वास्तविक संख्याएँ

Ex 2.1

प्रश्न 1. दर्शाइये कि एक विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या को वर्ग 8q+1 के रूप का होता है जहाँ q एक धनात्मक पूर्णाक है।

हल: माना a कोई धनात्मक विषम पूर्णाक है।
हम जानते हैं कि धनात्मक विषम पूर्णांक $a = 2n + 1$ के रूप को होगा
अतः विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या $4 = 2n + 1$ होगी।
जहाँ n= 1, 2, 3, ...
प्रश्नानुसार $(a)^2 = (2n + 1)^2$
$= 4n^2 + 4n + 1$
$= 4m (1 + 1) + 1$
संख्या $n(n + 1)$ सदैव धनात्मक सम पूर्णांक ही प्राप्त होगा।
जहाँ n = 1, 2, 3, ...
अतःn $(n + 1) = 29$ जहाँ q एक धनात्मक पूर्णाक है।
अतः $(a)^2= 4 \times 2q + 1$
$= 8q + 1$
अतः विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या का वर्ग $8q + 1$ के रूप का होता है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 2. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा दर्शाइये कि किसी भी धनात्मक पूर्णाक संख्या का घन 9q या 9q +1 या 9q + 8 के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक संख्या है।

हल: माना कि कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब यह $3m$, $3m + 1$ या $3m + 2$ के रूप में होगा।
सिद्ध करना है-इनमें से प्रत्येक का घन $9q$, $9q + 1$ या $9q + 8$ के रूप में लिखा जा सकता है।
$(3m)^3 = 27m^3 = 9(3m^3)$
$= 9q$ जहाँ $q= 3m^3$ है।
तथा $(3m + 1)^3= (3m)^3 + 3(3m)^2 . 1 + 3(3m) . 1^2 + 1$
$= 27m^3 + 27m^2 + 9m + 1$
$= 9(3m^3 + 3m^2 + m) + 1$
$= 9q + 1$ जहाँ $q = 3m + 3m^2 + m$ है।
तथा $(3m + 2)^3 = (3m)^3 + 3(3m)^2. 2 + 3(3m). 2^2 + 8$
$= 27m^3 + 54m^2 + 36m + 8$
$= 9(3m + 6m^2 + 4m) + 8$
$= 9q + 8$ जहाँ $q= 3m^3 + 6m^2 +4m$ है।

अतः स्पष्ट है कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक संख्या का धन 9q या 9q + 1 या 9q + 8 के रूप का होता है।

प्रश्न 3. दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक विषम पूर्णांक संख्या को 6q + 1 या 6q + 3 या 6q + 5 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ q एक धनात्मक पूर्णाक है।

हल: माना कि a एक धनात्मक विषम पूर्णाक है अब a और b = 6 के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से- a = 6q +r
∵ 0 ≤ r ≤ 6 अतः सम्भावित शेषफल 0, 1, 2, 3, 4 और 5 होंगे। अर्थात् a के मान 6q या 6q + 1 या 6q + 2 या 6q + 3 या 6q +4 या 6q + 5 हो सकते हैं, जहाँ q कोई भाज्य है। अब चूँकि a एक विषम धनात्मक पूर्णांक है अतः यह 6q, 6q + 2 या 6q + 4 के रूप का नहीं हो सकती क्योंकि ये सभी 2 से भाज्य होने के कारण सम धनात्मक पूर्णांक हैं । अतः कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक 6q + 1 या 60 + 3 या 6q + 5 के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णाक है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित संख्या-युग्मों का यूक्लिड विभाजन विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए—
(i) 210, 55
(ii) 420, 130
(iii) 75, 243
(iv) 135, 225
(v) 196, 38220
(vi) 867, 255

हल: (i) 210 और 55
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से-
चरण I— ∵ 210 > 55 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
210 = 55 x 3 + 45
चरण II— ∵ शेषफल 45 ≠ 0 है अतः अब 55 और 45 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
55 = 45 x 1 + 10
चरण III— ∵ शेषफल 10 ≠ 0 है अतः अब 45 व 10 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
45 = 10 x 4 + 5
चरण IV— ∵ शेषफल 5 ≠ 0 है अतः अब 10 व 5 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर।
10 = 5 x 2 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जायेगी। चरण IV में भाजक 5 है अतः 210 और 55 का HCF 5 है। उत्तर

(ii) 420 और 130
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से-
चरण I— ∵ 420 > 130 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार

420 = 130 x 3 + 30
चरण II— ∵ शेषफल 30 ≠ 0 है अतः अब 130 और 30 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
130 = 30 x 4 + 10
चरण III— ∵ शेषफल 10 ≠ 0 है अतः अब 30 व 10 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
30 = 10 x 3 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जायेगी। चरण III में भाजक 10 है अतः 420 और 130 का HCF 10 है। उत्तर

(iii) 75 और 243
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से-
चरण I— ∵ 243 > 75 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
243 = 75 x 3 + 8
चरण II— ∵ शेषफल 18 ≠ 0 है अतः अब 75 और 18 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर।
75 = 18 x 4 + 3
चरण III— ∵ शेषफल 3 ≠ 0 है अतः अब 18 और 3 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर।
18 = 3 x 6 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जायेगी। चरण III में। भाजक 3 है अतः 75 और 243 का HCF 3 है। उत्तर

(iv) 135 और 225
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से-
चरण I— ∵ 225 > 135 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
225 = 135 x 1 + 90
चरण II— ∵ शेषफल 90 ≠ 0 है अतः अब 135 और 90 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
135 = 90 x 1 + 45
चरण III— ∵ शेषफल 45 ≠ 0 अतः अब 90 व 45 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर।
90 = 45 x 2 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जाएगी। चरण III में भाजक 45 है अतः 135 और 225 का HCF 45 है। उत्तर

(v) 196 और 38220
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से
चरण I— ∵ 38220 > 196 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
38220 = 196 x 195 + 0
चूँकि शून्य प्राप्त हो गया है अतः प्रक्रिया यहीं समाप्त हो जाएगी। इस चरण में भाजक 196 है। अतः 38220 और 196 का HCF 196 है। उत्तर

(vi) 867 और 255
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से

चरण I— ∵ 867> 255 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
867 = 255 x 3 + 102
चरण II— ∵ शेषफल 102 ≠ 0 अतः अब 255 और 102 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
255 = 102 x 2 + 51
चरण III— ∵ शेषफल 51 ≠ 0 अतः अब 102 और 51 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
102 = 51 x 2 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जाएगी। चरण III में भाजक 51 है अतः 867 और 255 का HCF 51 है। उत्तर

प्रश्न 5. यदि संख्या 408 तथा 1032 के महत्तम समापवर्तक (HCF) को 1032x – 408 × 5 के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: 408 और 1032 को HCF ज्ञात करने पर यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से-
चरण I— ∵ 1032 > 408 अत: यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
1032 = 408 x 2 + 216
चरण II— ∵ शेषफल 216 ≠ 0 है अतः अब 408 और 216 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
408 = 216 x 1 + 192
चरण III— ∵ शेषफल 192 ≠ 0 अतः अब 216 व 192 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
216 = 192 x 1 + 24
चरण IV— ∵ शेषफल 24 ≠ 0 अतः अब 192 व 24 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
192 = 24 x 8 + 0
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जायेगी। चरण IV में भाजक 24 है अतः 408 और 1032 का HCF 24 है।
प्रश्नानुसार HCF (24) को 1032x – 408 x 5 के रूप में व्यक्त किया जाता है।
अतः 24 = 1032x – 408 x 5
⇒ 24 = 1032 – 2040
या 1032x = 2040 + 24
या 1032x = 2064
∴ $x=\frac{2064}{1032}=2$
अतः x = 2 उत्तर

Ex 2.2

प्रश्न 1. अग्रलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए–
(i) 468
(ii) 945
(iii) 140
(iv) 3825
(v) 20570

हल: (i) 468 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|r} 2 & 468 \\ \hline 2 & 234 \\ \hline 3 & 117 \\ \hline 3 & 39 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13$

$= 2^2 \times 3^2 \times 13$ उत्तर

(ii) 945 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|r} 3 & 945 \\ \hline 3 & 315 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= 3 \times 315$

$= 3 \times 3 \times 105$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 35$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$= 3^3 \times 5 \times 7$ उत्तर

(iii) 140 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|r} 2 & 140 \\ \hline 2 & 70 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= 2 \times 70$

$= 2 \times 2 \times 35$

$= 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$= 2^2 \times 5 \times 7$ उत्तर

(iv) 3825 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|r} 3 & 3825 \\ \hline 3 & 1275 \\ \hline 5 & 425 \\ \hline 5 & 85 \\ \hline 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= 3 \times 1275$

$= 3 \times 3 \times 425$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 85$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$ उत्तर

(v) 20570 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|r} 2 & 20570 \\ \hline 5 & 10285 \\ \hline 11 & 2057 \\ \hline 11 & 187 \\ \hline 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= 2 \times 5 \times 11 \times 11 \times 17$

$= 2 \times 5 \times 11^2 \times 17$ उत्तर

प्रश्न 2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों का महत्तम समापवर्तक (HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि HCF x LCM = पूर्णांकों का गुणनफल
(i) 96 और 404
(ii) 336 और 54
(iii) 90 और 144

हल: (i) 96 और 404
96 के अभाज्य गुणनखण्ड, = 2 × 48
= 2 × 2 × 24
= 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3
= 2^5 × 3
404 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 202
= 2 × 2 × 101
= 2^2 × 101
इसलिए 96 और 404 को LCM = 2^5 × 3 × 101
L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
= 32 × 3 × 101
= 96 × 101 = 9696 उत्तर
तथा 96 और 404 का HCF = 2^2 = 2 x 2 = 4 उत्तर
H.C.F के लिए उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
सत्यापन-HCF (96, 404) × LCM (96, 404)
= 4 × 2^5 × 3 × 101
= (4 × 101) × 32 × 3
= 404 × 96 = 96 × 404
= दी गई संख्याओं का गुणनफल

(ii) 336 और 54
336 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 168
= 2 × 2 × 84
= 2 × 2 × 2 × 42
= 2 × 2 × 2 × 2 × 21
= 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7
= 2^4 × 3 × 7
54 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 27
2 × 3 × 9
= 2 × 3 × 3 × 3
= 2 × 3^3
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
∴ HCF (336, 54) = 2 × 3 = 6 उत्तर L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर।
LCM = 2^4 × 3^3 × 7 = 16 × 27 × 7

= 3024 उत्तर
सत्यापन-HCF (336, 54) × LCM (336, 54)
= 6 × 3024
= $2 \times 3 \times 2^4 \times 3^3 \times 7$
= $24 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3^3$
= 336 x 54
= दी गई संख्याओं का गुणनफल

(iii) 90 और 144
90 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 45
= 2 × 3 × 15
= 2 × 3 × 3 × 5
= $2 \times 3^2 \times 5$
144 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 72
= 2 × 2 × 36
= 2 × 2 × 2 × 18
= 2 × 2 × 2 × 2 × 9
= 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3
= $2^4 \times 3^2$
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
∴ HCF (90, 144) = 2×3^2 = 2 × 9 = 18 उत्तर
L.C.M. के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
LCM (90, 144) = $2^4 \times 3^2 \times 5$
= 16 x 9 x 5 = 720 उत्तर
सत्यापन-HCF (90, 144) × LCM (90, 144)
= 18 × 16 × 9 × 5
= 18 × 5 × 16 × 9
= 90 × 144
= दी गई संख्याओं का गुणनफल

प्रश्न 3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णाकों का महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए
(i) 12, 15 और 21
(ii) 24, 15 और 36
(iii) 17, 23 और 29
(iv) 6, 12 और 120
(v) 40, 36 और 126
(v) 8, 9 और 25

हल: (i) 12, 15 और 21
12 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 3
15 के अभाज्य गुणनखण्ड = 3 × 5
21 के अभाज्य गुणनखण्ड = 3 × 7
L.C.M. के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (12, 15 और 21) = 2^2 × 3 × 5 × 7
= 420 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर।
तथा HCF (12, 15 और 21) = 3 उत्तर

(ii) 24, 15 और 36
24 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 3
= 2^2 × 3
15 के अभाज्य गुणनखण्ड = 3 × 5
36 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 3 × 3
= $2^2 \times 3^2$
L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (24, 15 और 36) = $2^2 \times 3^2$ × 5
= 8 × 9 × 5
= 360 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर तथा HCF (24, 15 और 36) = 3 उत्तर

(iii) 17, 23 और 29
17 के अभाज्य गुणनखण्ड = 1 × 17
23 के अभाज्य गुणनखण्ड = 1 × 23
29 के अभाज्य गुणनखण्ड = 1 × 29
L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (17, 23 और 29) = 17 × 23 × 29
= 11339 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
तथा HCF (17, 23 और 29) = 1 उत्तर

(iv) 6, 72 और 120
6 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 3
72 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 3 × 3
= $2^3 \times 3^2$
120 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 3 × 5
=2^3 × 3 × 5

L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (6, 72 और 120) = 2 × 3 × 5
= 8 × 9 × 5
= 360 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर तथा HCF (6, 72 और 120) = 2 x 3
= 6 उत्तर

(v) 40, 36 और 126
40 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 5
= $2^3 \times 5$
36 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 3 × 3
= $2^2 \times 3^2$
126 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 3 × 3 × 7
= $2^3 \times 3^2 \times 7$
L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (40, 36 और 126) = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
= 8 × 9 × 5 × 7
= 2520 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
तथा HCF (40, 36 और 126) = 2 उत्तर

(vi) 8, 9 और 25
8 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 = $(2)^3$ x 1
9 के अभाज्य गुणनखण्ड = 3 × 3 = $(3)^2$ × 1
25 के अभाज्य गुणनखण्ड = 5 × 5 = $(5)^2$ x 1
L.C.M, के लिये अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात लेने पर
∴ LCM (8, 9 और 25) = $(2)^3 \times (3)^2 \times (5)^2$
= 8 × 9 × 25
= 1800 उत्तर
H.C.F के लिये उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की न्यूनतम घात लेने पर
तथा HCF (8, 9 और 25) = 1 उत्तर

प्रश्न 4. किसी खेल के मैदान के वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में रमन को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में अनुप्रिया को 12 मिनट का समय लगता है। माना कि दोनों एक ही स्थान से एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करते हैं तथा एक ही दिशा में चलते हैं तो बताइये कितने समय बाद दोनों पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल: रमन द्वारा वृत्ताकार मैदान का 1 चक्कर लगाने का समय = 18 मिनट अनुप्रिया द्वारा उसी मैदान का एक चक्कर लगाने में लगा समय = 12 मिनट

यह ज्ञात करने के लिए कि वे पुनः दोनों कितने समय के बाद प्रारम्भिक बिन्दु पर मिलेंगे, हमें 18 वे 12 का LCM ज्ञात करना होगा।
अतः 18 के अभाज्य गुणनखण्डन = 2×9
$= 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
तथा 12 के अभाज्य गुणनखण्डन = 2×6
$= 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
18 और 12 के सभी अधिकतम घातांक में अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल लेने पर
$\therefore$ LCM (18, 12) = $2^2 \times 3^2$
$= 4 \times 9 = 36$
अर्थात् रमन एवं अनुप्रिया प्रारम्भिक बिन्दु पर 36 मिनट बाद मिलेंगे। उत्तर

प्रश्न 5. एक संगोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वाले प्रतिभागियों की संख्या क्रमशः 60, 84 और 108 है। यदि प्रत्येक कमरे में बराबर संख्या में एक ही विषय के प्रतिभागी बैठाये जाते हैं तो आवश्यक कमरों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: चूँकि न्यूनतम कमरों की आवश्यकता है। इसलिये प्रत्येक कमरे में प्रत्याशियों की संख्या 60, 84 और 108 का H.C.F होगा
60 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 3 \times 5$
$= 2^2 \times 3 \times 5$
84 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 3 \times 7$
$= 2^2 \times 3 \times 7$
108 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$= 2^2 \times 3^3$
हमें प्रत्येक कमरे में बराबर संख्या में प्रतिभागी बैठाने हैं। अत: HCF निकालने पर
HCF = $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$
अतः प्रत्येक कमरे में 12 प्रत्याशियों को बैठाया जा सकता है।

$$\text{अभीष्ट कमरों की संख्या} = \frac{\text{प्रत्याशियों की कुल संख्या}}{12}$$
$$= \frac{60+84+108}{12}$$
$$= \frac{252}{12} = 21$$

अतः अभीष्ट कमरों की संख्या 21 है। उत्तर

Ex 2.3

प्रश्न 1. प्रमाणित कीजिए कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या के विपरीत मान लें कि 5-3 एक परिमेय संख्या है, तो इस प्रकार के दो सह-अभाज्य पूर्णांक a और b विद्यमान होंगे कि

$$5-\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad 5-\frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5b-a}{b} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \sqrt{3}$ **एक परिमेय संख्या है।**

[$\because$ a और b पूर्णांक हैं। $\therefore$ $\frac{5b-a}{b}$ एक परिमेय संख्या है।]

यह इस तथ्य का विरोध करता है कि 3 एक अपरिमेय संख्या है। अतः प्रारम्भ में ली गई परिकल्पना गलत है।

अतः $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ हैं

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(ii) $6+\sqrt{2}$
(iii) $3\sqrt{2}$

हल: (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न में दिए गए कथन के विपरीत माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।
अंतः हम अविभाज्य पूर्णांक a और B (b ≠ 0) प्राप्त कर सकते हैं अर्थात्

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{या} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{b}$$

$$\text{या} \quad \sqrt{2} = \frac{2a}{b} \qquad \text{.....(i)}$$

क्योंकि दो पूर्णांकों का भागफल एक परिमेय संख्या होती है।
अतः $\frac{2a}{b}$ = एक परिमेय संख्या

(i) से $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह कथन असत्य है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है।
अतः $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है। (इतिसिद्धम्)

(ii) $6+\sqrt{2}$
माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसी सह-अभाज्य संख्याएँ a और b (b ≠ 0) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a-6b}{b} \qquad .....(i)$$

चूँकि a तथा b पूर्णांक हैं अतः $\frac{a-6b}{b}$ भी एक पूर्णांक संख्या होगी क्योंकि पूर्णांकों की बाकी तथा पूर्णांकों का भाग भी पूर्णांक होता है। अर्थात्

$$\frac{a-6b}{b} = \text{एक परिमेय संख्या}$$

∴ (i) से $$\sqrt{2} = \text{एक परिमेय संख्या}$$

परिमेय संख्या परन्तु यह कथन कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या होती है, का विरोधाभासी कथन है। अत: हमारी कल्पना असत्य है। अर्थात् $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(इतिसिद्धम्)

(iii) $3\sqrt{2}$
माना कि दी गई संख्या $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसे दो पूर्णांक a और B (b ≠ 0) प्राप्त कर सकते हैं कि

$$3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

या $$3b\sqrt{2} = a$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a}{3b} \qquad .....(i)$$

चूँकि (i) में a, 3 और b सभी पूर्णांक हैं तथा दो पूर्णांकों का भाग भी एक परिमेय संख्या होती है। अर्थात्
$\frac{a}{3b}$ = एक परिमेय संख्या
अतः (i) से $\sqrt{2}$ = एक परिमेय संख्या
जो कि कथन $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, का विरोधाभासी कथन है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है।
अत: $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 3. यदि p और q अभाज्य धनात्मक पूर्णांक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: $(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ एक अपरिमेय संख्या के विपरीत यह मान लें कि
$(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ एक परिमेय संख्या है, तो इस प्रकार के दो सह-अभाज्य पूर्णांक a और b विद्यमान हैं, कि

$$\sqrt{p}+\sqrt{q} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}-\sqrt{p} = \sqrt{q}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}-\sqrt{p}\right)^2 = \left(\sqrt{q}\right)^2 \quad \text{[दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\sqrt{p}+p = q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2}+p-q = \frac{2a}{b}\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{b^2}+p-q\right)\times\frac{b}{2a} = \sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{2ab}+\frac{(p-q)\times b}{2a} = \sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+(p-q)b^2}{2ab} = \sqrt{p}$$

$\because$ a और b पूर्णांक हैं, अतः $\frac{a^2+(p-q)b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या होगी।

$\therefore$ $\sqrt{p}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

यह परिणाम विरोधाभासी है। इसलिये हमारी कल्पना गलत है।

अतः $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है। **इतिसिद्धम्**

Ex 2.4

प्रश्न 1. लम्बी विभाजन प्रक्रिया का उपयोग न करते हुए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं—

(i) $\frac{15}{1600}$ **(ii)** $\frac{13}{3125}$ **(iii)** $\frac{23}{2^3 5^2}$

(iv) $\frac{17}{6}$ **(v)** $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$ **(vi)** $\frac{35}{50}$

(vii) $\frac{7}{80}$

हल: (i) $\frac{15}{1600}$
माना कि $x = \frac{15}{1600}$ ....(i)
अब (i) की तुलना $x = \frac{p}{q}$ से करने पर यहाँ p = 15 तथा q= 1600
अतः q अर्थात् 1600 के अभाज्य गुणनखण्ड
= 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 5
= 26 × 52
जो कि 2^n x 5^m के रूप का है। यहाँ m = 2 तथा n = 6 तथा ये ऋणेत्तर पूर्णांक हैं। अतः $x = \frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत है। उत्तर

(ii) $\frac{13}{3125}$
माना कि $x = \frac{13}{3125}$ ....(i)
अब (i) की $x = \frac{p}{q}$ से तुलना करने पर
यहाँ p = 13 तथा q= 3125
अब q अर्थात् 3125 के अभाज्य गुणनखण्ड = 5 × 5 × 5 × 5 × 5
= $5^5 \times 2^0$
जो कि $5^m \times 2^n$ के रूप का है। यहाँ m = 5 तथा n = 0 तथा ये ऋणेत्तर पूर्णांक हैं। अतः $x = \frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है। उत्तर

(iii) $\frac{23}{2^3 5^2}$
माना कि x= $x = \frac{23}{2^3 5^2}$ ....(i)
अब (i) की तुलना $x = \frac{p}{q}$ से करने पर यहाँ p = 23 तथा q= $2^3 5^2$
अतः q अर्थात् $2^3 5^2$ के अभाज्य गुणनखण्ड = $2^3 \times 5^2$
जो कि $2^n \times 5^m$ के रूप का है जहाँ n = 3 तथा m = 2 तथा ये ऋणेत्तर, पूर्णांक हैं। अतः $x = \frac{23}{2^3 5^2}$ का दशमलव प्रसार सांत है। उत्तर

(iv) $\frac{17}{6}$

माना कि $x = \frac{17}{6}$ ....(i)

अब (i) की $x = \frac{p}{q}$ से तुलना करने पर

यहाँ p = 17 तथा q = 6

अब q अर्थात् 6 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 3

$= 2^1 \times 3^1 \times 5^0$

जो कि $2^n \times 5^m$ के रूप का नहीं है। चूंकि हर में 2 और 5 के अतिरिक्त गुणनखण्ड 3 है।

अतः $x = \frac{17}{6}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

(v) $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$

स्पष्ट है कि हर $2^2.5^7.7^5$ के अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 5 के अतिरिक्त भी हैं। इसलिए इस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(vi) $\frac{35}{50}$

माना कि $x = \frac{35}{60} = \frac{7}{10}$ .....(i)

जो कि 5^m x 2^n के रूप का है। यहाँ पर m = 1 तथा n = 1 तथा ये ऋणेत्तर पूर्णांक हैं।

अतः $x = \frac{35}{60}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

(vii) $\frac{7}{80}$

माना कि $x = \frac{7}{80}$ ....(i)

अब (i) की तुलना $x = \frac{p}{q}$ से करने पर यहाँ p= 7 तथा q= 80

अब q अर्थात् 80 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

$= 2^4 \times 5^1$

जो कि $2^n \times 5^m$ के रूप का है। यहाँ n = 4 तथा m = 1 तथा ये ऋणेत्तर पूर्णांक हैं अतः

$x = \frac{7}{80}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार लिखिए एवं बताइए कि ये सांत हैं—

(i) $\frac{13}{125}$ **(ii)** $\frac{14588}{625}$ **(iii)** $\frac{49}{500}$

हल: (i) माना कि $x = \frac{13}{125} = \frac{13}{5^3 \times 2^0}$

(हर को 10 की घात बनाने के लिए 2^3 से गुणा व भाग करने पर)

$$x = \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{13 \times 8}{(5 \times 2)^3} = \frac{104}{(10)^3}$$

$$x = \frac{104}{1000} = 0.104$$

अतः $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार 0.104 है। उत्तर

(ii) माना कि $x = \frac{14588}{625}$

$$x = \frac{14588}{(5)^4 \times 2^0}$$

हर को 10 की घात बनाने के लिए 2^4 से गुणा व भाग करने पर

$$\therefore \quad x = \frac{14588 \times (2)^4}{(5)^4 \times (2)^4} = \frac{14588 \times 16}{(5 \times 2)^4}$$

$$x = \frac{14588 \times 16}{(10)^4} = \frac{233408}{10000}$$

$$x = 23.3408$$

अतः $\frac{14588}{625}$ का दशमलव प्रसार 23.3408 है। उत्तर

(iii) माना कि $x = \frac{49}{500} = \frac{49}{5 \times 10^2}$

हर 10 की घात बनाने के लिए 2 से गुणा व भाग करने पर

$$x = \frac{49 \times 2}{5 \times 2 \times 10^2}$$

$$x = \frac{98}{10 \times 10^2} = \frac{98}{10^3}$$

$$x = \frac{98}{1000} = 0.098$$

अतः $\frac{49}{500}$ का दशमलव प्रसार 0.098 है। उत्तर

प्रश्न 3. नीचे दर्शाये दशमलव प्रसार के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है, तो इसके हर के अभाज्य गुणनखण्डन के बारे में अपनी टिप्पणी लिखिए।

(i) 0.120120012000120000...
(ii) 43.123456789
(iii) $27.\overline{142857}$

हल: (i) माना कि x = 0.1201200 12000120000...
दी गई संख्या से स्पष्ट है कि यह एक अपरिमेय संख्या है।
चूँकि इस संख्या को दशमलव प्रसार असांत एवं अनावर्ती है।
∴ इसको $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।
∴ यह संख्या परिमेय नहीं है।

(ii) माना कि x = 43.123456789

$$\therefore \quad x = \frac{43123456789}{1000000000}$$

$$\text{या} \quad x = \frac{43123456789}{(10)^9}$$

$$\therefore \quad x = \frac{43123456789}{(2\times5)^9}$$

जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप की एक परिमेय संख्या है।
जो कि $2^n \times 5^m$ के रूप का है। यहाँ m = 9 तथा n = 9 तथा ये ऋणेत्तर पूर्णांक हैं अंतः यह एक सांत दशमलव है।

(iii) माना कि

$$x = 27.\overline{142857}$$

$$x = 27.142857142857.... \quad .....(i)$$

दोनों पक्षों को 10^6 से गुणा करने पर

$$10^6 x = 27142857.142857.... \quad .....(ii)$$

समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$$(10^6 - 1)x = 27142857$$

$$\Rightarrow \quad 999999x = 27142830$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{27142830}{99999}$$

$$\text{अत:} \quad 27.\overline{142857} = \frac{27142830}{99999} = \frac{p}{q} \text{ है।}$$

इस प्रकार, q = 99999 है।
$27.\overline{142857}$ एक असांत आवर्ती दशमलव है इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

अतः q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 के अतिरिक्त एक और गुणनखण्ड होगा। अतः दी गई संख्या परिमेय है और q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 के अतिरिक्त भी है। उत्तर

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 2

प्रश्न 1. 196 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का योगफल है
(क) 1
(ख) 2
(ग) 4
(घ) 6

उत्तर: (ग) 4

प्रश्न 2. दो संख्याओं को $m = pq^3$ तथा $n = p^3q^2$ के रूप में लिखा जाये तब m, n का महत्तम समापवर्तक बताइये जबकि p, q अभाज्य संख्याएँ हैं
(क) pq
(ख) pq^2
(ग) p^2q^2
(घ) p^3q^3

उत्तर: (ख) pq^2

प्रश्न 3. 95 तथा 152 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है
(क) 1
(ख) 19
(ग) 57
(घ) 38

उत्तर: (ख) 19

प्रश्न 4. दो संख्याओं का गुणनफल 1080 है। उनका महत्तम समापवर्तक 30 है तो उनका लघुत्तम समापवर्तक है
(क) 5
(ख) 16
(ग) 36
(घ) 108

उत्तर: (ग) 36

प्रश्न 5. संख्या $\frac{441}{2^2 \times 5^7 \times 7^2}$ का दशमलव प्रसार होगा.
(क) सांत
(ख) असांत आवर्ती
(ग) सांत एवं असांत दोनों
(घ) संख्या, परिमेय संख्या नहीं है।

उत्तर: (ख) असांत आवर्ती

प्रश्न 6. परिमेय संख्या 2 के दशमलव प्रसार को दशमलव के कितने अंकों के पश्चात् अंत होगा?
(क) एक
(ख) दो
(ग) तीन
(घ) चार

उत्तर: (ग) तीन

प्रश्न 7. सबसे न्यूनतम संख्या जिससे $\sqrt{27}$ को गुणा करने पर एक प्राकृत संख्या प्राप्त होती है, होगी
(क) 3
(ख) 3
(ग) 9
(घ) 343

उत्तर: (ख) 3

प्रश्न 8. यदि दो परिमेय संख्याओं के लिए HCF = LCM, तो संख्याएँ होनी चाहिए—
(क) भाज्य
(ख) समान
(ग) अभाज्य
(घ) सहअभाज्य

उत्तर: (ख) समान

प्रश्न 9. यदि a तथा 18 का LCM 36 है तथा a तथा 18 को HCF 2 है, तो a का मान होगा—
(क) 1
(ख) 2

(ग) 5
(घ) 4

उत्तर: (घ) 4

प्रश्न 10. यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो $6^n - 5^n$ में इकाई का अंक है-
(क) 1
(ख) 6
(ग) 5
(घ) 9

उत्तर: (क) 1

प्रश्न 11. यदि $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ एक परिमेय संख्या है, तो यू पर क्या प्रतिबन्ध होगा जबकि $\frac{p}{q}$ एक सात दशमलव हो।

हल: हर q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप के होंगे, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णाक हैं।

प्रश्न 12. सरल कर बताइए कि संख्या $\frac{2\sqrt{45}+3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या?

हल: दी गयी संख्या

$$\frac{2\sqrt{45}+3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{9\times5}+3\sqrt{4\times5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\times3\sqrt{5}+3\times2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}(6+6)}{2\sqrt{5}} \quad \text{या} \quad \frac{12\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{या} \quad \frac{12}{2} = 6 \quad \text{अर्थात्} \ \frac{6}{1}$$

अर्थात् दी गयी संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में प्राप्त हो रही है अतः दी गयी संख्या परिमेय संख्या है।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक 4g +1 या 4g + 3 के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णाक है।

हल: माना कि a एक धनात्मक विषम पूर्णाक है। अब a और b = 4 के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म के प्रयोग से a = 4g +r
∵ $0 \leq r \leq 4$ अतः सम्भावित शेषफल 0, 1, 2, 3 होंगे अर्थात् a के मान 4q या 4q + 1 या 4q +2 या 4q + 3 हो सकते हैं, जहाँ q कोई भाज्य है। अब चूंकि a एक विषम धनात्मक पूर्णांक है अतः यह 4q, 4q + 2 के रूप का नहीं हो सकता क्योंकि ये सभी 2 से भाज्य होने के कारण सम धनात्मक पूर्णाक हैं । अतः कोई भी धनात्मक विषम पूर्णाक 4g + 1 या 4q+3 के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णाक है।

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 2 से भाज्य है।

हल: माना पहला धनात्मक पूर्णांक = n
और इसके क्रमागत दूसरा धनात्मक पूर्णाक = n +1
प्रश्नानुसार हमें दोनों का गुणनफल 2 से भाज्य सिद्ध करना है। अतः दोनों का गुणनफल माना f(n) = n(n + 1)
जहाँ $f(x) = n^2+n$
हम जानते हैं कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक 2q या (2q + 1) के रूप में होता है। जहाँ q एक पूर्णांक है।
यहाँ दो स्थितियाँ सम्भव हैं—

स्थिति I. जब n = 2q हो तो
$n^2 + n = (2q)^2 + 2q$
$= 4q^2 + 2q$
$= 2q(2q + 1)$
माना $r = q(2q + 1)$
$\Rightarrow n^2 + n = 2r$

स्थिति II. जब n = 2q + 1 हो तो
$n^2+ n = (2q + 1)^2 + (2q + 1)$
$= 4q^2 + 4q + 1 + 2q + 1$
$= 4q^2 + 6q + 2$
$= 2(2q^2 + 3q + 1)$
$= 2r$
माना $r = 2q^2 + 3q + 1$
$\Rightarrow n^2 + n = 2r$ .....(ii)
अतः समीकरण (i) व (ii) से स्पष्ट है कि
$n^2 + n$, 2 से विभाजित किया जा सकता है।
$\Rightarrow n(n + 1)$, भी 2 से विभाजित है।
अतः दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 2 से भाज्य है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2053 और 967 को विभाजित करने पर शेषफल क्रमशः 5 तथा 7 प्राप्त होते हैं।

हल: यह दिया हुआ है कि 2053 को अभीष्ट पूर्णांक द्वारा विभाजित करने पर शेषफल 5 रह जाता है। इसलिए 2053 – 5 = 2048 को अभीष्ट संख्या पूर्णतया भाजित करती है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 2048 का गुणनखण्ड है। इसी प्रकार 967-7 = 960 भी अभीष्ट संख्या से विभाज्य है। चूंकि अभीष्ट संख्या सबसे बड़ी ऐसी संख्या है जो 2048 और 960 को विभाजित करती है। अतः अभीष्ट संख्या 2048 तथा 960 का महत्तम समापवर्तक है। गुणनखण्ड विधि के उपयोग से 2048 तथा 960 के अभीष्ट गुणनखण्ड निम्नानुसार हैं
$2048 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^{11}$
$960 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$= 2^6 \times 3 \times 5$
इसलिए 2048 और 960 का महत्तम समापवर्तक $2^6 = 64$ है।

प्रश्न 16. व्याख्या कीजिए कि 7 × 11 × 13 + 13 और 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5 भाज्य संख्याएँ क्यों हैं ?

हल: प्रश्नानुसार
$7 \times 11 \times 13 + 13$
$= 13(7 \times 11 + 1)$
$= 13(77 + 1)$
$= 13 \times 78$
$= 13 \times 2 \times 3 \times 13$
$= 2 \times 3 \times 13 \times 13$
चूंकि 2, 3 और 13 अभाज्य संख्याएँ हैं। अतः अंक गणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणन खण्डित की जा सकती है।
अतः यह एक भाज्य संख्या है।
इसी प्रकार,
$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$
$= 5[7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1]$
$= 5(1008 + 1) = 5 \times 1009$
∵ 5 और 1009 अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार यह एक भाज्य संख्या है।

प्रश्न 17. यदि दो संख्याओं 306 और 657 का महत्तम समापवर्तक 9 हो, तो इनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल: पहली संख्या = 306
दुसरी संख्या = 657

H.C.F. = 9
L.C.M. = ?
हम जानते हैं-

$$\text{L.C.M.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{HCF}}$$

$$\text{L.C.M.} = \frac{306 \times 657}{9}$$

$$= 34 \times 657$$

$$= 22338 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 18. एक आयताकार बरामदा 18 मी. 72 सेमी. लम्बा तथा 13 मी. 20 सेमी. चौड़ा है। इसमें समान विमाओं वाली वर्गाकार टाइलें लगानी हैं। इस प्रकार की टाइलों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार बरामदा की लम्बाई = 18 मी. 72 सेमी.
= 1800 सेमी. + 72 सेमी.
= 1872 सेमी.
इसके अभाज्य गुणनखण्ड होंगे = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 13
= $2^4 \times 3^2 \times 13$
आयताकार बरामदा की चौड़ाई = 13 सेमी. 20 सेमी.
= 1300 सेमी. + 20 सेमी.
= 1320 सेमी.
इसके अभाज्य गुणनखण्ड होंगे = 2 × 2 × 2 × 3 × 11 × 5
= $2^3 \times 3^1 \times 5 \times 11$
दोनों अभाज्य गुणनखण्डों का HCF = $2^3 \times 3^1$ = 8 x 3 = 24
अतः वर्गाकार टाइल की माप होगी = 24 सेमी.
इस प्रकार से न्यूनतम वर्गाकार टाइलों की संख्या

$$= \frac{\text{बरामदा का क्षेत्रफल (LCM)}}{\text{एक टाइल्स का क्षेत्रफल (HCF)}}$$

$$= \frac{1872 \times 1320}{24 \times 24}$$

$$= 78 \times 55 = 4290 \text{ टाइल्स उत्तर}$$

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय संख्याए हैं-

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ (iv) $4+\sqrt{2}$

हल: (i) प्रश्न में दिये गये कथन के विपरीत माना कि $5\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसे दो पूर्णांक a तथा b (b ≠ 0) प्राप्त कर सकते हैं कि

$$5\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

या $$5b\sqrt{2} = a$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a}{5b} \quad .....(i)$$

क्योंकि दो पूर्णांकों का भागफल एक परिमेय संख्या होती है।
अतः $\frac{a}{5b}$ = एक परिमेय संख्या
समीकरण (i) से $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह कथन असत्य है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है। अतः $5\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(इतिसिद्धम्)

(ii) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

प्रश्न में दिये गये कथन के विपरीत माना कि $\frac{2}{\sqrt{7}}$ एक परिमेय संख्या है।
अतः हम अविभाज्य पूर्णांक a और b(b ≠ 0) प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

या $$\frac{2}{7}\sqrt{7} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{7} = \frac{7a}{2b} \quad .....(i)$$

क्योंकि दो पूर्णांकों का भागफल एक परिमेय संख्या होती है।
अतः $\frac{7a}{b}$ = एक परिमेय संख्या
समीकरण (i) से $\sqrt{7}$ भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह कथन असत्य है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है। अतः $2\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(इतिसिद्धम्)

(iii) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$

प्रश्न में दिये गये कथन के विपरीत माना कि $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम अविभाज्य पूर्णाक a और b(b ≠ 0) प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{10}\sqrt{5}$$

या $$\frac{3}{10}\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{5} = \frac{10a}{3b} \qquad .....(i)$$

क्योंकि दो पूर्णांकों का भागफल एक परिमेय संख्या होती है।
अतः $\frac{10a}{3b}$ = एक परिमेय संख्या
समीकरण (i) से $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह कथन असत्य है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है। अतः $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iv) $4+\sqrt{2}$
माना कि $4+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसी सह-अभाज्य संख्यायें a और b(b ≠ 0) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$4+\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 4$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a-4b}{b} \qquad .....(i)$$

चूँकि a तथा b पूर्णांक हैं अतः $\frac{a-4b}{b}$ भी एक पूर्णांक संख्या होगी क्योंकि पूर्णांकों की बाकी तथा पूर्णांकों का भाग भी पूर्णांक होता है।
अर्थात्
$\frac{a-4b}{b}$ = एक परिमेय संख्या
इसलिए समीकरण (i) से $\sqrt{2}$ = एक परिमेय संख्या
परन्तु यह कथन कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या होती है, का विरोधाभासी कथन है।
अतः हमारी कल्पना असत्य है। अर्थात् $4+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 20. निम्न परिमेय संख्याओं के हर के अभाज्य गुणनखण्डन के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
(i) 34.12345
(ii) $43.\overline{123456789}$

हल:

(i) माना कि $x = 34.12345$

$\therefore \quad x = \dfrac{3412345}{100000}$

या $\quad x = \dfrac{3412345}{10^5} = \dfrac{3412345}{(2\times5)^5}$

$x = \dfrac{3412345}{2^5\times5^5}$

जो कि $\dfrac{p}{q}$ के रूप की एक परिमेय संख्या है। अतः q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 या दोनों होंगे चूँकि इसका दशमलव प्रसार सांत है। जहाँ m, n ऋणेत्तर गुणांक़ है।

(ii) माना कि $x = 43.\overline{123456789}$

$x = 43.123456789\ 123456789.....$ .....(i)

दोनों पक्षों को 10^9 से गुणा करने पर

$10^9 x = 43123456789.123456789$ .....(ii)

(ii) में से (i) को घटाने पर

$(10^9 - 1)\, x = 43123456746$

$999999999x = 43123456746$

$\therefore \quad x = \dfrac{43123456746}{999999999}$

जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप की एक परिमेय संख्या है।
अतः q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 के अतिरिक्त एक और गुणनखण्ड होगा। अतः दी गई संख्या परिमेय है और q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 के अतिरिक्त भी है।
अर्थात् इसके हर का अभाज्य गुणनखण्ड 2m x 5″ के रूप का नहीं है। चूंकि इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. दो संख्याओं का HCF खोजने वाले विद्वान् गणितज्ञ यूक्लिड थे
(A) यूनान के
(B) भारत के
(C) अमेरिका के
(D) ब्रिटेन के

उत्तर: (A) यूनान के

प्रश्न 2. एक ऐसी संख्या जिसके 1 और स्वयं के अतिरिक्त कोई गुणनखण्ड न हो, कहलाती है
(A) भाज्य संख्या
(B) अभाज्य संख्या
(C) सम संख्या
(D) विषम संख्या

उत्तर: (B) अभाज्य संख्या

प्रश्न 3. सबसे छोटी अभाज्य संख्या है
(A) 5
(B) 4
(C) 3
(D) 2

उत्तर: (D) 2

प्रश्न 4. दो या अधिक संख्याओं का HCF (महत्तम समापवर्तक) होता है
(A) सबसे छोटा उभयनिष्ठ
(B) केवल उभयनिष्ठ
(C) सबसे बड़ी संख्या
(D) सबसे बड़ा उभयनिष्ठ

उत्तर: (D) सबसे बड़ा उभयनिष्ठ

प्रश्न 5. यदि मानक रूप में लिखी गयी परिमेय संख्या के हर के अभाज्य गुणनखण्ड में 2 या 5 या दोनों अंकों के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड न हो, तो यह संख्या होती है-
(A) असांत दशमलव
(B) सांत दशमलव
(C) सांत व असांत दोनों
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर: (B) सांत दशमलव

प्रश्न 6. वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं
(A) केवल परिमेय संख्याएँ
(B) केवल अपरिमेय संख्याएँ
(C) परिमेय एवं अपरिमेय दोनों
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर: (C) परिमेय एवं अपरिमेय दोनों

प्रश्न 7. यदि किसी संख्या को है के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है, तो वे संख्याएँ कहलाती हैं
(A) पूर्ण संख्याएँ
(B) परिमेय संख्याएँ
(C) अपरिमेय संख्याएँ
(D) प्राकृत संख्याएँ।

उत्तर: (C) अपरिमेय संख्याएँ

प्रश्न 8. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अन्तर कौनसी संख्या निम्न में से होती है?
(A) परिमेय संख्या
(B) अपरिमेय संख्या
(C) पूर्ण संख्या
(D) प्राकृत संख्या

उत्तर: (B) अपरिमेय संख्या

प्रश्न 9. संख्या $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य होती है, यदि n है एक
(A) पूर्णांक
(B) प्राकृत संख्या
(C) विषम संख्या
(D) सम संख्या

उत्तर: (C) विषम संख्या

प्रश्न 10. यदि n^2 एक सम संख्या है तो n भी एक
(A) विषम संख्या है
(B) सम संख्या है।
(C) कह नहीं सकते
(D) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (B) सम संख्या है।

प्रश्न 11. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणन होता है
(A) सदैव अपरिमेय संख्या

(B) सदैव परिमेय संख्या
(C) परिमेय या अपरिमेय संख्या
(D) एक

उत्तर: (A) सदैव अपरिमेय संख्या

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका क्या है?

उत्तर: यदि a तथा b दो धनात्मक पूर्णांक हैं तो दो अद्वितीय पूर्णांक १ तथा r इस प्रकार होते हैं कि
a = bq +r
जबकि 0 ≤ r ≤ b

प्रश्न 2. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म क्या है?

उत्तर: यह दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करने की एक विधि है। यह विधि यूक्लिड की एल्गोरिथ्म के नाम से जानी जाती है।

प्रश्न 3. धनात्मक पूर्णांकों के दो महत्वपूर्ण गुण कौनसे हैं?

उत्तर:

1. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि),
2. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय।।

प्रश्न 4. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय क्या है?

उत्तर: प्रत्येक भाज्य संख्या को एक अद्वितीय रूप से अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यही तथ्य अंकगणित की आधारभूत प्रमेय कहलाती है।

प्रश्न 5. एक शून्येत्तर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल कौनसी संख्या होती है?

उत्तर: एक अपरिमेय संख्या।

प्रश्न 6. अपरिमेय संख्याओं के उदाहरण दीजिए।

उत्तर: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ आदि।

प्रश्न 7. भाज्य संख्या किसे कहते हैं?

उत्तर: वह संख्या जिसके कम से कम एक गुणनखण्ड 1 और स्वयं के अतिरिक्त हो, भाज्य संख्या कहलाती है।

प्रश्न 8. लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) क्या होता है?

उत्तर: दो या अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो प्रत्येक संख्या की गुणन है।

प्रश्न 9. महत्तम समापवर्तक (HCF) क्या होता है?

उत्तर: दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF). वह सबसे बड़ी संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती है।

प्रश्न 10. यदि दो संख्याएँ a तथा b दी गई हों तो इनका गुणनफल किसके बराबर होता है?

उत्तर: HCF (a, b) × LCM (a, b)

प्रश्न 11. संख्या 32760 को गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

उत्तर: 32760 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 × 13
= $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

प्रश्न 12. वास्तविक संख्याओं को परिभाषित कीजिये।

उत्तर: वास्तविक संख्याएँ-समस्त परिमेय और समस्त अपरिमेय संख्याओं के सम्मिलित संग्रह या समूह को वास्तविक संख्याओं का समूह कहते हैं।

प्रश्न 13. सांत दशमलव प्रसार की शर्त लिखिये।

उत्तर: माना कि $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि ५ का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप का है, जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक है तो x का दशमलव प्रसार सांत होता है।

प्रश्न 14. 48 और 105 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

उत्तर: 48 और 105 48 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 2 × 2 × 3
= 2^4 × 3
105 के अभाज्य गुणनखण्ड= 3 × 5 × 7
अतः दोनों में अधिकतम उभयनिष्ठ राशि 3 है। अतः इसका महत्तम समापवर्तक 3 होगा। उत्तर

प्रश्न 15. क्या दो संख्याओं का म.स. (H.C.F) 15 तथा ल.स. (L.C.M.) 175 हो सकता है? कारण दीजिये।

हल: चूँकि हम जानते हैं कि (L.C.M.), H.C.F से विभाज्य होता है। लेकिन यहाँ पर (L.C.M.) 175, (H.C.F) 15 से विभाज्य नहीं है। अतः दो संख्याओं का म.स. (H.C.F) 15 तथा ल.स. (L.C.M.) 175 नहीं हो सकता है।

प्रश्न 16. परिमेय संख्या $\frac{17}{8}$ को बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किये दशमलव प्रसार सांत में लिखिये।

हल: माना कि $x = \frac{17}{8}$ हैं
इसको इस प्रकार से लिख सकते हैं-

$$x = \frac{17}{2^3 \times 5^0} \text{ या } x = \frac{17 \times 5^3}{2^3 \times 5^3}$$

(हर को 10 की घात बनाने के लिये 5^3 से गुणा व भाग करने पर)

$$x = \frac{17 \times 125}{(2 \times 5)^3} = \frac{2125}{(10)^3} = \frac{2125}{1000}$$

$\therefore$ $x = 2.125$ उत्तर

प्रश्न 17. संख्या $\frac{3}{625}$ को दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती इसे दशमलव रूप में लिखें।

उत्तर:

माना कि $$x = \frac{3}{625} = \frac{3}{5^4 \times 2^0}$$

$$= \frac{3 \times 2^4}{5^4 \times 2^4}$$

यहाँ पर q का अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप का है। जहाँ n, m ऋणेत्तर पूर्णांक हैं, तो x का दशमलव

प्रसार सांत होता है।

अब
$$x = \frac{3\times2^4}{5^4\times2^4} = \frac{3\times16}{(5\times2)^4}$$
$$x = \frac{48}{10^4} = \frac{48}{10000} = 0.0048$$

प्रश्न 18. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा पूर्णांक 375 और 675 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल: पूर्णांक 375 और 675 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$$\begin{array}{r|r} 3 & 375 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 3 & 675 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

अतः
$$375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^1 \times 5^3$$
$$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^2$$
$\therefore$
$$\text{HCF} = 3^1 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$$ उत्तर

प्रश्न 19. एक अशून्य-परिमेय संख्या तथा एक, अपरिमेय संख्या का गुणनफल तथा भागफल किस तरह की संख्या होती है?

उत्तर: अपरिमेय संख्या होती है।

प्रश्न 20. यदि कोई बड़ी संख्या अपने आधे से कम अभाज्य संख्या से भाज्य नहीं है, तब संख्या कैसी होगी?

उत्तर: तब यह संख्या अभाज्य है अन्यथा यह भाज्य है।

प्रश्न 21. परिमेय संख्या $\frac{27}{2\times5^2}$ के दशमलव प्रसार में दशमलव के कितने अंकों के पश्चात् अंत होगा? (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\frac{37}{2\times5^2} = \frac{37}{2\times5^2}\times\frac{2}{2} = \frac{74}{2^2\times5^2}$$

$$= \frac{74}{(2\times5)^2} = \frac{74}{(10)^2} = 0.74$$

अत: $\frac{37}{2\times5^2}$ के दशमलव में दशमलव दो अंक के पश्चात् अंत होगा।

प्रश्न 22. 196 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का योगफल लिखिये (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: 96 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2 × 2 × 7 × 7
= 2^2 x 7^2

$$\begin{array}{r|r} 2 & 196 \\ \hline 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

अत: 196 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का योग = 2 + 2 = 4 उत्तर

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक 3q या 3q+1 या 3q + 2 के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ ५ कोई पूर्णांक है।

हल: माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा b = 3 है। a तथा b = 3 पर यूक्लिड विभाजनं प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर,
a = 3q +r
जबकि 0 ≤ r ≤ 3 तथा q कोई पूर्णांक है।
⇒ a = 3q > 0 या a = 3q + 1
या a = 3q + 2 [∵ r एक धनात्मक पूर्णाक है ।]
⇒ a = 3q या a = 3q + 1 या a = 3q + 2
किसी भी पूर्णांक q के लिए।

प्रश्न 2. दर्शाइये कि प्रत्येक धनात्मक समं पूर्णांक 2q के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक 2q +1 के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णाक है।

हल: माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा b = 2 है। अब यदि यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से दो पूर्णांक q तथा r इस प्रकार विद्यमान हैं कि
a = 2q +r

जबकि $0 \le r < 2$
अब, $0 \le r < 2$
$\Rightarrow 0 \le r \le 1$
$\Rightarrow r = 0$ या $r = 1$ [$\because$ r एक पूर्णांक है]
$\therefore a = 2q$ या $a = 2q + 1$
यदि $a = 2q$ है तो यह एक सम पूर्णांक है।
$\because$ कोई पूर्णांक या तो सम हो सकता है या विषम हो सकता है।
अतः कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होगा।

प्रश्न 3. दर्शाइये कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक 4q +1 या 4q +3 के रूप का होता है, जहाँ a कोई पूर्णांक है।

हल: माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा b = 4 है। a तथा b = 4 पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर दो पूर्णांक q तथा । इस प्रकार होते हैं कि
$a = 4q + r$
जबकि $0 \le r < 4$
$\Rightarrow a = 4q$ या $a = 4q + 1$
या $a = 4q + 2$ या $a = 4q + 3$

$$\begin{bmatrix} \because 0 \le r < 4 \\ \Rightarrow r = 0, 1, 2, 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = 4q + 1 \text{ या } a = 4q + 3$$

$$\begin{bmatrix} \because a \text{ एक विषम पूर्णांक है।} \\ \therefore a \ne 4q, a \ne 4q + 2 \end{bmatrix}$$

अतः कोई भी विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होगा ।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों में से एक 3 से विभाज्य है।

हल: माना कि n, n+ 1 तथा n + 2 तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक हैं।
$\therefore$ n, 3q या 3q + 1 या 3q + 2 के रूप का होता है। इस स्थिति में निम्न तीन स्थितियाँ हैं-
स्थिति I: जब $n = 3q$ है।
इस स्थिति में n, 3 से विभाज्य है परन्तु n + 1 तथा n + 2, 3 से विभाज्य नहीं है।
स्थिति II : जब $n = 3q + 1$
इस स्थिति में $n + 2 = 3q + 1 + 2 = 3(q+ 1)$, जो कि 3 से विभाज्य है परन्तु n तथा n +1 का 3 से विभाज्य नहीं है।
स्थिति III : जब $n = 3q + 2$ है।
इस स्थिति में $n + 1 = 3q + 2 + 1 = 3(q + 1)$, 3 से विभाज्य है परन्तु n तथा n + 2 का 3 से विभाज्य नहीं है।
अतः n, n + 1 तथा n + 2 में से एक 3 से विभाज्य है।

प्रश्न 5. 81 और 27 का महत्तम समापवर्तक (HCF) यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

हल: 81 और 237

चरण I: यहाँ पर दिये गये पूर्णांक 81 एवं 237 इस प्रकार हैं कि 237 > 81, अतः इन पूर्णाकों पर यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करने पर निम्न प्राप्त होता है-
237 = 81 × 2 + 75 ……….(i)
चरण II: यहाँ शेषफल 75 ≠ 0 है। अतः भाजक 81 एवं शेषफल 75 पर यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करने पर
81 = 75 × 1 + 6 …..(ii)
चरण III: समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि यहाँ भी शेषफले 6 ≠ 0 है।| अतः पुनः भाजक 75 एवं शेषफल 6 पर यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करेंगे अर्थात्
75= 6 × 12 + 3 …..(iii)
चरण IV: यहाँ पर भी शेषफल 3 ≠ 0 है। अतः यूक्लिड विभाजन विधि के भाजक 6 एवं शेषफल 3 पर प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है-
6 = 3 × 2 + 0 …..(iv)
समीकरण (iv) से स्पष्ट है कि इस स्थिति में शेषफले 0 (शून्य) प्राप्त हो गया है। अतः अन्तिम भाजक 3 ही 81 एवं 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है।

प्रश्न 6. एक मिठाई विक्रेता के पास 420 काजू की बर्फियाँ और 130 बादाम की बर्फियाँ हैं। वह इनकी ऐसी ढेरियाँ बनाना चाहता है कि प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये ढेरियाँ बफ की परात में न्यूनतम स्थान घेरें । इस काम के लिए, प्रत्येक ढेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती हैं?

हल: यह कार्य जाँच और भूल विधि से किया जा सकता है। परन्तु इसे एक क्रमबद्ध रूप से करने के लिए हम HCF (420, 130) ज्ञात करते हैं। तब, इस HCF से प्रत्येक ढेरी में रखी जा सकने वाली बर्फियों की अधिकतम संख्या प्राप्त होगी, जिससे ढेरियों की संख्या न्यूनतम होगी और परात में ये बर्फियाँ न्यूनतम स्थान घेरेंगी।
अब यूक्लिड एल्गोरिथ्म का प्रयोग करने पर
420 = 130 × 3 + 30
130 = 30 × 4 + 10
30 = 10 × 3 + 0
अतः 420 और 130 का HCF 10 है। इसलिए, प्रत्येक प्रकार की बर्फियों के लिए मिठाई विक्रेता दस-दस की ढेरी बना सकता है। उत्तर

प्रश्न 7. जाँच कीजिये कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6” अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है?

हल: हम जानते हैं कि कोई भी धनात्मक पूर्णाक जिसका इकाई अंक शून्य होता है, वह अंक 5 से भाज्य होता है। अर्थात् उस धनात्मक पूर्णांक का गुणनखण्ड 5 होना चाहिए। यहाँ पर किसी n के लिए 6^n धनात्मक पूर्णांक है जो शून्य पर समाप्त होता है अतः गुणनखण्डन करने पर $6^n = (2 \times 3) = 2^n \times 3^n$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार 6^n के गुणनखण्ड में 2 एवं 3 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड नहीं हैं अर्थात् गुणनखण्ड में अंक 5 नहीं है। अतः 6^n किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 0 (शून्य) अंक पर समाप्त नहीं होगा।

प्रश्न 8. निम्नलिखित धनात्मक पूर्णांकों को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए-
(i) 5005
(ii) 7429

हल:

(i)
$$\begin{array}{r|l} 5 & 5005 \\ \hline 7 & 1001 \\ \hline 11 & 143 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

अत: $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ अभाज्य गुणनखण्ड है।

(ii) 7429
$$\begin{array}{r|l} 17 & 7429 \\ \hline 19 & 437 \\ \hline 23 & 23 \\ \hline & 1 \end{array}$$

अत: $7429 = 17 \times 19 \times 23$ अभाज्य गुणनखण्ड है।

प्रश्न 9. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा 144, 180 और 192 के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए।

हल: $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$
$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
तथा $192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 26 \times 31$
HCF ज्ञात करने के लिए हम उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात ज्ञात करते हैं।
अतः HCF $= 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$ उत्तर
अब लघुत्तम समापवर्तक LCM ज्ञात करने के लिए हम संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों की अधिकतम घातांकों को लेते हैं।

अतः LCM = $2^6 \times 3^2 \times 5$
= 64 × 9 × 5 = 2880 उत्तर

प्रश्न 10. पूर्णांकों के युग्म (510, 92) के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिये तथा इसकी जाँच कीजिये कि युग्म की दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल: अभाज्य गुणनखण्डन विधि से हम युग्म की संख्याओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं-
510 = 2 × 3 × 5 × 17 = $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$
92 = 2 × 2 × 23 = $2^2 \times 23^1$
∴ HCF = 2
अब
LCM = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1$
= 4 × 3 × 5 × 17 × 23
= 23460
सत्यापन-
LCM × HCF = 23460 × 2
= 46920
संख्याओं का गुणन = 510 × 92
= 46920
अतः LCM × HCF = संख्याओं का गुणनफल (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिये कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।
इसलिए $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$
जहाँ पर b ≠ 0 और a, b सहअभाज्य पूर्णांक संख्यायें हैं।
या $\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$ .....(i)
चूँकि a, b पूर्णांक हैं इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। अत: समीकरण (i) से स्पष्ट है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी जो कि विरोधाभास कथन है। क्योंकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या होती है। अतः हमारी परिकल्पना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है। इससे सिद्ध होता है कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिये कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर: माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।
इसलिए $3 + 2\sqrt{5}$ = $\frac{a}{b}$ b ≠ 0
जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्यायें हैं।
समीकरण (i) को इस प्रकार से भी लिख सकते हैं-

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3.$$

या $$\sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b} \qquad .....(ii)$$

चूँकि a, b पूर्णांक संख्यायें हैं, अतः $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या है। अतः परिणाम विरोधाभासी है। अतः हमारी परिकल्पना कि $3+2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है, गलत है। इससे सिद्ध होता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 13. लम्बी विभाजन विधि के बिना बताइये कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं-

(i) $\frac{17}{8}$ **(ii)** $\frac{64}{455}$ **(iii)** $\frac{125}{441}$

हल:

$$\frac{17}{8} = \frac{17}{2\times2\times2} = \frac{17}{2^3} = \frac{17}{2^3\times5^0}$$

यहाँ परिमेय संख्या का हर 8, $2^3 \times 5^0$ है जो $2^m \times 5^n$ के रूप का है अत: $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार **सांत** है।

(ii) $$\frac{64}{455} = \frac{64}{5\times7\times13}$$

स्पष्ट है कि, हर 455, $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है, अत: $\frac{64}{455}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

(iii) यहाँ पर $$\frac{125}{441} = \frac{5^3}{9\times49} = \frac{5^3}{3\times3\times49}$$

अत: $$\frac{125}{441} = \frac{5^3}{3^2\times7^2}$$

स्पष्ट है कि हर 441, $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है।

अत: $\frac{125}{441}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

प्रश्न 14. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 247 और 2055 को इस प्रकार विभाजित करती है कि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 7 प्राप्त हो। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: दिया गया है कि 247 और 2055 को अभीष्ट संख्या से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 7 प्राप्त होता है। अतः 247 -7 = 240 एवं 2055 -7 = 2048

अर्थात् 240 और 2048 को अभीष्ट संख्या द्वारा पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है। यह तभी सम्भव है जबकि अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो। यह भी ज्ञात है कि अभीष्ट संख्या इस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड में
सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का महत्तम समापवर्तक | (HCF) होगी। अतः यूक्लिड विभाजन विधि का चरणबद्ध प्रयोग करने पर
$2048 = 240 \times 8 + 128$
$240 = 128 \times 1 + 112$
$128 = 112 \times 1 + 16$
$112 = 16 \times 7 + 0$
स्पष्ट है कि अन्तिम शेषफल शून्य प्राप्त हो गयी है। इस प्रकार अभीष्ट महत्तम समापवर्तक भाजक 16 प्राप्त हुआ, जो कि अभीष्ट संख्या है।

प्रश्न 15. यदि दो संख्याओं का गुणनफल 525 है और उनका महत्तम समापवर्तक 5 है, तो उनका लघुत्तम समापवयं ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: दिया है-
दो संख्याओं का गुणनफल = 525
उनका महत्तम समापवर्तक = 5
हम जानते हैं-

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = \text{दो संख्याओं का गुणनफल}$$

$$\text{इसलिये लघुत्तम समापवर्त्य (LCM)} = \frac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\text{HCF}}$$

$$= \frac{525}{5} = 105 \text{ उत्तर}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यूक्लिड विभाजनं प्रमेयिका का प्रयोग कर दर्शाइये कि किसी धनात्मक पूर्णाक का वर्ग 3m या 3m +1 के रूप का होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

हल: माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है। हम जानते हैं कि यह धनात्मक पूर्णांक a = 3q या a = 3q + 1 या a = 3q + 2 के रूप का होगा।
(i) यदि a = 3q है, तब
$(a)^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3(3q^2) = 3m$ ....(i)

जहाँ $m = 3q^2$ है।
(ii) यदि $a = 3q + 1$ है तब
$a^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1$
$a^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$
$= 3m + 1$ ....(ii)
जहाँ $m = 3q^2 + 2q$ है।
(iii) यदि $a = 3q + 2$ है तब
$(a)^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4$
$= 9q^2 + 12q + 3 + 1$
$= 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$ है
$= 3m + 1$ ....(iii)
जहाँ $m = 3q^2 + 4g + 1$
अतः उपर्युक्त (i), (ii) एवं (iii) स्थिति से स्पष्ट है कि पूर्णांक a का वर्ग 3m या 3m + 1 के रूप का होता है।

प्रश्न 2. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32. सदस्यों वाले एक आर्मी बैण्ड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तम्भों में मार्च करना है। उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 616 और 32
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (विधि) के प्रयोग से-
चरण I: ∵ 616 > 32 अतः यूक्लिड प्रमेयिका के अनुसार
∵ $616 = 32 \times 19 + 8$
चरण I: ∵ शेषफल $8 \neq 0$ है अतः अब 32 और 8 पर यूक्लिड प्रमेयिका प्रयुक्त करने पर
$32 = 8 \times 4 + 0$
अब शून्य प्राप्त हो जाने पर यह प्रक्रिया समाप्त हो जायेगी। चरण II में भाजक 8 है अतः 616 और 32 का HCF 8 है। इस प्रकार सेना टुकड़ी एवं बैण्ड के सदस्यों का समूह अधिकतम 8 स्तम्भों में मार्च करेंगे।
संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है-

32)616(19
32
296
288
8

अर्थात् $616 = 32 \times 19 + 8$

8)32(4
32
0

∴ 616 तथा 32 का HCF, 8 है।
इसलिए स्तम्भों की अधिकतम संख्या = 8

प्रश्न 3. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिये जो 245 और 2053 को इस प्रकार विभाजित करती है कि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त हो।

हल: यह दिया हुआ है कि 245 और 2053 को अभीष्ट पूर्णांक द्वारा विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 रह जाता है। इसलिए 245 -5 = 240 और 2053 – 5 = 2048 को अभीष्ट संख्या द्वारा पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है। यह तभी सम्भव है जबकि अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो। यह भी ज्ञात है कि अभीष्ट संख्या इस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड में सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का (HCF) होगी। अतः यूक्लिड विभाजन विधि का चरणबद्ध प्रयोग करने पर-
$2048 = 240 \times 8 + 128$
$240 = 128 \times 1 + 112$
$128 = 112 \times 1 + 16$
$112 = 16 \times 7 + 0$
स्पष्ट है कि अन्तिम शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस प्रकार अभीष्ट महत्तम समापवर्तक भाजक 16 प्राप्त हुआ जो कि अभीष्ट संख्या है।

प्रश्न 4. दर्शाइये कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।
इसलिए $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, b #0 ....(i)
जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्यायें हैं।
समीकरण (i) को इस तरह से भी लिख सकते हैं

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} - \sqrt{2}$$

दोनों तरफ का वर्ग करने पर

$$(\sqrt{5})^2 = \left(\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 5 = \frac{a^2}{b^2} + 2 - 2\sqrt{2}\frac{a}{b}.$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2}\,\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} - 3.$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \left(\frac{a^2 - 3b^2}{b^2}\right) \times \frac{b}{2a} = \frac{a^2 - 3b^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{a^2 - 3b^2}{2ab} \qquad \text{.....(ii)}$$

चूँकि a, b पूर्णांक है, अतः $\frac{a^2-3b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है

कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः यह परिणाम विरोधाभासी है। इसलिए हमारी हमारी परिकल्पना कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है। इससे सिद्ध होता है कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि 2 एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं है के लिए निम्न कथन को लिख सकते हैं-
$\sqrt{2}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
जहाँ पर a और b सह अभाज्य संख्यायें हैं। अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।
अतः $\sqrt{2}$ b = a
दोनों पक्षों का वर्ग करने पर
$2b^2 = a^2$ .....(i)
∵ $2b^2$, 2 से विभाजित होता है, अतः हम कह सकते हैं कि 2, a^2 को विभाजित करता है।
अतः हम प्रमेय 23 से जानते हैं कि 2, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, 4 को विभाजित करता है। पूर्णांक 4 को निम्न रूप में लिख सकते हैं
a = 2c जहाँ c एक पूर्णाक है।
अतः $a^2 = 4c^2$ .....(ii)
समीकरण (i) से समीकरण (ii) में a का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है-
$2b^2 = 4c^2$
अर्थात् $b^2 = 2c^2$
∵ $2c^2$, 2 से विभाजित होता है अत: b भी 2 से विभाजित होगा।
अतः प्रमेय 2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 2, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, b को भी विभाजित करता है-

प्रथम एवं द्वितीय परिणाम से स्पष्ट है कि 2, पूर्णांक 4 और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है परन्तु यह कथन प्रारम्भ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है। कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः इससे निष्कर्ष निकलता है कि हमारी शुरू की कल्पना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है। अतः यह प्रमाणित हुआ कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है-
$\sqrt{3}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
जहाँ a तथा b सह अभाज्य संख्यायें हैं। अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।
अतः $\sqrt{3}$ b = a
दोनों पक्षों का वर्ग करने पर
$3b^2 = a^2$ .....(i)
अतः प्रमेयानुसार यह स्पष्ट है कि 3, 4 को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार | प्रथम परिणाम यह प्राप्त होता है कि 3, a को विभाजित करता है। अतः हम पूर्णांक 4 को निम्न रूप में लिख सकते हैं-

a = 3c जहाँ c एक पूर्णांक है।
अतः $a^2 = (3c)^2 = 9c^2$ .....(ii)
समीकरण (i) तथा (ii) से
$3b^2 = 9c^2$ अर्थात् $b^2 = 3c^2$
यहाँ चूंकि $3c^2$,3 से विभाजित होता है, अत: b भी 3 से विभाजित होगा।
अतः प्रमेयानुसार हम कह सकते हैं कि 3, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 3, b को विभाजित करता है।
समीकरण (i) एवं (ii) परिणामों से स्पष्ट है कि 3, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है लेकिन यह कथन प्रारम्भ में प्राप्त तथ्य को विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।
अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारम्भिक कल्पना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।
अत: यह सिद्ध हुआ कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांकों a और b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि
$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
जहाँ a और b सह अभाज्य (co-prime) संख्याएँ हैं अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।
अतः $\sqrt{5}$b = a
$\Rightarrow 5b^2 = a^2$ ....(i)
चूँकि $5b^2$, 5 से विभाजित होता है अतः a^2 भी 5 से विभाजित किया जा सकता है।
प्रमेयानुसार हम कह सकते हैं कि 5, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार | प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ है कि 5, a को विभाजित करता है। अतः पूर्णांक 4 को निम्न रूप में लिख सकते हैं
a = 5c, जहाँ c एक पूर्णाक है।
$\Rightarrow a^2 = 25c^2$ .....(ii)
समीकरण (i) एवं (ii) से हमें निम्न प्राप्त होता है-
$5b^2 = 25c^2$
$\Rightarrow b^2 = 5c^2$
यहाँ स्पष्ट है कि 2, 5 से विभाजित किया जा सकता है।
प्रमेयानुसार 5, b को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 5, b को विभाजित करता है।
समीकरण (i) तथा (ii) से कि 5, पूर्णांक a और B का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है परन्तु यह कथन प्रारम्भ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।
अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारम्भिक कल्पना कि 5 एक परिमेय संख्या है, गलत है।
अतः यह प्रमाणित होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 8. दर्शाइये कि किसी धनात्मक पूर्णाकं का घन, किसी पूर्णांक m के लिये 4m, 4m + 1 या 4m + 3 के रूप का होता है।

हल: माना कि एक घन पूर्णाक है।
यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करने पर यह 4q या 4q + 1 या 4q + 2 या 4q + 3 के रूप का होगा।
अतः इसकी निम्नलिखित स्थितियाँ उत्पन्न होंगी-
स्थिति I. जब x = 4q
तब दोनों पक्षों का धन करने पर
$(x)^3 = (4q)^3 = 64q^3$
$= 4 \times (16q^3)$
= 4m, जहाँ $m = 16q^{23}$

स्थिति II. जब x = 4q + 1
⇒ तब $(x)^3 = (4q + 1)^3$ दोनों पक्षों का धन करने पर
$\Rightarrow x^3 = 64q^3 + 48q^2 + 12q + 1$
$= 4q(16q^2 + 12q + 3) + 1$
= 4m + 1, जहाँ $m = q(16q^2 + 12q + 3)$

स्थिति III. जब x = 4q + 2
⇒ तब $x^3 = (4q + 2)^3$ दोनों पक्षों को धन करने पर
$\Rightarrow x^3 = 6q^3 + 96q^2 + 48q + 8$
$= 4(16q^3 + 24q^2 + 12q + 2)$
= 4m, जहाँ $m = 16q^3 + 24q^2 + 12q + 2$

स्थिति IV. जबे x = 4q + 3
⇒ तब $x^3 = (4q + 3)^3$ दोनों पक्षों का धन करने पर
$\Rightarrow x^3 = 64q^3 + 144q^2 + 108q + 27$
$= 64q^3 + 144q^2 + 108q + 24 + 3$
$= 4(16q^3 + 36q^2 + 27q + 6) + 3$
= 4m + 3, जहाँ $m = 16q^2 + 36q + 27q + 6$
अतः किसी धनात्मक पूर्णांक का धन, किसी पूर्णांक m के लिये 4m, 4m + 1 या 4m + 3 के रूप का होता है । (इतिसिद्धम्)