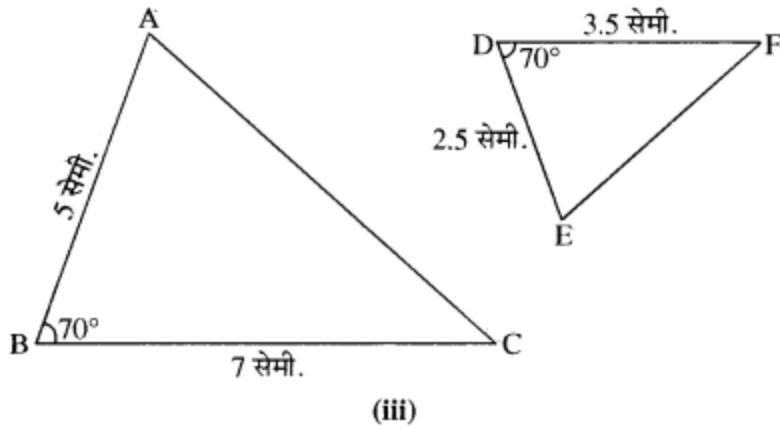
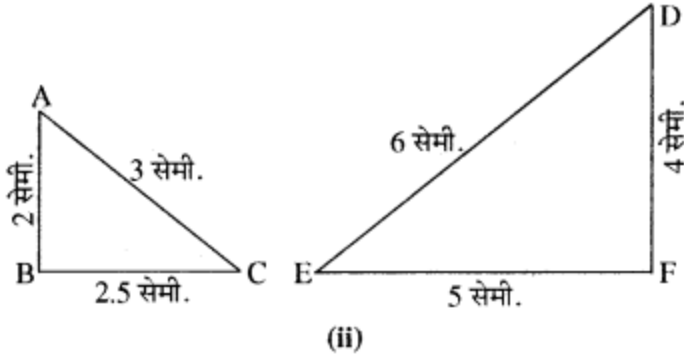
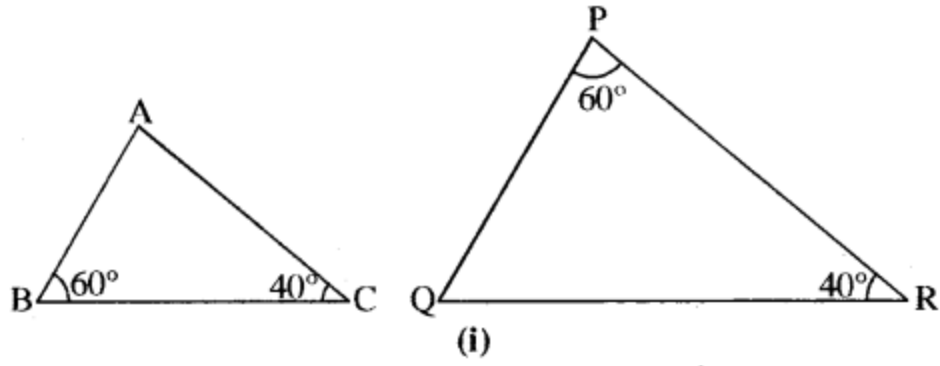
$$\text{इसी प्रकार } \triangle CAB \text{ में } \frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

$$\text{या } \frac{AG}{CG} = \frac{BF}{CF} \text{(2)}$$



$$\text{अतः (1) और (2) से } \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 4. आकृति में दर्शाए गए त्रिभुजों के युग्मों में कौन-कौनसे युग्म समरूप हैं? समरूपता के नियम लिखते हुए सांकेतिक रूप से लिखकर व्यक्त करें।



हल:

(i) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

चूँकि $\angle B = \angle P = 60^\circ$, $\angle C = \angle R = 40^\circ$

अतः $\angle A = 180 - (60 + 40) = \angle Q = 80^\circ$

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ होगा।

(ii) $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ में

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

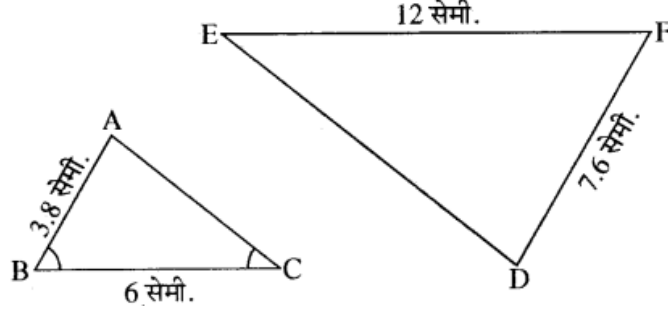
अतः SSS समरूपता प्रमेय से $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(iii) $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ में

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = 2 \text{ एवं } \angle ABC = 70^\circ = \angle EDF$$

अतः SAS समरूपता प्रमेय से $\triangle ABC \sim \triangle EDF$

प्रश्न 5. दी गई आकृति में $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ की तुलना कर $\angle D$, $\angle E$ एवं $\angle F$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल:

$$\triangle ABC \text{ एवं } \triangle DEF \text{ में } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$$

अतः SSS समरूपता प्रमेय से।

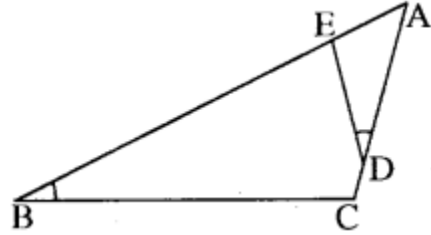
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle D, \angle B = \angle F, \angle C = \angle E$$

$$\Rightarrow \angle F = 60^\circ \text{ उत्तर } \angle E = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle D = 180 - (60 + 40) = 80^\circ$$

प्रश्न 6. आकृति में $\angle ADE = \angle B$ और $AD = 3.8$ सेमी., $AE = 3.6$ सेमी., $BE = 2.1$ सेमी. और $BC = 4.2$ सेमी. तो DE का मान ज्ञात कीजिए।



हल: $\triangle ADE$ एवं $\triangle ABC$ में

$\angle ADE$ एवं $\angle B$ (दिया हुआ) $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{या } \frac{AD}{AE+EB} = \frac{DE}{BC}$$

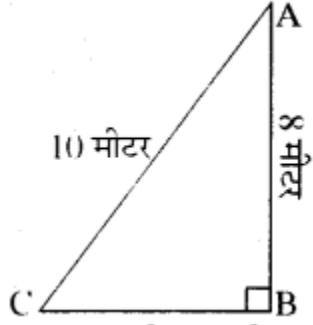
$$\Rightarrow \frac{3.8}{3.6+2.1} = \frac{DE}{4.2}$$

$$\text{या } DE = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = \frac{15.96}{5.7}$$

$$\text{या } DE = 2.8 \text{ सेमी. उत्तर}$$

प्रश्न 7. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी को एक दीवार पर टिकाने से वह भूमि से 8 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति के अनुसार $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle B = 90^\circ$ है।
अतः बौधायन प्रमेय से



$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ \text{या } BC^2 &= AC^2 - AB^2 \\ \text{या } BC^2 &= 10^2 - 8^2 \\ \text{या } BC^2 &= 100 - 64 \\ \text{या } BC^2 &= 36 \\ \text{या } BC &= \sqrt{36} = 6 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

प्रश्न 8. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी./घण्टे की चाल से उड़ता है। उसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी./घण्टे की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी?

हल: प्रथम हवाई जहाज की उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल \times समय = $1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ किमी.

दूसरे हवाई जहाज की पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद हवाई अड्डे से दूरी
= चाल \times समय = $1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी.

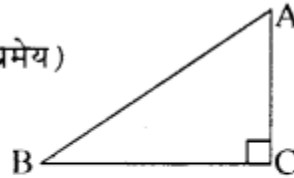
आकृतिनुसार $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बौधायन प्रमेय)

$$\begin{aligned} AB^2 &= 1500^2 + 1800^2 \\ &= 2250000 + 3240000 \\ &= 5490000 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{5490000}$$

$$= \sqrt{900 \times 61}$$

$$= 30\sqrt{61} \text{ किमी. उत्तर}$$



प्रश्न 9. यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है जिनमें $AB = 2.2$ सेमी. और $DE = 3.3$ सेमी. हो तो $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनकी संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात उनके क्षेत्रफलों के बराबर होता है।

$$\text{अतः } \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(2.2)^2}{3.3^2} = \left(\frac{22}{33}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

प्रश्न 10. दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग सेमी. एवं 49 वर्ग सेमी. है।

हल: हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपातों के बराबर होता है।

$$\text{अतः } \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{36}{49}$$

$$\text{या } \frac{AB}{PQ} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

प्रश्न 11. यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हो, ΔABC का क्षेत्रफल = 16 सेमी. एवं ΔPQR का क्षेत्रफल 9 सेमी. तथा $AB = 2.1$ सेमी. हो तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$$

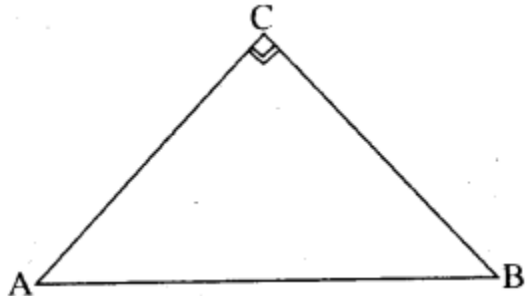
$$\Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{(2.1)^2}{PQ^2}$$

दोनों ओर वर्गमूल लेने पर

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2.1}{PQ}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{2.1 \times 3}{4} = \frac{6.3}{4} = 1.575 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 12. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए $AB = 2AC$ है।



हल:

ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें
 $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$ (दिया हुआ)(1)

समकोण त्रिभुज में बौधायन प्रमेय से

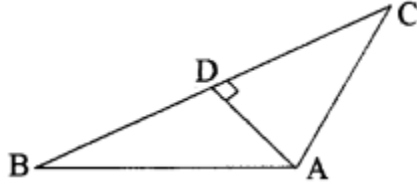
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

या $AB^2 = AC^2 + AC^2$ [समी. 1 से]

या $AB^2 = 2AC^2$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 13. दी गयी आकृति में, $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिये कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।
(पाइथागोरस प्रमेय से)



हल:

$\triangle ADC$ से

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad \text{.....(1)}$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$\triangle ADB$ से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{.....(2)}$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

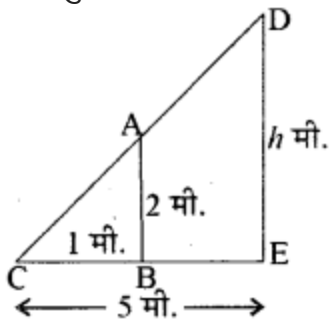
$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

या $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. एक समतल जमीन पर 2 मी. लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मी. है। उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मी. हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि मीनार की ऊँचाई h मी. है।

चित्रानुसार हम देखते हैं कि $\triangle ABC$ तथा $\triangle DEC$ समरूप हैं अर्थात्।



$$\Delta ABC \sim \Delta DEC$$

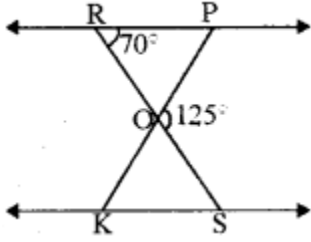
अतः $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}$

$\Rightarrow \frac{2}{h} = \frac{1}{5}$

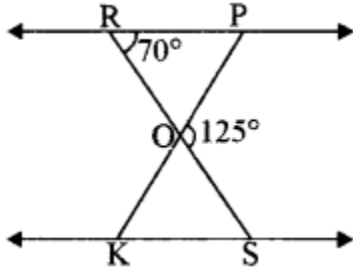
या $h = 5 \times 2 = 10$ मी.

अतः मीनार की ऊँचाई = 10 मी.

प्रश्न 15. आकृति में $\angle OKS$ व $\angle ROP$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\Delta OPR \sim \Delta OSK$ तथा $\angle POS = 125^\circ$ और $\angle PRO = 70^\circ$ है।



हल: प्रश्नानुसार $\angle POS = 125^\circ$ तथा $\angle PRO = 70^\circ$
चित्रानुसार ROS एक सरल रेखा है।



$$\therefore \angle ROP + \angle POS = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle ROP + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle ROP = 180^\circ - 125^\circ$$

$$= 55^\circ$$

जब $\angle ROP = 55^\circ$ तो $\angle KOS$ भी 55° का होगा क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण या सम्मुख कोण हैं।

$$\Delta OPR \sim \Delta OSK \therefore \angle R = \angle S = 70^\circ$$

$$\text{अतः } \Delta ROP \text{ में } \angle R + \angle P + \angle O = 180^\circ$$

$$70^\circ + 55^\circ + \angle P = 180^\circ$$

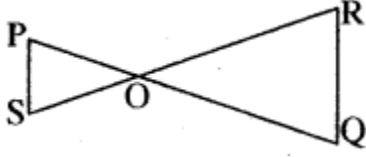
$$\angle P = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ$$

$$\angle P = 55^\circ$$

$$\angle P = \angle K = 55^\circ$$

$$\text{अतः } \angle OKS = 55^\circ \text{ तथा } \angle ROP = 55^\circ$$

प्रश्न 16. दी गई आकृति में यदि $OP \cdot OQ = OR \cdot OS$ तो दर्शाइए $\angle OPS = \angle ORQ$ a $\angle OQR = \angle OSP$. (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: ΔPOS व ΔROQ में $OP \cdot OQ = OR \cdot OS$ दिया हुआ है।

$$\frac{OP}{OS} = \frac{OR}{OQ} \dots\dots\dots(1)$$

तथा $\angle POS = \angle ROQ$ (शीर्षाभिमुख कोण) $\dots\dots\dots(2)$

समीकरण (1) व (2) से

$$\Delta POS \sim \Delta ROQ$$

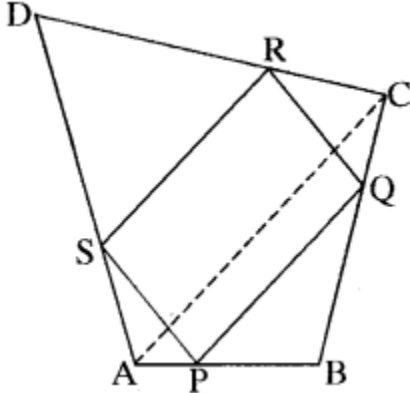
इसलिये $\angle P = \angle R$ एवं $\angle S = \angle Q$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

अतः $\angle OPS = \angle ORQ$ व $\angle OOR = \angle OSP$ इतिसिद्धम्

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. $\Delta ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD और DA पर क्रमशः P, Q, R एवं s बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि ये चतुर्भुज के शीर्ष A व C के सापेक्ष इन्हें समत्रिभाजित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल: $PQRS$ के समान्तर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए हमें $PQ \parallel SR$ एवं $QR \parallel PS$ सिद्ध करना होगा।



दिया हुआ है-

P, Q, R और S बिन्दु क्रमशः AB, BC, CD और DA पर इस प्रकार स्थित हैं कि

$$BP = 2PA, BQ = 2QC, DR = 2RC \text{ और } DS = 2SA$$

रचना-

A को C से मिलाया

$$\Delta ADC \text{ में } \frac{DS}{SA} = \frac{2SA}{SA} = 2$$

एवं $\frac{DR}{RC} = \frac{2RC}{RC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$$\Rightarrow \frac{DS}{SA} = \frac{DR}{RC} \Rightarrow SR \parallel AC \quad \dots(1)$$

(आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा)

$$\frac{BP}{PA} = \frac{2PA}{PA} = 2$$

ΔABC में

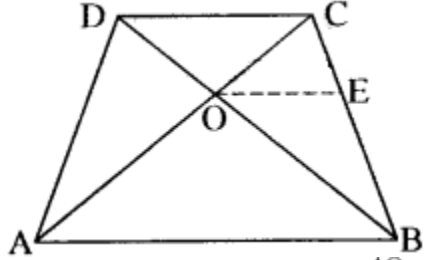
और $\frac{BQ}{QC} = \frac{2QC}{QC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$$\Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel AC \quad \dots(2)$$

(आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) (1) व (2) से $SR \parallel AC$ तथा $PQ \parallel AC \Rightarrow SR \parallel PQ$ इसी प्रकार BD को मिलाकर हम उपर्युक्तानुसार $QR \parallel PS$ सिद्ध कर सकते हैं। अर्थात् $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है

प्रश्न 2. एक चतुर्भुज ΔBCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध कीजिए कि ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

हल: दिया हुआ है-



चतुर्भुज में आकृति के अनुसार $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

सिद्ध करना है-

ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, इसके लिए हमें $AB \parallel CD$ सिद्ध करना होगा।

रचना-

O से $OE \parallel AB$ रेखा खींची।

उपपत्ति— $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (दिया हुआ है)

या $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ (1)

ΔABC में $OE \parallel AB$

$\therefore \frac{CO}{OA} = \frac{CE}{EB}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{OA}{CO} = \frac{EB}{CE}$ (2)

(1) व (2) से $\frac{BO}{OD} = \frac{EB}{CE}$

या $\frac{BO}{OD} = \frac{BE}{EC}$
 $\Rightarrow OE \parallel CD$ (3)

(ΔBCD में आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से)

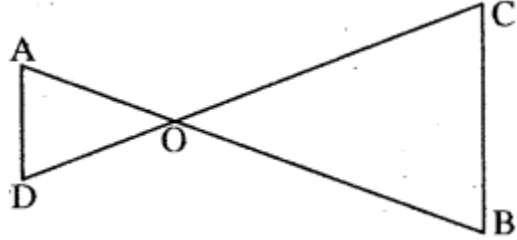
$\therefore OE \parallel AB$ (रचना से)(4)

(3) व (4) से

$AB \parallel CD$

अर्थात् $ABCD$ एक समलम्ब चतुरभुज है

प्रश्न 3. आकृति में यदि $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ है तो दर्शाइए $\angle A = \angle C$ व $\angle B = \angle D$



हल: ΔAOD व ΔBOC में $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ दिया हुआ है।

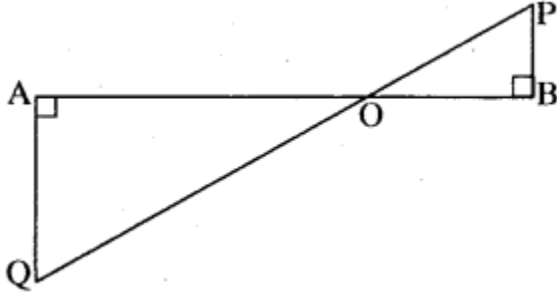
अतः $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$ (1)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण)(2)

(1) व (2) से $\Delta AOD \sim \Delta COB$

इसलिए $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण) इतिसिद्धम्

प्रश्न 4. आकृति में QA तथा PB, AB पर लम्ब है यदि AB = 16 सेमी., OQ = $5\sqrt{3}$ सेमी. और OP = $5\sqrt{13}$ सेमी. है तो AO एवं BO के मान ज्ञात कीजिए।



हल:

$\triangle AOO$ एवं $\triangle BOP$ में $\angle OAQ = \angle OBP$ (प्रत्येक 90°)

$\angle AOQ = \angle BOP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP} \quad \dots(1)$$

परन्तु $AB = AO + BO = 16$ सेमी.

माना कि $AO = x$ तो $BO = 16 - x$.

अतः $\frac{x}{16-x} = \frac{OQ}{OP}$ [(1) से]

या $\frac{x}{16-x} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}$

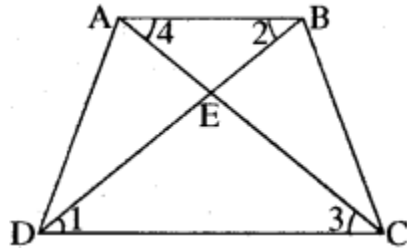
या $3x = 80 - 5x$

या $8x = 80$

या $x = 10$ सेमी. $\Rightarrow AO = 10$ सेमी.

एवं $BO = 16 - 10 = 6$ सेमी.

प्रश्न 5. आकृति में $\triangle ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसकी $AB \parallel DC$ है। यदि $\triangle AED \sim \triangle BEC$ हो तो सिद्ध कीजिए $AD = BC$ है।



हल: $\triangle EDC$ एवं $\triangle EBA$ में

$\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle DEC = \angle AEB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा

$\triangle EDC \sim \triangle EBA$

अतः $\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$

या $\frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA}$ (1)

चूँकि $\triangle AED \sim \triangle BEC$

अतः $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC}$ (2)

(1) व (2) से $\frac{EB}{EA} = \frac{AE}{BE}$

या $(BE)^2 = (AE)^2$

या $BE = AE$

(2) में $BE = AE$ रखने पर

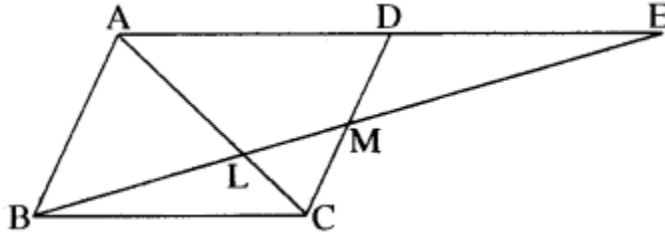
$$\frac{AE}{AE} = \frac{AD}{BC}$$

या $\frac{AD}{BC} = 1$

या $AD = BC$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. समान्तर चतुर्भुज $\triangle BCD$ की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढ़ावें तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए $EL = 2BL$



हल: $\triangle BMC$ व $\triangle EMD$ में

$MC = MD$ (M , CD का मध्य बिन्दु है)

$\angle CMB = \angle DME$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle MCB = \angle MDE$ (एकान्तर कोण)

अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा।

$$\triangle BMC = \triangle EMD$$

अतः $BC = ED$ परन्तु $AD = BC$ [$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है]।

और $AE = AD + DE$

या $AE = BC + BC$

या, $AE = 2BC$ (1)

AAEL व ACBL में
 $\angle ALE = \angle CLB$ (शीर्षाभिमुख कोण)
 $\angle EAL = \angle BCL$ (एकान्तर कोण)
 अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

$\triangle AEL \sim \triangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{AE}{CB}$$

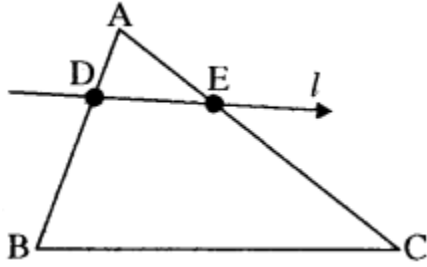
$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC} \quad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = 2$$

$$\Rightarrow EL = 2BL$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 7. आकृति में $\triangle ABC$ में एक रेखा l जो BC के समान्तर है, AB और AC को क्रमशः D व E पर काटती हुई LE इस प्रकार निकलती है कि $AD:DB = 1:2$ हो जाता है, तो इस प्रकार बने समलम्ब चतुर्भुज $BDEC$ एवं $\triangle ADE$ क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि $l \parallel BC$

अतः $\angle ADE = \angle B$ एवं $\angle AED = \angle C$ (संगत कोण)

अतः $\triangle ADE$ व $\triangle ABC$ में

$$\angle ADE = \angle B$$

एवं $\angle AED = \angle C$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA समरूपता प्रमेय)

$$\Rightarrow \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD^2}{AB^2} \quad \dots(1)$$

परन्तु $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AD+DB} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = \frac{AD}{AB} \quad \dots(2)$$

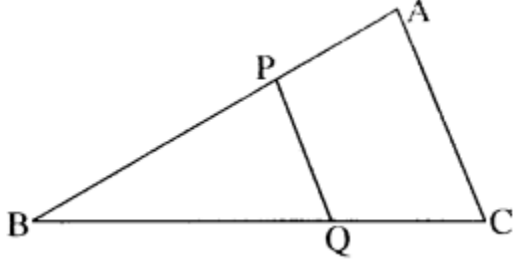
(1) व (2) से $\frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} = 9 \times \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} \quad \dots(3)$$

किन्तु समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल ΔADE का क्षेत्रफल
 \Rightarrow समीकरण (3) से समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल = $9 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल - ΔADE का क्षेत्रफल
 \Rightarrow समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल = $8 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

या
$$\frac{\text{समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल}}{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{8}{1}$$

प्रश्न 8. आकृति के अनुसार एक त्रिभुज ABC की भुजा AC के समान्तर रेखाखण्ड PQ उसकी भुजा AB और AC को इस प्रकार विभाजित करती है कि $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो तो सिद्ध कीजिए। रेखाखण्ड PQ, ΔABC को समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।



हल: दिया हुआ है-

$\therefore PQ \parallel AC$ दिया हुआ है।

अतः $\angle A = \angle BPQ$ (संगत कोण)

एवं $\angle C = \angle BQP$ (संगत कोण) एवं $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अतः $\Delta BAC \sim \Delta BPQ$ (AA समरूपता प्रमेय से)

सिद्ध करना है-

ΔBPQ का क्षेत्रफल = समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल या समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \Delta BAC$ का क्षेत्रफल = ΔBPQ का क्षेत्रफल (दिया हुआ है)

अर्थात् ΔBPO का क्षेत्रफल = ΔBAC का क्षेत्रफल भी सिद्ध करेंगे तो प्रश्न हल हो जाएगा।

उपपत्ति-

चूँकि $\Delta BAC \sim \Delta BPQ$

या $\Delta BPQ \sim \Delta BAC$

अतः
$$\frac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BP^2}{BA^2}$$

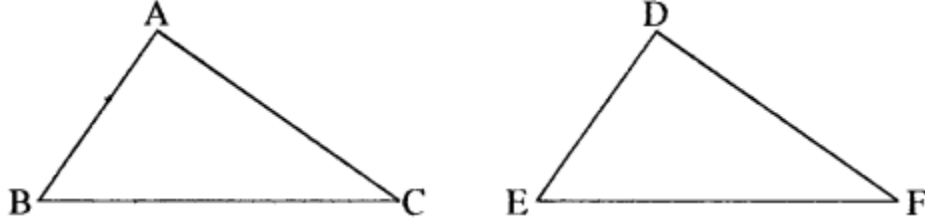
या
$$\frac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1^2}{\sqrt{2}^2}$$

या
$$\frac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{2}$$

या
$$2\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल} = \Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 9. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



हल: दिया हुआ है

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ एवं ΔABC का क्षेत्रफल = ΔDEF का क्षेत्रफल

सिद्ध करना है-

$\Delta ABC = \Delta DEF$

उपपत्ति-

$\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

ΔABC एवं ΔDEF समानकोणिक त्रिभुज हैं।

एवं
$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

या $1 = \frac{BC^2}{EF^2}$ (दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है, दिया हुआ है)

या $BC^2 = EF^2$ या $BC = EF$ (1)

$\Rightarrow \Delta ABC$ व ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

$BC = EF$ [(1) से]

$\angle C = \angle F$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

अतः ASA सर्वांगसम प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रश्न 10. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D। इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है, तो सिद्ध कीजिए $9AD^2 = 7AB^2$ है। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: $\because \Delta ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है और A से BC पर AE लम्ब डाला है।

अतः किसी भी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उसका समद्विभाजन करता है।

अतः $BE = EC = \frac{1}{2}BC$ [रचना से]

तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ [दिया हुआ है]

एवं $AB = BC = CA$ [दिया हुआ है]

समकोण $\triangle ABE$ में $AB^2 = AE^2 + BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

या $AE^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

या $AE^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$

.....(1)

समकोण $\triangle ADE$ में

$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$

या $AE^2 = AD^2 - DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - (BE - BD)^2$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC\right)^2$

$$\left[\because BE = \frac{1}{2}BC \text{ एवं } BD = \frac{1}{3}BC \right]$$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$

या $AE^2 = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$

.....(2)

(1) व (2) से $\frac{4AB^2 - BC^2}{4} = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$

या $\frac{4AB^2 - AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

[$\because AB = BC = CA$]

या $\frac{3AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

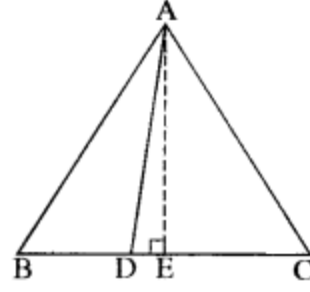
या $27AB^2 = 36AD^2 - AB^2$

या $28AB^2 = 36AD^2$

या $7AB^2 = 9AD^2$

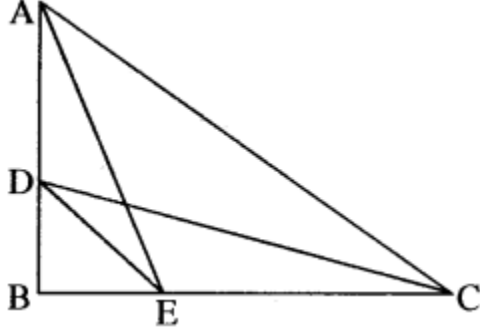
अर्थात् $9AD^2 = 7AB^2$

इतिसिद्धम्



$$\left[\because BE = \frac{1}{2}BC \right]$$

प्रश्न 11. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका $\angle B$ समकोण है। माना कि D और E क्रमशः AB एवं BC पर दो बिन्दु स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: $\triangle ABE$ समकोण त्रिभुज है तथ $\angle B = 90^\circ$

$$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 \quad \dots(1)$$

पुनः $\triangle DBC$ समकोण त्रिभुज है और $\angle B = 90^\circ$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \quad \dots(2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2) \quad \dots(3)$$

इसी प्रकार समकोण $\triangle ABC$ एवं समकोण $\triangle DBE$ में

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ एवं } DE^2 = BE^2 + BD^2 \quad \dots(4)$$

(3) व (4) से

$$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2 \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल: दिया है-

एक त्रिभुज ABC है जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$

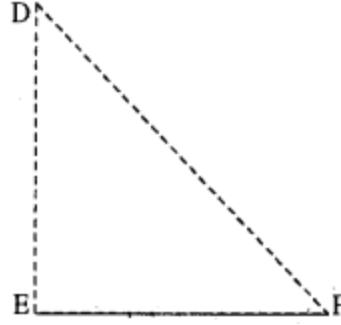
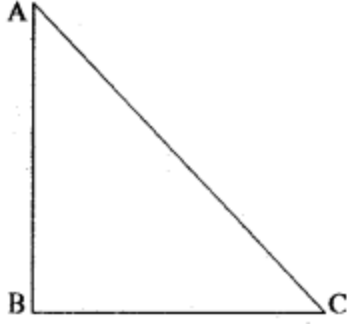
सिद्ध करना है-

$$\angle ABC = 90^\circ$$

रचना-

एक अन्य त्रिभुज DEF इस प्रकार बनाया कि $DE = AB$, $EF = BC$

$$\angle E = 90^\circ$$



उपपत्ति-

यह सिद्ध करने के लिए कि $\angle ABC = 90^\circ$ है, हमें केवल यह सिद्ध करना होगा कि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है।
 $\therefore \triangle DEF$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle DEF$ समकोण है। अतः पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned} DF^2 &= DE^2 + EF^2 \\ \Rightarrow DF^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &[\because DE = AB \text{ तथा } EF = BC \text{ (रचना से)}] \\ \Rightarrow DF^2 &= AC^2 \quad [\because \text{दिया है कि } AB^2 + BC^2 = AC^2] \\ \Rightarrow DF &= AC \quad \dots(i) \end{aligned}$$

अतः $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में

$$AB = DE \quad \text{(रचना से)}$$

$$BC = EF \quad \text{(रचना से)}$$

तथा $AC = DF \quad [(i) \text{ से}]$

अतः सर्वांगसमता की SSS कसौटी से

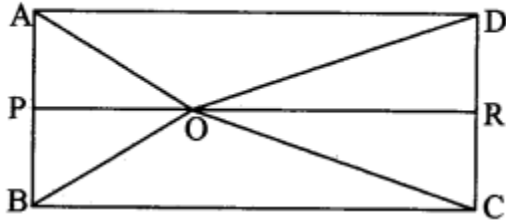
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle B &= \angle E \\ &[\because \text{सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होते हैं।}] \end{aligned}$$

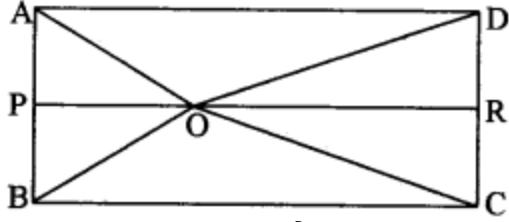
$$\Rightarrow \angle B = \angle E = 90^\circ \quad [\because \angle E = 90^\circ \text{ (रचना से)}]$$

अतः $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. आयत $\triangle BCD$ के अन्दर स्थित O कोई बिन्दु है, सिद्ध कीजिए $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$



हल: आयत $\triangle BCD$ के AN अन्दर एक बिन्दु O स्थित है जिससे गुजरती हुई BC के समान्तर रेखा PL भुजाओं AB और DC को क्रमशः P और R पर काटती है।



समकोण त्रिभुजों OPB और ORD में पाइथागोरस प्रमेय से

$$OB^2 = OP^2 + PB^2 \text{ और } OD^2 = OR^2 + DR^2$$

इन दोनों को जोड़ने पर

$$= OB^2 + OD^2 = OP^2 + PB^2 + OR^2 + DR^2$$

$$= OB^2 + OD^2 = (OP^2 + OR^2) + (PB^2 + DR^2) \dots\dots\dots(i)$$

पुनः 'समकोण त्रिभुजों ORC तथा OPA में पाइथागोरस प्रमेय से

$$OC^2 = OR^2 + RC^2 \text{ तथा } OA^2 = OP^2 + PA^2$$

इन दोनों को जोड़ने पर

$$\Rightarrow OC^2 + OA^2 = OR^2 + RC^2 + OP^2 + PA^2$$

$$\Rightarrow OC^2 + OA^2 = OR^2 + OP^2 + RC^2 + PA^2$$

$$\Rightarrow OC^2 + OA^2 = OR^2 + OP^2 + PB^2 + DR^2$$

[$\because RC = PB$ तथा $PA = DR$]

$$\Rightarrow OC^2 + OA^2 = (OR^2 + OP^2) + (PB^2 + DR^2) \dots\dots(ii)$$

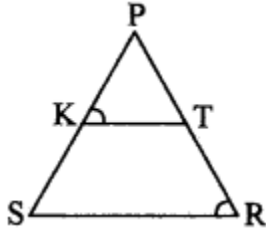
(i) व (ii) से

$$OB^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2$$

$$\Rightarrow OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

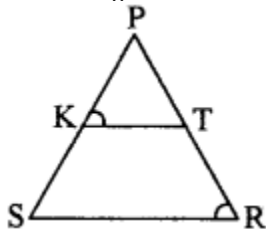
(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. निम्न में से दी गई आकृति में $\frac{PK}{KS} = \frac{PT}{TR}$ हैं तथा $\angle PKT = \angle PRS$ है। सिद्ध कीजिए कि APSR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल: प्रश्नानुसार दिया गया है $\frac{PK}{KS} = \frac{PT}{TR}$

अतः $KT \parallel SR$



$\therefore \angle PKT = \angle PRS$ (संगत कोण)(i)

साथ ही यह दिया हुआ है कि

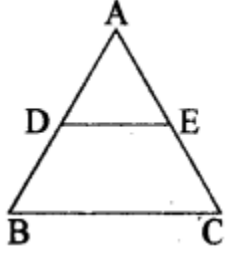
$$\angle PKT = \angle PRS \dots\dots\dots(ii)$$

अतः $\angle PRS = \angle PSR$ [(i) व (ii) से]

इसलिए $PS = PR$ (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

अर्थात् $\triangle PSR$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. दी गई आकृति में $\triangle ABC$ एक त्रिभुज है। यदि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ सिद्ध कीजिए $DE \parallel BC$



हल: दिया गया है-

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

या
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

दोनों पक्षों में 1 घटाने पर

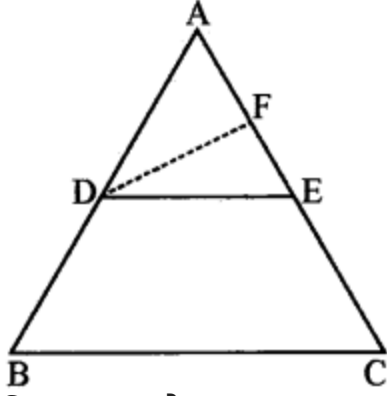
या
$$\frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1$$

या
$$\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

या
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

अतः एक त्रिभुज की भुजाओं AB एवं AC को DE समान अनुपात में विभाजित करती है।



सिद्ध करना है-

$DE \parallel BC$

रचना-

D से जाने वाली एक अन्य रेखा DF खींची।

उपपत्ति-

माना कि रेखा DE भुजा BC के समान्तर नहीं है तथा D से होकर जाने वाली एक अन्य रेखा DF भुजा BC के समान्तर है।

अर्थात् $DF \parallel BC$

अतः आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad \dots(1)$$

लेकिन दिया हुआ है

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \dots(2)$$

समी. (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$$

दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$\frac{AF}{FC} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

$$\frac{AF + FC}{FC} = \frac{AE + EC}{EC}$$

या

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC}$$

या

$$FC = EC$$

यह तब ही सम्भव है जब F एवं E दोनों बिन्दु सम्पाती हों, अर्थात् DF एवं DE सम्पाती रेखाएँ हैं

अतः $DE \parallel BC$ इतिसिद्धम्