

बहुपद

Ex 3.1

प्रश्न 1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए-

- (i) $4x^2 + 8x$
- (ii) $4x^2 - 4x + 1$
- (iii) $6x^2 - x - 2$
- (iv) $x^2 - 15$
- (v) $x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3}$
- (vi) $3x^2 - x - 4$

हल: (i) प्रश्नानुसार।

$$4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$$

अतः $4x^2 + 8x$ का मान शून्य होगा यदि $4(x + 2)$ का मान शून्य है।

यानि $x = 0$ या $x + 2 = 0$, यानि $x = 0$ या $x = -2$

अतः $4x^2 + 8x$ के शून्य 0 और (-2) हैं।

अब शून्यकों का योग = $0 + (-2) = -2$

$$= \frac{-8}{4} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणन} = (0) \times (-2) = 0$$

$$= \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

(ii) प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 &= 4x^2 - 2x - 2x + 1 \\ &= 2x(2x - 1) - 1(2x - 1) \\ &= (2x - 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

अतः $4x^2 - 4x + 1$ का मान शून्य होगा यदि $(2x - 1)(2x - 1)$ का मान शून्य हो।

$$\text{अर्थात्} \quad 2x - 1 = 0 \quad \text{या} \quad 2x - 1 = 0$$

$$\text{या} \quad 2x = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$$

अतः $4x^2 - 4x + 1$ के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं।

$$\text{अब, शून्यकों का योग} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$= \frac{-(-1)}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणन} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

(iii) प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 - 4x + 3x - 2 \\ &= 2x(3x - 2) + 1(3x - 2) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

अतः $6x^2 - x - 2$ का मान होगा यदि $(3x - 2)(2x + 1)$ का मान शून्य हो।

$$\text{अर्थात्} \quad 3x - 2 = 0 \quad \text{या} \quad 2x + 1 = 0$$

$$\text{यानि} \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{और} \quad x = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, शून्यकों का योग} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} \\ &= \frac{1}{6} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणन} = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

$$(iv) \text{ प्रश्नानुसार} \quad x^2 - 15 = (x - \sqrt{15})(x + \sqrt{15})$$

अतः $x^2 - 15$ का मान शून्य होगा जब $(x - \sqrt{15})(x + \sqrt{15})$ का मान शून्य हो।

$$\text{अर्थात्} \quad x - \sqrt{15} = 0 \quad \text{या} \quad x + \sqrt{15} = 0$$

$$\text{यानि} \quad x = \sqrt{15} \quad \text{या} \quad x = -\sqrt{15}$$

अतः $x^2 - 15$ के शून्यक $\sqrt{15}$ और $-\sqrt{15}$ हैं।

$$\text{अब, शून्यकों का योग} = \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0$$

$$= \frac{0}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा शून्यकों का गुणन} &= (\sqrt{15}) \times (-\sqrt{15}) \\ &= -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

(v) प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} &= x^2 - \sqrt{3}x - x + \sqrt{3} \\ &= x(x - \sqrt{3}) - 1(x - \sqrt{3}) \\ &= (x - 1)(x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

अतः $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$ का मान शून्य होगा यदि $(x - 1)(x - \sqrt{3})$ का मान शून्य हो।

$$\begin{array}{ll} \text{अर्थात्} & x - 1 = 0 \quad \text{या} \quad x - \sqrt{3} = 0 \\ \text{यानि} & x = 1, \quad \text{या} \quad x = \sqrt{3} \end{array}$$

अतः $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$ के शून्यक 1 और $\sqrt{3}$ हैं। अब शून्यकों का योग $= 1 + \sqrt{3}$

$$= \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा शून्यकों का गुणन} &= (1) \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

(vi) प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 4 &= 3x^2 + 3x - 4x - 4 \\ &= 3x(x + 1) - 4(x + 1) \\ &= (x + 1)(3x - 4) \end{aligned}$$

$3x^2 - x - 4$ का मान शून्य होगा जब $(x + 1)(3x - 4)$ का मान शून्य हो।

$$\begin{array}{ll} \text{अर्थात्} & x + 1 = 0 \quad \text{या} \quad 3x - 4 = 0, \\ \text{यानि} & x = -1 \quad \text{या} \quad x = \frac{4}{3} \end{array}$$

अतः $3x^2 - x - 4$ के शून्यक -1 और $\frac{4}{3}$ हैं।

अब, शून्यकों का योग $= -1 + \frac{4}{3} = \frac{-3+4}{3}$
 $= \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणन $= (-1)\left(\frac{4}{3}\right)$
 $= \frac{-4}{3} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अतः बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

प्रश्न 2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं

- (i) $-3, 2$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
 (iv) $0, \sqrt{5}$ (v) $4, 1$ (vi) $1, 1$

हल: (i) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

(i) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha + \beta = -3 = -\frac{b}{a}$

तथा $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

यदि $a = 1, b = -3$ तथा $c = 2$ हो, तो द्विघात बहुपद $x^2 + 3x + 2$ होगा। उत्तर

(ii) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha + \beta = \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{-b}{a}$

तथा $\alpha\beta = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 3, b = -3\sqrt{2}$ तथा $c = 1$ हो, तो द्विघात बहुपद $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ होगा। उत्तर

(iii) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha + \beta = -\frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$

तथा $\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 4, b = 1$ तथा $c = 1$ हो, तो द्विघात बहुपद $4x^2 + x + 1$ होगा।

उत्तर

(iv) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब
$$\alpha + \beta = 0 = \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$$

तथा
$$\alpha\beta = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1, b = 0$ तथा $c = \sqrt{5}$ हो, तो द्विघात बहुपद $x^2 - 0x + \sqrt{5}$ या $x^2 + \sqrt{5}$ होगा। उत्तर

(v) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब
$$\alpha + \beta = 4 = \frac{-b}{a}$$

तथा
$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1, b = -4$ तथा $c = 1$ हो, तो द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 1$ होगा। उत्तर

(vi) माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब
$$\alpha + \beta = 1 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-b}{a}$$

तथा
$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1, b = -1$ तथा $c = 1$ हो, तो द्विघात बहुपद $x^2 - x + 1$ होगा।
उत्तर

प्रश्न 3. यदि द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$f(x) = x^2 - 8x + k$$

माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब
$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\left(\frac{-8}{1}\right)$$

$$\alpha + \beta = 8$$

तथा
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k$$

दिया है-
$$\alpha^2 + \beta^2 = 40$$

या
$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40$$

मान रखने पर-

$$(8)^2 - 2 \times k = 40$$

$$\Rightarrow 64 - 40 = 2k$$

$$24 = 2k$$

या
$$k = \frac{24}{2} = 12 \text{ उत्तर}$$

Ex 3.2

प्रश्न 1. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके $f(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए

(i) $f(x) = 3x^2 + x^2 + 2x + 5$, $g(x) = 1 + 2x + x^2$

(ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

(iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $g(x) = x + 2$

(iv) $f(x) = 9x^4 - 4x^2 + 4$, $g(x) = 3x^2 + x - 1$

हल: (i) हम सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों की घटती हुई घातों के क्रम में व्यवस्थित करते हैं। यहाँ पर भाज्य पहले से ही मानक रूप में हैं तथा मानक रूप में भाजक $x^2 + 2x + 1$ है।

$$\begin{array}{r} 3x - 5 \\ x^2 + 2x + 1 \overline{) 3x^3 + x^2 + 2x + 5} \\ \underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} \\ -5x^2 - x + 5 \\ \underline{-5x^2 - 10x - 5} \\ 9x + 10 \end{array}$$

इसलिए भागफल $3x - 5$ तथा शेषफल $9x + 10$ होगा।

यहाँ— भागफल \times भाजक + शेषफल

$$\begin{aligned} & (3x - 5)(1 + 2x + x^2) + 9x + 10 \\ &= 3x + 6x^2 + 3x^3 - 5 - 10x - 5x^2 + 9x + 10 \\ &= 3x^3 + x^2 - 7x - 5 + 9x + 10 \\ &= 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ &= \text{भाज्य} \end{aligned}$$

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग सत्यापित होता है।

(ii) यहाँ भाज्य और भाजक दोनों मानक रूप में हैं। इसलिए हमें प्राप्त है।

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x^2 - 2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \\ \underline{x^3 - 2x} \\ -3x^2 + 7x - 3 \\ \underline{-3x^2 + 6} \\ 7x - 9 \end{array}$$

इसलिए भागफल $x - 3$ तथा शेषफल $7x - 9$ होगा।

यहाँ- भागफल \times भाजक + शेषफल

$$\begin{aligned} & (x - 3)(x^2 - 2) + 7x - 9 \\ &= x^3 - 2x - 3x^2 + 6 + 7x - 9 \\ &= x^3 - 3x^2 - 2x + 6 + 7x - 9 \end{aligned}$$

$$= x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

= भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग सत्यापित होता है।

(iii) यहाँ पर भाज्य और भाजक दोनों ही मानक रूप में हैं, हमें प्राप्त है।

$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 27 \\ x + 2 \overline{) x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -8x^2 + 11x - 6 \\ \underline{-8x^2 - 16x} \\ 27x - 6 \\ \underline{27x + 54} \\ -60 \end{array}$$

इसलिए भागफल $x^2 - 8x + 27$ तथा शेषफल -60 होगा।

यहाँ- भागफल \times भाजक + शेषफल

$$(x^2 - 8x + 27) \times (x + 2) - 60$$

$$= x^3 + 2x^2 - 8x^2 - 16x + 27x + 54 - 60$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

= भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग सत्यापित होता है।

(iv) यहाँ पर भाज्य और भाजक दोनों ही मानक रूप में हैं। हमें प्राप्त है।

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x \\ 3x^2 + x - 1 \overline{) 9x^4 - 4x^2 + 4} \\ \underline{9x^4 + 3x^3 - 3x^2} \\ -3x^3 - x^2 + 4 \\ \underline{-3x^3 - x^2 + x} \\ -x + 4 \end{array}$$

इसलिए भागफल $3x^2 - x$ तथा शेषफल $(-x + 4)$ होगा।

यहाँ- भागफल \times भाजक + शेषफल

$$(3x^2 - x) \times (3x^2 + x - 1) + (-x + 4)$$

$$= 9x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x^3 - x^2 + x - x + 4$$

$$= 9x^4 - 4x^2 + 4$$

= भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग सत्यापित होता है।

प्रश्न 2. पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि प्रथम बहुपद दूसरे बहुपद का एक गुणनखण्ड है

(i) $g(s) = x^2 + 3x + 1$, $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(ii) $g(t) = t^2 - 3$, $f(t) = 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(iii) $g(x) = x^3 - 3x + 1$, $f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

हल: (i) $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ को $x^2 + 3x + 1$ से भाग करने पर

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 4x + 2 \\
 x^2 + 3x + 1 \overline{) 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2} \\
 \underline{3x^4 + 9x^3 + 3x^2} \\
 -4x^3 - 10x^2 + 2x \\
 \underline{-4x^3 - 12x^2 - 4x} \\
 +2x^2 + 6x + 2 \\
 \underline{2x^2 + 6x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

चूँकि, शेषफल शून्य है, अतः $x^2 + 3x + 1$ बहुपद $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ को एक गुणनखण्ड है।
उत्तर

(ii) $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ को $t^2 - 3$ से भाग करने पर

$$\begin{array}{r}
 2t^2 + 3t + 4 \\
 t^2 - 3 \overline{) 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12} \\
 \underline{2t^4 - 6t^2} \\
 +3t^3 + 4t^2 - 9t - 12 \\
 \underline{3t^3 - 9t} \\
 +4t^2 - 12 \\
 \underline{4t^2 } \\
 +4t^2 - 12 \\
 \underline{-4t^2 + 12} \\
 0
 \end{array}$$

चूँकि, शेषफल शून्य है, अतः $t^2 - 3$ बहुपद $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखण्ड है। उत्तर

(iii) $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ बहुपद को $x^3 - 3x + 1$ से भाग करने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 1 \\
 x^3 - 3x + 1 \overline{) x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^5 + x^2} \\
 -4x^3 + 3x + 1 \\
 \underline{-x^3 + 3x - 1} \\
 +x^3 + 3x + 1 \\
 \underline{x^3 + 3x + 1} \\
 2
 \end{array}$$

यहाँ शेषफल 2 है अर्थात् शेषफल शून्य नहीं है अतः $x^3 - 3x + 1$ बहुपद $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ का गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

प्रश्न 3. निम्न बहुपदों के साथ उनके शून्यक दिये गये हैं, अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए

(i) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$

(ii) $f(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$; $2 \pm \sqrt{3}$

(iii) $f(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$; -2

हल: (i) चूँकि $x = \alpha$ एक बहुपद का शून्यक है, तो $(x - \alpha)$ बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड होता है।

चूँकि $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ बहुपद $f(x)$ के शून्यक हैं,

इसलिए $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$, बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब, हम $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के अन्य शून्यक ज्ञात करने के लिए इसको $g(x) = x^2 - 2$ से विभाजित करते हैं।

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x + 1 \\
 x^2 - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \\
 \underline{2x^4 - 4x^2} \\
 -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 \underline{-3x^3 + 6x} \\
 x^2 - 2 \\
 \underline{-x^2 + 2} \\
 0
 \end{array}$$

विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा-

$$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x^2 - 2x - x + 1)$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \{2x(x - 1) - 1(x - 1)\}$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 1)(2x - 1)$$

अतः दिये हुए बहुपद के शून्यक $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 1 और $\frac{1}{2}$ हैं।

अतः अन्य दो शून्यक 1 और $\frac{1}{2}$ हैं। उत्तर

(ii) चूँकि $x = \alpha$ एक बहुपद का शून्यक है, तो $(x - \alpha)$ बहुपद $f(x)$ का $f(x)$ गुणनखण्ड होता है।
चूँकि $(2 + \sqrt{3})$ और $(2 - \sqrt{3})$ बहुपद $f(x)$ के शून्यक हैं। इसलिए

$$(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})$$

अर्थात् $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$ का एक गुणनखण्ड है।

अब, हम $f(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के अन्य शून्यक ज्ञात करने के लिए इसको $g(x) = x^2 - 4x + 1$ से विभाजित करते हैं।

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 35 \\ x^2 - 4x + 1 \overline{) x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35} \\ \underline{x^4 - 4x^3 + \quad x^2} \\ -2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\ \underline{-2x^3 + 8x^2 - 2x} \\ -35x^2 + 140x - 35 \\ \underline{-35x^2 + 140x - 35} \\ 0 \end{array}$$

विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा-

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 &= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35) \\ &= (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x^2 - 2x - 35) \\ &= (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x - 7)(x + 5) \end{aligned}$$

अतः दिये हुए बहुपद के शून्यक $(2 + \sqrt{3})$, $(2 - \sqrt{3})$, 7 और -5 हैं।

अतः दी गई चार घात वाले बहुपद के अन्य शून्यक 7 और -5 हैं। उत्तर

(iii) चूँकि $x = \alpha$ एक बहुपद का, शून्यक है, तो $(x - \alpha)$ बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड होता है, इसलिए $(x + 2)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब, हम $f(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ के अन्य शून्यक ज्ञात करने के लिए इसको $g(x) = (x + 2)$ से विभाजित करते हैं।

$$\begin{array}{r} x^2 + 11x + 10 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 13x^2 + 32x + 20} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ 11x^2 + 32x + 20 \\ \underline{11x^2 + 22x} \\ 10x + 20 \\ \underline{10x + 20} \\ 0 \end{array}$$

विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा-

$$\begin{aligned} x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= (x + 2)(x^2 + 11x + 10) \\ \Rightarrow x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= (x + 2)\{x^2 + 10x + x + 10\} \\ \Rightarrow x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= (x + 2)\{x(x + 10) + 1(x + 10)\} \\ \Rightarrow x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= (x + 2)(x + 10)(x + 1) \end{aligned}$$

अतः दिये हुए बहुपद के शून्यक -2 , -10 और -1 हैं।

अतः बहुपद के अन्य शून्यक -10 और -1 हैं। उत्तर

प्रश्न 4. बहुपद $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ तथा शेषफल $r(x)$ क्रमशः $x-2$ और $-2x+4$ प्राप्त होता है तो बहुपद $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल: बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $(x-2)$ व शेषफल $-2x+4$ प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned} \therefore \text{भाज्य} &= \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ \text{या } g(x) \times (x-2) + (-2x+4) &= x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ \text{या } g(x) \times (x-2) &= x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 \\ \text{या } g(x) &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x-2} \quad \dots(i) \end{aligned}$$

अब, बहुपद $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ को $x-2$ से भाग देने पर

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ x-2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 3x - 2} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -x^2 + 3x \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

इस प्रकार समीकरण (i) से $g(x) = x^2 - x + 1$ प्राप्त होता है। उत्तर

Ex 3.3

प्रश्न 1. निम्न समीकरणों की जाँच कर बताइए कि क्या ये द्विघात समीकरण हैं-

(i) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(ii) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

(iii) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(iv) $x + \frac{1}{x} = x^2, x \neq 0$

हल: (i) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$$\Rightarrow x^2 + x + 8 = (x)^2 - (2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 8 = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x + 8 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x + 12 = 0$$

स्पष्टतः $x + 12$ एक रैखिक बहुपद है अर्थात् यह एक द्विघात बहुपद नहीं है। अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(i) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

$$\Rightarrow (x)^3 + (2)^3 + 3 \times x \times 2(x + 2) = x^3 - 4$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x(x + 2) = x^3 - 4$$

$$\Rightarrow 8 + 6x^2 + 12x = -4$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$$

स्पष्टतः $x^2 + 2x + 2$ एक द्विघात बहुपद है। अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(iii) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = -4x + 4$$

$$\Rightarrow 3x + 4x + 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 3 = 0$$

स्पष्टतः $7x - 3$ एक रैखिक बहुपद है अर्थात् यह एक द्विघात बहुपद नहीं है। अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(iv) $x + \frac{1}{x} = x^2, x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = x^2 \cdot x$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = x^3$$

$$\text{या } x^3 - x^2 + 1 = 0.$$

स्पष्टतः $x^3 - x^2 + 1$ एक तीन घात का बहुपद है अर्थात् यह एक द्विघात बहुपद नहीं है। अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

प्रश्न 2. गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न समीकरणों को हल कीजिए-

(i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

- (ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$
 (iii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$
 (iv) $x^2 - 8x + 16 = 0$
 (v) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{6}{x}$ जहाँ $x \neq 1, 2$
 (vi) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
 (vii) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$
 (viii) $x^2 + 8x + 7 = 0$
 (ix) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{3x-7}{2x-3}$
 (x) $4x^2 - 4a^2x + (a^4 - b^4) = 0$
 (xi) $abx^2 + (b^2 - ac)x - bc = 0$

हल:

(i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$
 $\Rightarrow 2x(x-1) - 3(x-1) = 0$
 $\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0$
 अर्थात् $x-1 = 0$ या $2x-3 = 0$
 अर्थात् $x = 1$ या $2x = 3$
 या $x = \frac{3}{2}$

अतः $x = 1, \frac{3}{2}$ समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के हल हैं।

(ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$
 $\Rightarrow 9x^2 - 6x + 3x - 2 = 0$
 $\Rightarrow 3x(3x-2) + 1(3x-2) = 0$
 $\Rightarrow (3x-2)(3x+1) = 0$
 अर्थात् $3x-2 = 0$ या $3x+1 = 0$
 अर्थात् $x = \frac{2}{3}$ या $x = \frac{-1}{3}$

अतः $x = \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}$ समीकरण $9x^2 - 3x - 2 = 0$ के हल हैं।

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{3}x^2 + 7x + 3x + 7\sqrt{3} = 0$
 $\Rightarrow x(\sqrt{3}x+7) + \sqrt{3}(\sqrt{3}x+7) = 0$
 $\Rightarrow (\sqrt{3}x+7)(x+\sqrt{3}) = 0$
 अर्थात् $\sqrt{3}x+7 = 0$ या $x+\sqrt{3} = 0$
 अर्थात् $\sqrt{3}x = -7$ या $x = -\sqrt{3}$
 अर्थात् $x = \frac{-7}{\sqrt{3}}$ और $x = -\sqrt{3}$

अतः $x = \frac{-7}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}$ समीकरण $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$ के हल हैं।

$$(iv) x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 4x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) - 4(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 4) = 0$$

$$\text{अर्थात् } x - 4 = 0 \quad \text{या} \quad x = 4$$

यहाँ पर समीकरण के मूल समान हैं। अतः $x = 4$, 4 समीकरण $x^2 - 8x + 16 = 0$ के हल हैं।

$$(v) \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{6}{x} \quad \text{जहाँ } x \neq 1, 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-1+2(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1+2x-4}{(x-2)(x-1)} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-5}{(x-2)(x-1)} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow x(3x-5) = 6(x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x = 6(x^2 - 3x + 2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x = 6x^2 - 18x + 12$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 - 3x^2 + 5x = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 13x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x - 4x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-4) = 0$$

$$\text{अर्थात् } x - 3 = 0 \quad \text{या} \quad 3x - 4 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{या} \quad 3x = 4$$

$$\text{या} \quad x = \frac{4}{3}$$

अतः $x = 3, \frac{4}{3}$ समीकरण $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{6}{x}$ जहाँ $x \neq 1, 2$ के हल हैं।

$$(vi) 100x^2 - 20x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (10x - 1)(10x - 1) = 0$$

$$\text{अर्थात् } 10x - 1 = 0 \quad \text{या} \quad 10x - 1 = 0$$

$$\text{या} \quad 10x = 1 \quad \text{या} \quad x = \frac{1}{10}$$

या $x = \frac{1}{10}$

यहाँ पर समीकरण के मूल समान हैं।

अतः $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ समीकरण $100x^2 - 20x + 1 = 0$ के हल हैं।

(vii) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}x)^2 - 2 \times \sqrt{3}x \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2 = 0$$

दोनों तरफ वर्गमूल लेने पर

अब $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ हो तो

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ या } \sqrt{\frac{2}{3}}$$

यहाँ पर समीकरण के दोनों मूल समान हैं।

अतः $x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ समीकरण $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के हल हैं।

(viii) $x^2 + 8x + 7 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + x + 7$$

$$\Rightarrow x(x + 7) + 1(x + 7)$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 1)$$

अर्थात् $x + 7 = 0$ या $x + 1 = 0$

अर्थात् $x = -7$ या $x = -1$

अतः $x = -7, -1$ समीकरण $x^2 + 8x + 7 = 0$ के हल हैं।

(ix) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{3x-7}{2x-3}$

$$\Rightarrow (x + 3)(2x - 3) = (x + 2)(3x - 7)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 6x - 9 = 3x^2 - 7x + 6x - 14$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 3x^2 - x - 14$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 - 3x^2 + x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0$$

या $-(x^2 - 4x - 5) = 0$

या $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

अर्थात् $x - 5 = 0$ या $x + 1 = 0$

या $x = 5$ या $x = -1$

अतः $x = -1, 5$ समीकरण $\frac{x+3}{x+2} = \frac{3x-7}{2x-3}$ के हल हैं।

$$(x) 4x^2 - 4a^2x + (a^4 - b^4) = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2 - a^2x + \frac{a^4 - b^4}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2x + \frac{a^4 - b^4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2x + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{2a^2}{2}\right)x + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2}\right)x + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)x - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)x + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x\left(x - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)\right) - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)\left(x - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)\right) = 0$$

$$\text{अर्थात् } x - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right) = 0 \quad \text{या } x - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) = 0$$

$$\text{अर्थात् } x = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{या } x = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

अतः $x = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right), \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)$ समीकरण $4x^2 - 4a^2x + a^4 - b^4 = 0$ के हल हैं।

$$(xi) abx^2 + (b^2 - ac)x - bc = 0$$

$$\Rightarrow abx^2 + b^2x - acx - bc = 0$$

$$\Rightarrow bx(ax + b) - c(ax + b) = 0$$

$$\Rightarrow (ax + b)(bx - c) = 0$$

$$\text{अर्थात् } ax + b = 0 \quad \text{या } bx - c = 0$$

$$\text{अर्थात् } ax = -b \quad \text{या } x = \frac{c}{b}$$

$$\therefore x = \frac{-b}{a}$$

अतः $x = \frac{-b}{a}, \frac{c}{b}$ समीकरण $abx^2 + (b^2 - ac)x - bc = 0$ के हल हैं।

Ex 3.4

प्रश्न 1. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(ii) $5x^2 - 6x - 2 = 0$

(iii) $4x^2 + 3x + 5 = 0$

(iv) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

(v) $2x^2 + x - 4 = 0$

(vi) $2x^2 + x + 4 = 0$

(vii) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

हल: (i) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\text{या } 3x^2 - 5x = -2$$

$$\text{या } x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$$

(चूँकि पूर्ण वर्ग बनाने के लिए " का गुणांक इकाई होना चाहिए)

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ते हैं।

$$\text{या } x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{5}{6}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{36}} = \pm\frac{1}{6}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{या } x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल हैं $1, \frac{2}{3}$ उत्तर

(ii) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$5x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$\text{या } 5x^2 - 6x = 2$$

$$\text{या } x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$$

चूँकि पूर्ण वर्ग बनाने के लिए 2 का गुणांक इकाई होना चाहिए।

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ते हैं।

$$\text{या } x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{10+9}{25}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\text{या } \left(x - \frac{3}{5}\right) = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} = \frac{\pm\sqrt{19}}{5}$$

$$\text{या } x = \pm\frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = +\frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{19}+3}{5}$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = -\frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-\sqrt{19}+3}{5}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल $\frac{\sqrt{19}+3}{5}$, $\frac{-\sqrt{19}+3}{5}$

$$\text{या } \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5} \text{ उत्तर}$$

(iii) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$4x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$\text{या } 4x^2 + 3x = -5$$

$$\text{या } x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

चूँकि पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $\frac{3}{4}$ को गुणांक इकाई होना चाहिए।

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ते हैं।

या $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$

या $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-80+9}{64}$

या $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$

∴ किसी संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता इसलिए $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 \cdot x$ के किसी भी वास्तविक मान के लिए ऋणात्मक नहीं हो सकता। इसलिए यहाँ x का कोई भी वास्तविक मान नहीं है जो दी गई द्विघात समीकरण को सन्तुष्ट करता हो।

अतः दिये गये समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं है। अतः समीकरण के मूलों का अस्तित्व नहीं है।
उत्तर

(iv) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

या $4x^2 + 4\sqrt{3}x = -3$

या $x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{4}x = \frac{-3}{4}$

(x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर)

या $x^2 + \sqrt{3}x = \frac{-3}{4}$

या $x^2 + \sqrt{3}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

(पूर्ण वर्ग बनाने पर)

या $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4}$

(बायाँ पक्ष पूर्ण वर्ग बन गया है)

या $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$

या $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

अर्थात् $x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

या $x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

या $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः, दी गई समीकरण के मूल $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ और $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ हैं। उत्तर

(v) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$2x^2 + x - 4 = 0$$

या $2x^2 + x = 4$

या $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{4}{2}$

(x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर)

या $x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

(पूर्ण वर्ग बनाने पर)

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \frac{1}{16}$

(बायाँ पक्ष पूर्ण वर्ग बन गया है)

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{32+1}{16}$

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$

या $\left(x + \frac{1}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{33}{16}} = \frac{\pm\sqrt{33}}{\sqrt{16}}$

या $\left(x + \frac{1}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

स्थिति I. धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

या $x = \frac{\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4}$

या $x = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$

स्थिति II. ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x + \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{33}}{4}$$

या $x = -\frac{\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4}$

या $x = \frac{-\sqrt{33}-1}{4}$

अतः, दी गई द्विघात समीकरण के मूल हैं- $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ और $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ उत्तर

(vi) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$2x^2 + x + 4 = 0$$

या $2x^2 + x = -4$

या $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{-4}{2}$

(x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर)

या $x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$
(पूर्ण वर्ग बनाने पर)

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -2 + \frac{1}{16}$
(बायाँ पक्ष पूर्ण वर्ग बन गया है)

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-32+1}{16}$

या $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-31}{16} < 0$

∴ किसी संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता। इसलिए, $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot x$ के किसी भी वास्तविक मान के लिए ऋणात्मक नहीं हो सकता।

∴ यहाँ x का कोई भी वास्तविक मान नहीं है जो दी गई द्विघात समीकरण को सन्तुष्ट करता हो।

अतः, दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

अतः समीकरण के मूलों का अस्तित्व नहीं है। उत्तर

(vii) प्रश्नानुसार द्विघात समीकरण है-

$$4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$$

x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर

$$\Rightarrow x^2 + bx - \left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right) = 0$$

[दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करने पर]

$$\Rightarrow x^2 + bx = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{या} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{या} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \pm \frac{a}{2}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x + \frac{b}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{या} \quad x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$\left(x + \frac{b}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

$$\text{या} \quad x = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = -\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{अतः} \quad x = \frac{-b-a}{2}, \frac{a-b}{2}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल $-\left(\frac{a+b}{2}\right)$ और $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ हैं। उत्तर

प्रश्न 2. निम्न द्विघात समीकरणों के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए—

(i) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

(ii) $9x^2 + 1 - 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

(iv) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(v) $x^2 + 4x + 5 = 0$

(vi) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

हल:

(i) दी गई द्विघात समीकरण

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ से करने पर}$$

$$a = 2, b = -2\sqrt{2} \text{ तथा } c = 1$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } b^2 - 4ac &= (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 \\ &= 4 \times 2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

यहाँ पर $b^2 - 4ac = 0$ है। अतः मूल वास्तविक होंगे समान होंगे।
श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{अतः } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

$$(ii) 9x^2 + 7x - 2 = 0$$

दी गई द्विघात समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$$a = 9, b = 7 \text{ तथा } c = -2$$

$b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (7)^2 - 4 \times 9 \times (-2) \\ &= 49 + 72 = 121 \end{aligned}$$

अतः मूल वास्तविक होंगे अतः a, b, c के मान श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 9} = \frac{-7 \pm 11}{18}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-7 + 11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-7-11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

अतः $x = \frac{2}{9}$, -1 दी गई द्विघात समीकरण के मूल हैं। उत्तर

(iii) दी गई द्विघात समीकरण

$$x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$$

या $\frac{x^2+1}{x} = 3$

या $x^2 - 3x + 1 = 0$

अतः $a = 1, b = -3, c = 1$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 9 - 4 = 5 > 0 \end{aligned}$$

अतः मूल वास्तविक है।

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

स्थिति I. धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

स्थिति II. ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

अतः दी गई समीकरण के मूल $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ हैं। उत्तर

(iv) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

अतः $a = \sqrt{2}, b = 7, c = 5\sqrt{2}$

$b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (7)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \\ &= 49 - 40 = 9 > 0 \end{aligned}$$

अतः मूल वास्तविक है।

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{-7 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर-

$$x = \frac{-7+3}{2\sqrt{2}} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-7-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-10}{2\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल $x = -\sqrt{2}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ हैं। उत्तर

$$(v) x^2 + 4x + 5 = 0$$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$

$$\therefore a = 1, b = 4, c = 5$$

$b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर-

$$(4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

यहाँ पर $b^2 - 4ac$ का मान ऋणात्मक प्राप्त हो रहा है। अतः द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं। अर्थात् मूल काल्पनिक हैं।

$$(vi) \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x = 0, 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{x^2-2x} = 3$$

$$\Rightarrow -2 = 3(x^2 - 2x)$$

$$\Rightarrow -2 = 3x^2 - 6x$$

$$\text{या } 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

अतः स्पष्ट है $-a = 3, b = -6$ तथा $c = 2$

$b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर-

$$(-6)^2 - 4 \times 3 \times 2$$

⇒ $36 - 24 = 12 > 0$ अतः मूल वास्तविक होंगे।
श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

अतः

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ होंगे।

प्रश्न 3. दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिये जिनके वर्गों का योग 290 हो।

हल: माना पहला क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक = x
इसका अगला क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक = $(x + 2)$

प्रश्नानुसार $x^2 + (x + 2)^2 = 290$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 290 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\text{या } 2(x^2 + 2x - 143) = 0$$

$$\text{या } x^2 + 2x - 143 = \frac{0}{2} = 0$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

अतः $a = 1, b = 2$ तथा $c = -143$

$b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$(2)^2 - 4 \times 1 \times (-143)$$

$$\Rightarrow 4 + 572 = 576$$

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-2+24}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-2-24}{2} = -\frac{26}{2} = -13$$

परन्तु x एक धनात्मक विषम पूर्णांक दिया है। अतः $x = 11$ होगा, क्योंकि $x \neq -13$ अतः दोनों क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक 11 और 13 हैं। उत्तर

प्रश्न 4. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 45 है तथा छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का चार गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना बड़ी संख्या x है, तब

छोटी संख्या का वर्ग = $4x$

और बड़ी संख्या का वर्ग = x^2

संख्याओं के वर्गों का अन्तर 45 दिया है।

इसलिए $x^2 - 4x = 45$

$$x^2 - 4x - 45 = 0$$

अतः स्पष्ट है कि $a = 1$, $b = -4$ तथा $c = -45$ $b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-45)$$

$$= 16 + 180 = 196$$

तब श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm 14}{2}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{4+14}{2} = 9$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{4-14}{2} = -5$$

अतः बड़ी संख्या = 9,

छोटी संख्या का वर्ग = $4 \times 9 = 36$

इसलिए छोटी संख्या = ± 6 .

अतः संख्यायें 9, 6 तथा 9, -6 हैं। उत्तर

प्रश्न 5. 16 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित कीजिये कि बड़े भाग के वर्ग का दो गुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

हल: माना x बड़ा भाग है। तब छोटा भाग = $16 - x$

प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} 2x^2 &= (16 - x)^2 + 164 \\ &= 2x^2 - (16 - x)^2 = 164 \\ &= 2x^2 - 256 + 32x - 2 = 164 \\ &= x^2 + 32x - 420 = 0 \end{aligned}$$

अतः स्पष्ट है $a = 1$, $b = 32$ तथा $c = -420$

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर-

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 + 4 \times 1 \times 420}}{2 \times 1} \\ x &= \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 1680}}{2 \times 1} \\ x &= \frac{-32 \pm \sqrt{2704}}{2} = \frac{-32 \pm 52}{2} \end{aligned}$$

स्थिति I : धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-32 + 52}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

स्थिति II : ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-32 - 52}{2} = \frac{-84}{2} = -42$$

धनात्मक मान लेने पर

$$\left. \begin{aligned} \text{अतः बड़ा भाग} &= 10 \\ \text{छोटा भाग} &= 16 - 10 = 6 \end{aligned} \right\}$$

अतः दो संख्यायें 10, 6 हैं। उत्तर

Ex 3.5

प्रश्न 1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए-

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(ii) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

(iii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iv) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(v) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

(vi) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

हल: (i) दिया हुआ समीकरण है-

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

यहाँ पर $a = 2$, $b = -3$ और $c = 5$ है।

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$$

$$D = 9 - 40 = -31 < 0$$

अतः समीकरण के वास्तविक मूल नहीं हैं। उत्तर

(ii) दिया हुआ समीकरण है-

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

यहाँ पर $a = 2$, $b = -4$ और $c = 3$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$$

$$D = 16 - 24 = -8 < 0$$

अतः समीकरण के वास्तविक मूल नहीं हैं। उत्तर

(iii) दिया हुआ समीकरण है-

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

यहाँ पर $a = 2$, $b = 1$ और $c = -1$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1)$$

$$D = 1 + 8 = 9 > 0$$

इसलिए दी गई द्विघात समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल हैं। उत्तर

(iv) दिया हुआ समीकरण है-

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

यहाँ पर $a = 1$, $b = -4$ और $c = 4$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$= 16 - 16 = 0$$

$$\text{अतः } D = 0$$

अतः मूल वास्तविक एवं बराबर हैं। उत्तर

(v) दिया हुआ समीकरण है-

$$2x^2 + 5x + 5 = 0$$

यहाँ पर $a = 2$, $b = 5$ और $c = 5$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times 5$$

$$D = 25 - 40 = -15 < 0$$

अतः समीकरण के वास्तविक मूल नहीं हैं। उत्तर

(vi) दिया हुआ समीकरण है-

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

यहाँ पर $a = 3$, $b = -2$ और $c = \frac{1}{3}$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

अतः समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हैं। उत्तर

प्रश्न 2. निम्न द्विघात समीकरण में k का वह मान ज्ञात कीजिए कि उसके मूल वास्तविक तथा बराबर हों।

(i) $kx(x - 2) + 6 = 0$

(ii) $x^2 - 2(k + 1)x + k^2 = 0$

(iii) $2x^2 + kx + 3 = 0$

(iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

(v) $k + 4)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$

(vi) $kx^2 - 5x + k = 0$

हल: (i) दिया हुआ समीकरण है-

$$kx(x - 2) + 6 = 0$$

$$\text{या } kx^2 - 2kx + 6 = 0$$

यहाँ पर $a = k$, $b = -2k$ और $c = 6$ हैं।

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-2k)^2 - 4 \times k \times 6$$

$$D = 4k^2 - 24k$$

दिये हुए समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे, यदि $D = 0$ हो।

$$\text{अर्थात् } 4k^2 - 24k = 0$$

$$\Rightarrow 4k(k - 6) = 0$$

अर्थात् $k = 0$ या $k = 6$

अतः समीकरण के मूल बराबर होने के लिए $k = 6$ होना चाहिये क्योंकि $k = 0$ प्रतिबन्धित होता है। उत्तर

(ii) दिया हुआ समीकरण है-

$$x^2 - 2(k + 1)x + k^2 = 0$$

यहाँ पर $a = 1$, $b = -2(k + 1)$ और $c = k^2$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-2(k + 1))^2 - 4 \times 1 \times k^2$$

$$D = 4(k + 1)^2 - 4k^2$$

$$= 4(k^2 + 2k + 1) - 4k^2$$

$$= 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 = 8k + 4$$

दिये हुए समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे, यदि $D = 0$ हो।

$$\text{अर्थात् } 8k + 4 = 0 \text{ या } 8k = -4$$

$$\text{या } k = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ उत्तर}$$

(iii) दिया हुआ समीकरण है-

$$2x^2 + kx + 3 = 0$$

यहाँ पर $a = 2$, $b = k$ और $c = 3$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \times 2 \times 3$$

$$D = k^2 - 24$$

दिये हुए समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे, यदि $D = 0$

$$\text{या } k^2 - 24 = 0$$

$$\text{या } k = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

अतः मूल बराबर होने के लिये $k = -2\sqrt{6}$ या $k = 2\sqrt{6}$ होना चाहिये।

(iv) दिया हुआ समीकरण है-

$$(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$$

यहाँ पर $a = (k + 1)$, $b = -2(k - 1)$ और $c = 1$

$$\therefore D = b^2 - 4ac$$

$$= (-2k - 1)^2 - 4 \times (k + 1) \times 1$$

$$= 4(k - 1)^2 - 4(k + 1)$$

$$= 4(k^2 - 2k + 1) - 4k - 4$$

$$= 4k^2 - 8k + 4 - 4k - 4$$

$$= 4k^2 - 12k$$

दिये हुए समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे,

$$\text{यदि } D = 0 \text{ या } 4k^2 - 12k = 0$$

$$4k(k - 3) = 0$$

$$\text{अर्थात् } k = 0 \text{ या } k = 3$$

$$\text{अतः } k = 0, 3$$

अतः समीकरण के मूल बराबर होने के लिए $k = 3$ होना चाहिये क्योंकि $k = 0$ प्रतिबन्धित होता है।

(v) दिया हुआ समीकरण है-

$$(k + 4)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$$

यहाँ पर $a = k + 4$, $b = k + 1$ और $c = 1$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (k + 1)^2 - 4 \times (k + 4) \times 1$$

$$D = k^2 + 2k + 1 - 4k - 16$$

$$D = k^2 - 2k - 15$$

दिये हुए समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे यदि $D = 0$ हो।

$$\text{अर्थात् } k^2 - 2k - 15 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 3k - 15 = 0$$

$$\Rightarrow k(k - 5) + 3(k - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (k - 5)(k + 3) = 0$$

$$\text{अर्थात् } k - 5 = 0 \text{ या } k + 3 = 0$$

$$\text{अर्थात् } k = 5 \text{ या } k = -3$$

$$\text{अतः } k = -3, 5 \text{ उत्तर}$$

(vi) दिया हुआ समीकरण है-

$$kx^2 - 5x + k = 0$$

यहाँ पर $a = k$, $b = -5$ और $c = k$

इसलिए $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times k \times k$

$D = 25 - 4k^2$ दिये गये द्विघात समीकरण के वास्तविक और समान मूल होंगे यदि $D = 0$ हो

अर्थात् $25 - 4k^2 = 0 \Rightarrow 4k^2 = 25$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm \frac{5}{2}$$

अतः $k = \frac{5}{2}, \frac{-5}{2}$ उत्तर

प्रश्न 3. k के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल वास्तविक व भिन्न हों-

(i) $kx^2 + 2x + 1 = 0$

(ii) $kx^2 + 6x + 1 = 0$

(iii) $x^2 - kx + 9 = 0$

हल: (i) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$kx^2 + 2x + 1 = 0$$

यहाँ पर $a = k$, $b = 2$ और $c = 1$

माना इस समीकरण का विविक्तकरे D है।

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times k \times 1$$

$$D = 4 - 4k$$

\therefore द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न हैं। इसके लिए $D > 0$ होना चाहिए।

$$\text{अर्थात् } 4 - 4k > 0$$

$$\text{या } 4 > 4k$$

$$\text{या } 4k < 4 \text{ या } k < 1$$

अतः k का मान 1 से कम होगा। उत्तर

(ii) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$kx^2 + 6x + 1 = 0$$

यहाँ पर $a = k$, $b = 6$ और $c = 1$

माना इस समीकरण का विविक्तकरे D है।

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times k \times 1$$

$$D = 36 - 4k$$

\therefore द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न हैं। इसके लिए $D > 0$ होना चाहिए।

$$\text{अर्थात् } 36 - 4k > 0$$

$$\text{या } 36 > 4k \text{ या } 4k < 36$$

या $k < 9$

अतः k का मान 9 से कम होगा। उत्तर

(iii) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$x^2 + kx + 9 = 0$$

यहाँ पर $a = 1$, $b = -k$ और $c = 9$

माना इस समीकरण का विविक्तकर D है।

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \times 1 \times 9$$

$$D = k^2 - 36$$

\therefore द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न हैं। इसके लिए $D > 0$ होना चाहिए।

$$\text{अर्थात् } k^2 - 36 > 0$$

$$\text{अर्थात् } (k - 6)(k + 6) > 0$$

स्थिति I: यदि $k - 6 > 0$, और $k + 6 > 0$

$$\text{तब } k > 6 \dots\dots(i)$$

$$\text{और } k > -6 \dots\dots(ii)$$

स्थिति II: यदि $k - 6 < 0$ और $k + 6 < 0$

$$\text{तब } k < 6 \dots\dots(iii)$$

$$\text{और } k < -6 \dots\dots(iv)$$

स्थिति I तथा II से स्पष्ट है कि द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न होंगे यदि $k < -6$ या $k > 6$

अतः k का मान 6 से बड़ा या -6 से छोटा होगा। उत्तर

प्रश्न 4. k के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^2 + 5kx + 16 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं हों।

हल: दिया गया द्विघात का समीकरण है-

$$x^2 + 5kx + 16 = 0$$

यहाँ पर $a = 1$, $b = 5k$ और $c = 16$

$$\text{विविक्तकर } D = b^2 - 4ac = (5k)^2 - 4 \times 1 \times 16$$

$$D = 25k^2 - 64$$

यदि मूल वास्तविक नहीं हैं इसके लिए $D < 0$ होना चाहिए अर्थात्

$$25k^2 - 64 < 0$$

$$\Rightarrow (5k)^2 - (8)^2 < 0$$

$$(5k + 8)(5k - 8) < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{स्थिति I : यदि } 5k + 8 > 0 \text{ अर्थात् } K > \frac{-8}{5} \\ \text{और } 5k - 8 < 0 \text{ अर्थात् } K < \frac{8}{5} \end{array} \right\} \dots(i)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{स्थिति II : यदि } 5k + 8 < 0 \text{ अर्थात् } K < \frac{-8}{5} \\ \text{और } 5k - 8 > 0 \text{ अर्थात् } K > \frac{8}{5} \end{array} \right\} \dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि K का मान निम्न स्थिति का होगा-

$$\frac{-8}{5} < K < \frac{8}{5} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. यदि द्विघात समीकरण $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ के मूल वास्तविक व बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि $2b = a + c$

हल: दिया गया द्विघात का समीकरण

$$(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$

यहाँ पर $A = b - c$, $B = c - a$, $C = a - b$

मूल वास्तविक व बराबर हैं। अतः इसके लिए

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$\text{अर्थात् } (c - a)^2 - 4 \times (b - c) \times (a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (c - a)^2 - 4(b - c)(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow c^2 - 2ac + a^2 - 4(ab - b^2 - ac + bc) = 0$$

$$\Rightarrow c^2 - 2ac + a^2 - 4ab + 4b^2 + 4ac - 4bc = 0$$

$$\Rightarrow c^2 + a^2 + 2ac + 4b^2 - 4ab - 4bc = 0$$

$$\Rightarrow c^2 + a^2 + 2ac - 4b(a + c) + (2b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c + a)^2 - 2 \times (c + a) \times 2b + (2b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c + a - 2b)^2 = 0$$

दोनों तरफ र्गमूल लेने पर

$$\Rightarrow c + a - 2b = 0$$

$$2b = a + c \text{ इति सिद्धम्}$$

Ex 3.6

प्रश्न 1. निम्नलिखित व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए-

(i) $24x^2yz$ और $27x^4y^2z^2$

(ii) $x^2 - 3x + 2$ और $x^4 + x^3 - 6x^2$

(iii) $2x^2 - 8$ और $x^2 - 5x + 6$

- (iv) $x^2 - 1$; $(x^2 + 1)(x + 1)$ तथा $x^2 + x - 1$
 (v) $18(6x^4 + x^3 - x^2)$ और $45(2x^6 + 3x^5 + x^4)$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक

$$n(x) = 24x^2yz$$

$$\text{तथा } v(x) = 27x^4y^2z^2 \text{ हैं।}$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 3 \times x^2 y \times 2$$

$$\text{तथा } v = \underline{3 \times 3 \times 3} \times x^4 \times y^2 \times z^2$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (Common multiple)

$$= 2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^2 \times z^2 \text{ [उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल]}$$

$$= 8 \times 27 \times x^4 \times y^2 \times 2z^2$$

$$= 216x^4y^2z^2$$

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

अर्थात् LCM = $216x^4y^2z^2$ उत्तर

(ii) $x^2 - 3x + 2$ और $x^4 + x^3 - 6x^2$

$$\text{माना } u(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{तथा } v(x) = x^4 + x^3 - 6x^2$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$v = x^4 + x^3 - 6x^2 = (x^2 + x - 6)$$

$$= x^2(x + 3)(x - 2)$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (Common multiple)

$$= x^2(x - 1)(x - 2)(x + 3) \text{ [उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल]}$$

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों को अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

अर्थात् LCM = $x^2(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ उत्तर

(iii) माना $u(x) = 2x^2 - 8$

$$\text{तथा } v(x) = x^2 - 5x + 6$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = 2x^2 - 8$$

$$= (x^2 - 4) = 2[(x)^2 - (2)^2]$$

$$= 2(x + 2)(x - 2)$$

$$v = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (Common multiple)

$$= 2(x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

$$= 2(x^2 - 4)(x - 3) \text{ [उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल]}$$

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

अर्थात् LCM = $2(x^2 - 4)(x - 3)$ उत्तर

(iv) माना दिये गये व्यंजक

$$u(x) = x^2 - 1$$

$$v(r) = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$\text{तथा } w(x) = x^2 + x - 1$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$v = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$w = x^2 + x - 1$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (Common multiple)

$$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1 - 1) \text{ [उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल]}$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x - 1)$$

$$= [(x^4 - 1)(x^2 + x - 1)]$$

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

$$\text{अर्थात् LCM} = (x^4 - 1)(x^2 + x - 1) \text{ उत्तर}$$

(v) माना दिये गये व्यंजक

$$u(r) = 18(6x^4 + x^3 - x^2)$$

$$\text{तथा } v(x) = 45(2x^6 + 3x^5 + x^4)$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = 18(6x^4 + x^3 - x^2)$$

$$= 18x^2(6x^2 + x - 1)$$

$$= 18x^2\{6x^2 + 3x - 2x - 1\}$$

$$= 18^2\{3(2x + 1) - 1(2x + 1)\}$$

$$= 18x^2(2x + 1)(3x - 1)$$

$$= 2^{12} \times 3^2 \times x(2x + 1)(3x - 1)$$

$$v = 45(2x^6 + 3x^5 + x^4)$$

$$= 45x^4(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= 3^2 \times 5^1 \times x^4(2x^2 + 2x + x + 1)$$

$$= 3^2 \times 5^1 \times x^4(2x(x + 1) + 1(x + 1))$$

$$= 3^2 \times 5^1 \times x^4 \times (x + 1) \times (2x + 1)$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (Common multiple)

$$= 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times x^4 \times (x + 1)(2x + 1)(3x - 1)$$

$$= 2 \times 9 \times 5 \times x^4 \times (x + 1)(2x + 1)(3 - 1)$$

$$= 90x^4(x + 1)(2x + 1)(3x - 1) \text{ [उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल]}$$

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

$$\text{अर्थात् LCM} = 90x^4(x + 1)(2x + 1)(3x - 1) \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए-

(i) a^3b^4, ab^5, a^2b^8

(ii) $16x^2y^2, 48x^4z$

(iii) $x^2 - 7x + 12; x^2 - 10x + 21$ तथा $x^2 + 2x - 15$

(iv) $(x + 3)^2(x - 2)$ और $(x + 3)(x - 2)^2$

(v) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ और $20(6x^6 + 3x^5 + x^4)$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक

$$u = a^3b^4$$

$$v = ab^5$$

$$\text{तथा } w = a^2b^8$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = a^3 \times b^4$$

$$v = a \times b^5$$

$$\text{तथा } w = a^2 \times b^8$$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक

$$= a \times b^4$$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = ab^4 है।

(ii) माना दिये गये व्यंजक

$$u = 16x^2y^2$$

$$\text{तथा } v = 48x^4z$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y$$

$$= 2^4 \times x^2 \times y^2$$

$$v = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times x \times z$$

$$= 2^4 \times 3^1 \times x^4 \times z^2$$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक = $2^4 \times x^2 = 16x^2$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $16x^2$ है।

(iii) माना दिये गये व्यंजक

$$u = x^2 - 7x + 12$$

$$v = x^2 - 10x + 21$$

$$\text{तथा } w = x^2 + 2x - 15$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = x^2 - 7x + 12$$

$$= (x - 3)(x - 4)$$

.....(i)

$$v = x^2 - 10x + 21$$

$$= (x - 3)(x - 7)$$

.....(ii)

$$\text{तथा } w = x^2 + 2x - 15$$

$$= (x + 5)(x - 3)$$

.....(iii)

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक = $(x - 3)$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $(x - 3)$ है।

(iv) माना दिये गये व्यंजक

$$u = (x + 3)^2 (x - 2)$$

$$\text{तथा } v = (x + 3) (x - 2)^2$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = (x + 3)^2 (x - 2) = (x + 3) \times (x + 3) \times (x - 2)$$

$$v = (x + 3) (x - 2)^2 = (x + 3) \times (x - 2) \times (x - 2)$$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक = $(x + 3) (x - 2)$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $(x + 3) (x - 2)$ उत्तर

(v) माना दिये गये व्यंजक

$$u = 24(6x^4 - x^2 - 2x^2)$$

$$\text{तथा } v = 20(6x^6 + 3x^2 + x)$$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u = 24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$$

$$= 24x^2(6x^2 - x - 2)$$

$$= 24x^2(6x^2 - 4x + 3x - 2)$$

$$= 24x^2[2x(3x - 2) + 1(3x - 2)]$$

$$= 24x^2(3x - 2)(2x + 1)$$

$$u = 2^3 \times 3 \times x^2 \times (3x - 2)(2x + 1) \quad \dots(i)$$

$$v = 20(6x^6 + 3x^5 + x^4)$$

$$= 20x^4(6x^2 + 3x + 1)$$

$$v = 2^2 \times 5 \times x^4(6x^2 + 3x + 1) \quad \dots(ii)$$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक = $2^2 \times x^2 = 4x$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $4x^2$ उत्तर

प्रश्न 3. यदि $u(x) = (x - 1)^2$ तथा $v(x) = (x^2 - 1)$ हो तो सम्बन्ध $LCM \times HCF = u(x) \times v(x)$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल: दिया है-

$$u(x) = (x - 1)^2$$

$$v(x) = (x^2 - 1)$$

अतः गुणनखण्डन के रूप में लिखने पर

$$u = (x - 1) \times (x - 1) \quad \dots(i)$$

$$v = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से HCF तथा LCM लिखने पर

$$HCF = (x - 1)$$

$$LCM = (x - 1) \times (x - 1) \times (x + 1)$$

$$= (x - 1) \times (x + 1) = (x - 1)^2 (x + 1)$$

हमें सम्बन्ध की जाँच करनी है।

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = u(x) \times v(x)$$

$$\rightarrow \text{LHS} = \text{LCM} \times \text{HCF} = (x - 1)^2 (x + 1) \times (x - 1)$$

$$= (x - 1)^3 (x + 1)$$

$$\text{RHS} = u(x) \times v(x) = (x - 1)^2 \times (x - 1)$$

$$= (x - 1)^2 \times (x - 1) \times (x + 1)$$

$$= (x - 1)^3 (x + 1)$$

$$\text{अतः LHS} = \text{RHS}$$

$$\text{अर्थात् LCM} \times \text{HCF} = u(x) \times v(x)$$

अतः सत्यापन की जाँच पूरी होती है।

प्रश्न 4. दो व्यंजकों का गुणनफल $(x - 7)(x^2 + 8x + 12)$ है। यदि इन व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF), $(x + 6)$ है तो इनका लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-दो व्यंजकों का गुणनफल $= (x - 7)(x^2 + 8x + 12)$

$$(\text{HCF}) = (x + 6)$$

$$\text{LCM} = ?$$

हम जानते हैं-

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = f(x) \times g(x)$$

$$\text{अर्थात् LCM} \times \text{HCF} = \text{दो व्यंजकों का गुणनफल}$$

$$\therefore \text{LCM} = \frac{\text{दो व्यंजकों का गुणनफल}}{\text{HCF}}$$

$$= \frac{(x - 7)(x^2 + 8x + 12)}{(x + 6)}$$

$$= \frac{(x - 7)\{x^2 + 6x + 2x + 12\}}{(x + 6)}$$

$$= \frac{(x - 7)\{x(x + 6) + 2(x + 6)\}}{(x + 6)}$$

$$= \frac{(x - 7)(x + 6)(x + 2)}{(x + 6)}$$

$$= (x - 7)(x + 2) = x^2 - 5x - 14$$

अतः अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक (LCM) $= x^2 - 5x - 14$ उत्तर

प्रश्न 5. दो द्विघातीय व्यंजकों का HCF एवं LCM क्रमशः $(x - 5)$ तथा $x^3 - 19x - 30$ है तो दोनों व्यंजकों को ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है- HCF = $(x - 5)$

LCM = $x^2 - 19x - 30$

माना दो द्विघातीय व्यंजक $u(x)$ तथा $v(x)$ हैं।

अब $x^3 - 19x - 30$ में

$$\begin{aligned} &= x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 25x + 6x - 30 \\ &= x^2(x - 5) + 5x(x - 5) + 6(x - 5) \\ &= (x - 5)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x - 5)(x^2 + 2x + 3x + 6) \\ &= (x - 5)\{x(x + 2) + 3(x + 2)\} \\ &= (x - 5)(x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

हम जानते हैं कि

$$u(x) \times v(x) = \text{HCF} \times \text{LCM}$$

या
$$\begin{aligned} u(x) \times v(x) &= (x - 5) \times (x^3 - 19x - 30) \\ &= (x - 5) \times (x - 5)(x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

व्यंजक द्विघातीय है तथा इनका HCF $(x - 5)$ दोनों का गुणक है। अतः

$$\begin{aligned} u(x) &= (x - 5)(x + 2) \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

तथा
$$\begin{aligned} v(x) &= (x - 5)(x + 3) \\ &= x^2 - 2x - 15 \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट व्यंजक $x^2 - 3x - 10$ तथा $x^2 - 2x - 15$ है। उत्तर

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 3

प्रश्न 1. यदि बहुपद $f(x) = 5 + 13x + k$ को एक शून्यक दूसरे का व्युत्क्रम हो, तो k का मान होगा-

- (क) 0 (ख) $1/5$ (ग) 5 (घ) 6

उत्तर: (ग) 5

प्रश्न 2. बहुपद $x^2 - x - 6$ के शून्यक हैं

- (क) 1, 6 (ख) 2, -3 (ग) 3, -2 (घ) 1, -6

उत्तर: (ग) 3, -2

प्रश्न 3. यदि बहुपद $2x^2 + x + k$ का एक शून्यक 3 है तो k का मान होगा-

- (क) 12 (ख) 21 (ग) 24 (घ) - 21

उत्तर: (घ) - 21

प्रश्न 4. यदि α, β बहुपद $-p(x + 1) = 0$ के शून्यक इस प्रकार हैं कि $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 0$ है तो c का मान होगा-

- (क) 0 (ख) - 1 (ग) 1 (घ) 2

उत्तर: (ग) 1

प्रश्न 5. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - kx + 4 = 0$ के मूल समान हों तो k का मान होगा-

- (क) 2 (ख) 1 (ग) 4 (घ) 3

उत्तर: (ग) 4

प्रश्न 6. यदि $x = 1$, समीकरण $ax^2 + ax + 3 = 0$ तथा $x^2 + x + b = 0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है तो ab का मान होगा-

- (क) 1 (ख) 3.5 (ग) 6 (घ) 3

उत्तर: (घ) 3

प्रश्न 7. द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}x^2 + 10x + \sqrt{3} = 0$ का विविक्तिकर होगा

- (क) 10 (ख) 64 (ग) 46 (घ) 30

उत्तर: (ख) 64

प्रश्न 8. द्विघात समीकरण $4x^2 - 12x - 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति है-

- (क) वास्तविक एवं समान (ख) वास्तविक एवं भिन्न
(ग) काल्पनिक एवं समान (घ) काल्पनिक एवं भिन्न

उत्तर: (ख) वास्तविक एवं भिन्न

प्रश्न 9. व्यंजकों $8a^2b^2c$ तथा $20ab^3c^2$ का HCF है-

(क) $4ab^2c$ (ख) $4abc$ (ग) $40a^2b^3c^2$ (घ) $40abc$

उत्तर: (क) $4ab^2c$

प्रश्न 10. व्यंजकों $x^2 - 1$ तथा $x^2 + 2x + 1$ का LCM है

(क) $x + 1$ (ख) $(x^2 - 1)(x - 1)$ (ग) $(x - 1)(x + 1)^2$ (घ) $(x^2 - 1)(x + 1)^2$

उत्तर: (ग) $(x - 1)(x + 1)^2$

प्रश्न 11. व्यंजक $6x^2y^4$ तथा $10xy^2$ का LCM $30x^2y^4$ है तो HCF होगा-

(क) $6x^2y^2$ (ख) $2xy^2$ (ग) $10x^2y^3$ (घ) $60x^3y^6$

उत्तर: (ख) $2xy^2$

प्रश्न 12. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का श्रीधर आचार्य सूत्र लिखिए।

हल:

$$\text{हल— } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{जहाँ } b^2 - 4ac \geq 0$$

प्रश्न 13. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर का व्यापक रूप लिखकर मूलों की प्रकृति समझाइए।

हल: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ के मूलों की प्रकृति विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ के मान पर निम्न प्रकार निर्भर करती है

1. यदि $(b^2 - 4ac) > 0$ तब मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे।
2. यदि $(b^2 - 4ac) = 0$ तब मूल वास्तविक एवं समान होंगे।
3. यदि $(b^2 - 4ac) < 0$ तब मूल काल्पनिक होंगे।

प्रश्न 14. द्विघात बहुपद $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$$

$$= 2(x - 3) - 2(x - 3)$$

$$= (x - 3)(2x - 2)$$

अतः $2x^2 - 8x + 6$ को मान शून्य होगा यदि $(x - 3)(2x - 2)$ का मान शून्य है।

$$\text{यानि } x - 3 = 0 \therefore x = 3$$

$$\text{यांनि } 2x - 2 = 0 \therefore x = 1$$

अतः $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक 1 और 3 हैं।

$$\text{अब शून्यकों का योग} = 1 + 3 = 4$$

$$= -\left(\frac{-8}{2}\right) = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणन} = 1 \times 3 = 3$$

$$= \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

प्रश्न 15. यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - px + q$ के शून्यक हैं, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $\alpha^2 + \beta^2$

(ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

हल: यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - px + q$ के शून्यक हैं, तब

$$\alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-(-p)}{1} = p$$

तथा $\alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{q}{1} = q$

(i) हमें यहाँ पर $\alpha^2 + \beta^2$ का मान ज्ञात करना है।

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

मान रखने पर $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$ उत्तर

(ii) हमें यहाँ पर $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$ का मान ज्ञात करना है।

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$

मान रखने पर $= \frac{p}{q}$ उत्तर

प्रश्न 16. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपदे $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाता है और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a को मान ज्ञात कीजिए।

हल:

बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + (8 - k) \\
 x^2 - 2x + k \overline{) x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10} \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - kx^2} \\
 -4x^3 + (16 - k)x^2 - 25x + 10 \\
 \underline{-4x^3 + 8x^2 - 4kx} \\
 (8 - k)x^2 + (4k - 25)x + 10 \\
 \underline{-(8 - k)x^2 + 2(8 - k)x - (8 - k)k} \\
 (2k - 9)x - (8 - k)k + 10
 \end{array}$$

$$\therefore \text{शेषफल} = (2k - 9)x - (8 - k)k + 10$$

$$\text{परन्तु शेषफल} = x + a$$

इसलिए, गुणांकों की तुलना करने पर

$$2k - 9 = 1 \Rightarrow 2k = 10 \Rightarrow k = 5$$

$$\text{तथा } -(8 - k)k + 10 = a$$

$$\Rightarrow a = -(8 - 5)5 + 10$$

$$= -3 \times 5 + 10 = -15 + 10 = -5$$

$$\text{अतः, } k = 5 \text{ तथा } a = -5 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 17. एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 मी.^2 है। भूखण्ड की लम्बाई (मीटर में), चौड़ाई के दोगुने से 1 अधिक है। अभीष्ट द्विघात समीकरण निरूपित कर भूखण्ड की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल:

माना भूखण्ड की चौड़ाई = x मीटर

तब प्रश्नानुसार भूखण्ड की लम्बाई

$$= (2x + 1) \text{ मीटर}$$

हमें भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 मी.² दिया हुआ है।

अतः भूखण्ड का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई

$$\Rightarrow 528 = (2x + 1) \times x$$

$$\text{अर्थात् } 2x^2 + x - 528 = 0 \text{ है।}$$

इस द्विघात समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 2$, $b = 1$ तथा $c = -528$ है।

अतः द्विघाती सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-528)}}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4224}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\text{अर्थात् } x = \frac{64}{4} \text{ या } -\frac{66}{4}$$

$$\text{अर्थात् } x = 16 \text{ या } -\frac{33}{2}$$

क्योंकि x एक विमा होने के कारण ऋणात्मक नहीं हो सकता है इसलिए भूखण्ड की चौड़ाई 16 मीटर है और लम्बाई $(2 \times 16 + 1) = 33$ मीटर है। उत्तर

प्रश्न 18. द्विघात समीकरण $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए।

हल: दिया गया द्विघात समीकरण

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\text{या } x^2 + 4x = 5$$

दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर

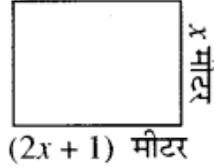
$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 = 9$$

$$\therefore x + 2 = \pm\sqrt{9} \pm 3$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x + 2 = 3$$



$$\therefore x = 3 - 2 = 1$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x + 2 = -3$$

$$\therefore x = -3 - 2 = -5$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण $x^2 + 4x - 5 = 0$ के हल $x = 1, -5$ हैं। उत्तर

प्रश्न 19. निम्न समीकरणों को गुणनखण्डन विधि से हल कीजिए-

$$(i) \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \quad x \neq 0, 2$$

$$(ii) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} = \frac{6}{7}, \quad x \neq 1, -5$$

$$(iii) x - \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$$

$$(iv) \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq 4, 7$$

हल:

(i) दिया गया समीकरण है-

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \quad x \neq 0, 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{x^2-2x} = 3$$

$$\Rightarrow -2 = 3(x^2 - 2x)$$

$$\Rightarrow -2 = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

अतः दिया गया समीकरण परिवर्तित होकर $3x^2 - 6x + 2 = 0$ बन जाती है, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ $a = 3$, $b = -6$ तथा $c = 2$ है। इसलिए $D = (b^2 - 4ac) = 36 - 4 \times 3 \times 2 = 36 - 24 = 12 > 0$ है।

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} \\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

इसलिए मूल $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ और $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ हैं। उत्तर

(ii) दिया गया समीकरण

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} = \frac{6}{7}, x \neq 1, -5$$

$$\Rightarrow \frac{x+5-x+1}{(x-1)(x+5)} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{(x-1)(x+5)} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow 6 \times 7 = 6(x-1)(x+5)$$

$$\text{या } 7 = (x-1)(x+5)$$

$$\text{या } 7 = x^2 + 4x - 5$$

$$\text{या } x^2 + 4x - 12 = 0$$

अतः दिया गया समीकरण परिवर्तित होकर $x^2 + 4x - 12 = 0$ बन जाती है, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ पर $a = 1$, $b = 4$ तथा $c = -12$ है।

इसलिए $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times (-12) = 16 + 48 = 64$

$$D = 64 > 0 \text{ है।}$$

$$\text{अतः } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$\text{धनात्मक चिह्न लेने पर } x = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{ऋणात्मक चिह्न लेने पर } x = \frac{-4-8}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

अतः द्विघात समीकरण के मूल 2 तथा -6 हैं। उत्तर

(iii) दिया गया समीकरण है-

$$x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 3x$$

$$\text{या } x^2 - 3x - 1 = 0$$

अतः दिया गया समीकरण परिवर्तित होकर $x^2 - 3x - 1 = 0$ बन जाती है, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ $a = 1$, $b = -3$ और $c = -1$ है इसलिए

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times (-1) = 9 + 4 = 13$$

$$D = 13 > 0$$

$$\text{अतः } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

इसलिए द्विघात समीकरण के मूल $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ हैं। उत्तर

(iv) दिया गया समीकरण है-

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq -4, 7$$

$$\Rightarrow \frac{(x-7) - (x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-x-4}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow 11(x+4)(x-7) = -11 \times 30$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-7) = -30$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 4x - 28 = -30$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

अतः दिया गया समीकरण परिवर्तित होकर $x^2 - 3x + 2 = 0$ बन जाती है, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ पर $a = 1$, $b = -3$ तथा $c = 2$

इसलिए $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 2$

$$D = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$\text{अतः } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

अतः $x = \frac{3+1}{2} = 2$ और $x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

इसलिए द्विघात समीकरण के मूल 2 और 1 हैं। उत्तर

प्रश्न 20. यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + px - 15 = 0$ का एक मूल -5 है तथा द्विघात समीकरण $p(x^2 + x) + k = 0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया द्विघात समीकरण

$$2x^2 + px - 15 = 0$$

इस द्विघात समीकरण का एक मूल -5 है इसलिए यह मूल द्विघात समीकरण को सन्तुष्ट करेगा अतः $x = -5$ रखने पर

$$2(-5)^2 + p(-5) - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \times 25 - 5p - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 50 - 5p - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 35 - 5p = 0$$

$$\text{या } 5p = 35$$

$$\therefore p = 7$$

दूसरी दी गई द्विघात समीकरण के मूल बराबर हैं। इसलिए $D = b^2 - 4ac = 0$ होना चाहिए।

दिया गया द्विघात का समीकरण

$$p(x^2 + x) + k = 0$$

$$\Rightarrow px^2 + px + k = 0$$

p का मान रखने पर

$$7x^2 + 7x + k = 0$$

यहाँ पर $a = 7$, $b = 7$ तथा $c = k$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow (7)^2 - 4 \times 7 \times k = 0$$

$$\Rightarrow 49 - 28k = 0$$

$$\text{या } 28k = 49$$

$$\therefore k = \frac{49}{28} = \frac{7}{4} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 21. श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र का उपयोग करके निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए

$$(i) p^2x^2 + (p^2 - q^2)x - q^2 = 0$$

$$(ii) 9x^2 - 9(a + b)x + (2a^2 + 5ab + 2b^2) = 0$$

हल: (i) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$p^2x^2 + (p^2 - q^2)x - q^2 = 0$$

यहाँ पर $a = p^2$

$$b = p^2 - q^2 \text{ तथा } c = -q^2$$

द्विघाती सूत्र का उपयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(p^2 - q^2) \pm \sqrt{(p^2 - q^2)^2 - 4 \times p^2 \times (-q^2)}}{2 \times p^2} \\&= \frac{-p^2 + q^2 \pm \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2}}{2p^2} \\&= \frac{-p^2 + q^2 \pm \sqrt{(p^2 + q^2)^2}}{2p^2} \\&= \frac{-p^2 + q^2 \pm (p^2 + q^2)}{2p^2}\end{aligned}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-p^2 + q^2 + p^2 + q^2}{2p^2} = \frac{2q^2}{2p^2}$$

$$\therefore x = \frac{q^2}{p^2}$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$\begin{aligned}&= \frac{-p^2 + q^2 - (p^2 + q^2)}{2p^2} \\&= \frac{-p^2 + q^2 - p^2 - q^2}{2p^2} = \frac{-2p^2}{2p^2}\end{aligned}$$

$$x = -1$$

अतः दी गई द्विघात समीकरण का हल $x = -1, \frac{q^2}{p^2}$ है। उत्तर

(ii) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$9x^2 - 9(a + b)x + (2a^2 + 5ab + 2b^2) = 0$$

यहाँ पर $A = 9, B = -9(a + b)$

तथा $C = 2a^2 + 5ab + 2b^2$

$$\begin{aligned}
D &= B^2 - 4AC \text{ का मान निकालने पर} \\
&= [-9(a+b)]^2 - 4 \times 9 \times (2a^2 + 5ab + 2b^2) \\
&= 81(a+b)^2 - 36(2a^2 + 5ab + 2b^2) \\
&= 9[9(a+b)^2 - 4(2a^2 + 5ab + 2b^2)] \\
&= 9[9(a^2 + 2ab + b^2) - 4(2a^2 + 5ab + 2b^2)] \\
D &= 9[9a^2 + 18ab + 9b^2 - 8a^2 - 20ab - 8b^2] \\
&= 9[a^2 - 2ab + b^2] = 9(a-b)^2
\end{aligned}$$

अब द्विघाती सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर

$$\begin{aligned}
x &= \frac{9(a+b) \pm \sqrt{9(a-b)^2}}{2 \times 9} \\
x &= \frac{9(a+b) \pm 3(a-b)}{18}
\end{aligned}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$\begin{aligned}
x &= \frac{9(a+b) + 3(a-b)}{18} = \frac{9a + 9b + 3a - 3b}{18} \\
&= \frac{12a + 6b}{18} = \frac{2a + b}{3}
\end{aligned}$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$\begin{aligned}
x &= \frac{9(a+b) - 3(a-b)}{18} = \frac{9a + 9b - 3a + 3b}{18} \\
&= \frac{6a + 12b}{18} = \frac{a + 2b}{3}
\end{aligned}$$

अतः द्विघात समीकरण का हल $x = \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ है। उत्तर

प्रश्न 22. दो द्विघातीय व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक क्रमशः $x^3 - 7x + 6$ एवं $(x-1)$ हैं। व्यंजक ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है

$$\text{HCF} = (x-1)$$

$$\text{LCM} = x^3 - 7x + 6$$

माना दो द्विघातीय व्यंजक $u(x)$ तथा $v(x)$ हैं।

अब $x^3 - 7x + 6$ में

$$\begin{aligned}
&= x^2(x-1) + (x-1) - 6x + 6 \\
&= x^2(x-1) + x(x-1) - 6(x-1) \\
&= (x-1)\{x^2 + x - 6\} \\
&= (x-1)\{x^2 + 3x - 2x - 6\} \\
&= (x-1)\{x(x+3) - 2(x+3)\} \\
&= (x-1)(x+3)(x-2)
\end{aligned}$$

हम जानते हैं-

$$u(x) \times v(x) = \text{HCF} \times \text{LCM}$$

$$\begin{aligned}
\text{या } u(x) \times v(x) &= (x-1) \times x^3 - 7x + 6 \\
&= (x-1) \times (x-1)(x+3)(x-2)
\end{aligned}$$

व्यंजक द्विघातीय है तथा इनका HCF $(x-1)$ दोनों का गुणक है अतः

$$\begin{aligned}
u(x) &= (x-1)(x+3) \\
&= x^2 + 2x - 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{तथा } v(x) &= (x-1)(x-2) \\
&= x^2 - 3x + 2
\end{aligned}$$

अतः अभीष्ट व्यंजक $x^2 + 2x - 3$ तथा $x^2 - 3x + 2$ है। उत्तर

प्रश्न 23. दो बहुपदों का लघुत्तम समापवर्तक $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ है। तथा महत्तम समापवर्तक $(x + 1)$ है। यदि एक बहुपद $x^2 - 4x - 5$ है तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-

$$\text{LCM} = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

$$\text{HCF} = (x + 1)$$

$$\text{पहला बहुपद} = x^2 - 4x - 5$$

$$\text{दूसरा बहुपद} = ?$$

हम जानते हैं

$$u(x) \times v(x) = \text{HCF} \times \text{LCM}$$

$$\text{या पहला बहुपद} \times \text{दूसरा बहुपद} = \text{HCF} \times \text{LCM}$$

$$\text{इसलिए दूसरा बहुपद} = \frac{\text{HCF} \times \text{LCM}}{\text{पहला बहुपद}}$$

$$= \frac{(x+1)(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)}{x^2 - 4x - 5}$$

$$\begin{array}{r}
x^2 - 4x - 5 \overline{) x^3 - 6x^2 + 3x + 10} \quad (x-2) \\
\underline{-(x^3 - 4x^2 - 5x)} \\
-2x^2 + 8x + 10 \\
\underline{-(2x^2 - 8x + 10)} \\
+ - \\
\hline
0
\end{array}$$

अतः दूसरा बहुपद $= (x + 1) x (x - 2)$
 $= x^2 - x - 2$ उत्तर

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. बहुपद $p(x)$ का शून्यक, जहाँ $p(x) = ax + 1$ है, $a \neq 0$ है

- (A) 1 (B) $-a$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{a}$

उत्तर: (D) $-\frac{1}{a}$

प्रश्न 2. यदि α, β तथा γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के शून्यक हों, तो $\alpha + \beta + \gamma$ का मान होगा

- (A) 4 (B) 6 (C) c (D) $-\frac{b}{a}$

उत्तर: (D) $-\frac{b}{a}$

प्रश्न 3. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर $x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ में $x - 1$ का भाग देने पर भागफल व शेषफल होगा-

- (A) भागफल $= x^4 - 3x^2 + 2x + 5$, शेषफल $= 6$
(B) भागफल $= x^3 - 3x + 2$, शेषफल $= -5$
(C) भागफल $= x^3 + x^2 - 2x$, शेषफल $= 5$
(D) भागफल $= 3x^2 + 2x + 5$, शेषफल $= 3$

उत्तर: (C) भागफल $= x^3 + x^2 - 2x$, शेषफल $= 5$

प्रश्न 4. यदि समीकरण $x^2 + 3ax + k = 0$ का एक हल $x = -a$ हो तो k का मान होगा

- (A) 0 (B) $2a^2$ (C) a^2 (D) $-2a$

उत्तर: (B) $2a^2$

प्रश्न 5. किसी संख्या का वर्ग उसके तिगुने से 70 अधिक है। इस कथन को प्रकट करने वाला समीकरण है-

(A) $x^2 + 3x - 70 = 0$

(B) $x^2 - 3x - 70 = 0$

(C) $x^2 - 3x + 70 = 0$

(D) $x^2 + 3x + 70 = 0$

उत्तर: (B) $x^2 - 3x - 70 = 0$

प्रश्न 6. द्विघात समीकरण $px^2 + qx + r = 0$, $p \neq 0$ के मूल समान होंगे यदि

(A) $p^2 < 4qr$

(B) $p^2 > 4qr$

(C) $q^2 = 4pr$

(D) $p^2 = 4qr$

उत्तर: (C) $q^2 = 4pr$

प्रश्न 7. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ के मूल वास्तविक नहीं होंगे यदि

(A) $b^2 < 4ac$

(B) $b^2 > 4ac$

(C) $b^2 = 4ac$

(D) $b = 4ac$

उत्तर: (A) $b^2 < 4ac$

प्रश्न 8. $4x^2yz^3$ और $12xy^2z$ का म.स. है-

(A) $4x^2y^2z^3$

(B) $4xyz$

(C) $12xyz$

(D) $12x^2y^2z^3$

उत्तर: (B) $4xyz$

प्रश्न 9. दो व्यंजकों का गुणनफल $360x^7y^7z^3$ है और यदि उनका म.स.प. $6x^2y^3z$ हो, तो उनका ल.स.प. है

(A) $60x^5y^4z^2$

(B) $360x^5y^4z^2$

(C) $360x^9y^{10}z^4$

(D) $60x^9y^{10}z^4$

उत्तर: (A) $60x^5y^4z^2$

प्रश्न 10. $3x^2$, $7y^3$ तथा $42z$ का ल.स. होगा-

(A) $x^2y^2z^2$

(B) $x^2y^3z^4$

(C) $42x^2y^3z^4$

(D) $88x^2y^3z^4$

उत्तर: (C) $42x^2y^3z^4$

प्रश्न 11. द्विघात समीकरण $2x^2 - x - 6 = 0$ के मूल हैं-

(A) $-2, \frac{3}{2}$ (B) $2, \frac{-3}{2}$ (C) $-2, \frac{-3}{2}$ (D) $2, \frac{3}{2}$

उत्तर: (b) $2, \frac{-3}{2}$

प्रश्न 12. k के किस मान के लिये द्विघात समीकरण $2x^2 - kx + k = 0$ के मूल संमान हैं-

(A) केवल 0 (B) केवल 4 (C) केवल 8 (D) 0, 8

उत्तर: (D) 0, 8

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. बहुपद का शून्यक क्या होता है?

उत्तर: एक वास्तविक संख्या a किसी बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाएगी यदि $p(a) = 0$ हो अर्थात् x का वह मान जिससे बहुपद का मान शून्य हो जाए।

प्रश्न 2. रैखिक बहुपद का उदाहरण लिखिए।

उत्तर: $ax + b$, जहाँ $a, b \in \mathbb{R}$ तथा $a \neq 0$

प्रश्न 3. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों तो $\alpha + \beta$ तथा $\alpha\beta$ का मान लिखिए।

उत्तर: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

प्रश्न 4. यदि व्यंजक $x^3 - 2x + 1$ का एक भाजक $(x - 1)$ है तो शेषफल लिखिए।

उत्तर: माना कि व्यंजक $f(x) = x^3 - 2x + 1$ का एक गुणनखण्ड $(x - 1)$ है।

अतः $f(1) = (1)^3 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1$

$= 0$

\therefore शेषफल = शून्य

प्रश्न 5. द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$x^2 + 7x + 10$$

$$x^2 + 5x + 2x + 10$$

$$x(x + 5) + 2(x + 5) = (x + 2)(x + 5)$$

$\therefore x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ या $x + 5 = 0$ है

अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो।

$\therefore x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और 5 हैं। उत्तर

प्रश्न 6. यदि $(x - 2)$ व्यंजक $x^2 + 2x - a$ का एक गुणखण्ड है तो a का मान लिखिए।

उत्तर: $x - 2 = 0$ या $x = 2$ व्यंजक में रखने पर इसका मान शून्य होना चाहिए। अतः

$$(2)^2 + 2 \times 2 - a = 0$$

$$4 + 4 - a = 0$$

$$\therefore a = 8 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 7. यदि $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + k)$ हो, तो k का मान लिखिए।

उत्तर: $k = -xy - yz - zx$ उत्तर

प्रश्न 8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः -4 और 3 हों।

हल: $x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{मूलों का गुणनफल}$

$$x^2 - (-4)x + 3$$

$$x^2 + 4x + 3 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 9. एक n घात वाले बहुपद के अधिकतम शून्यकों की संख्या लिखिए।

उत्तर: n शून्यक

प्रश्न 10. द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के आलेख की आकृति किस प्रकार की प्राप्त होती है?

उत्तर: परवलयी आकृति।

प्रश्न 11. वह बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यक - 5 और 4 हों।

हल: $[x - (-5)](x - 4)$
 $\Rightarrow (x + 5)(x - 4)$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + 5x - 20$
 $\Rightarrow x^2 + x - 20$ उत्तर

प्रश्न 12. समीकरण $x^2 - \frac{x}{3} = 0$ के हल लिखिए।

हल:

$$x^2 - \frac{x}{3} = 0 \text{ या } x\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ या } x = 0, \frac{1}{3} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 13. जाँच कीजिये कि क्या $x(2x + 3) = x^2 + 1$ एक द्विघात समीकरण है?

हल:

$$\begin{aligned} & x(2x + 3) = x^2 + 1 \\ \Rightarrow & 2x^2 + 3x = x^2 + 1 \\ \Rightarrow & 2x^2 + 3x - x^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 3x - 1 = 0 \end{aligned}$$

अतः उपर्युक्त समीकरण द्विघात समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 14. यदि समीकरण $x^2 - 8x + a = 0$ का एक मूल 5 है, तो दूसरा मूल लिखिए।।

हल: यहाँ मूलों का योग 8 है अतः दूसरा मूल $8 - 5 = 3$ होगा। उत्तर

प्रश्न 15. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 25 है। यदि छोटी संख्या x हो तो इस तथ्य को अभिव्यक्त करने वाला समीकरण लिखिए।

हल: $x^2 + (x + 1)^2 = 25$

प्रश्न 16. संख्या x तथा उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{5}{2}$ है, इसे बीजीय समीकरण के रूप में लिखिए।

हल: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

प्रश्न 17. एक घन संख्या x अपने वर्ग से 56 कम है। इस वाक्य को प्रकट करने वाला समीकरण लिखिए।

हल: $x^2 - 56 = x$, या $x^2 - x = 56 \therefore x^2 - x - 56 = 0$

प्रश्न 18. समीकरण $\frac{x}{5} - \frac{5}{x} = 0$ को सन्तुष्ट करने वाले x के मान लिखिए।

हल:

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{5}{x} &= 0 \\ \therefore \frac{x}{5} &= \frac{5}{x} \\ \Rightarrow x^2 &= 25 \\ \therefore x &= \pm \sqrt{25} = \pm 5 \end{aligned}$$

प्रश्न 19. यदि समीकरण $x^2 - 8x + k = 0$ के मूल समान हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

मूल समान होने पर $b^2 - 4ac = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (-8)^2 - 4 \times 1 \times k &= 0 \dots \text{यहाँ पर } a = 1, b = -8 \\ 64 - 4k &= 0 & c = k \\ \therefore k &= \frac{64}{4} = 16 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 20. समीकरण $x - \frac{1}{x} = 0$ को हल कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{x} \\ \therefore x^2 &= 1 \\ x &= \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{aligned}$$

अतः $x = 1, -1$ उत्तर

प्रश्न 21. समीकरण $2x^2 + 3x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 2, b = 3, c = 4$

\therefore विविक्तकर का मान $D = b^2 - 4ac$

$$= (3)^2 - 4 \times 2 \times 4$$

$$= 9 - 32 = -23 < 0$$

\therefore विविक्तकर का मान ऋणात्मक है अतः मूल विद्यमान नहीं है। अर्थात् मूल काल्पनिक होंगे।

प्रश्न 22. द्विघात सूत्र लिखिए।

हल:

यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$

के मूल $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ होते हैं। यही सूत्र द्विघात सूत्र कहलाता है।

प्रश्न 23. k का मान ज्ञात कीजिये जिसके लिये $x = 2$ द्विघात समीकरण $3x^2 - kx - 2 = 0$ का एक मूल है।

हल:

$\because x = 2$ समीकरण $3x^2 - kx - 2 = 0$ का एक मूल है अतः $x = 2$ समीकरण में रखने पर

$$3(2)^2 - k(2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 2k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2k = -10$$

$$\therefore k = 5 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 24. $x^2 - 1$ तथा $(x + 1)^2$ का ल.स. लिखिए।

हल: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$$

अतः ल.स. = $(x + 1)^2(x - 1)$ उत्तर

प्रश्न 25. दो व्यंजकों का गुणनफल $24x^6y^4z^3$ है। यदि इनको ल.स. $8x^4y^3z^2$ हो तो इनका म.स. ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{म.स.} = \frac{24x^6y^4z^3}{8x^4y^3z^2} = 3x^2yz \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 26. $(x^2 - 1)$ तथा $(x^2 - 2x + 1)$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल: $p(x) = (x^2 - 1) \Rightarrow (x + 1)(x - 1)$

$q(x) = (x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^2$

अतः म.स. = $(x - 1)$ उत्तर

प्रश्न 27. $12(a^2 - b^2)$ तथा $18(a + b)^2$ का ल.स. लिखिए।

हल: $12(a^2 - b^2) = 2 \times 2 \times 3(a + b)(a - b)$

$18(a + b)^2 = 2 \times 3 \times 3(a + b)(a + b)$

अतः ल.स. = $2 \times 3 \times 3 \times 2(a - b)(a + b)^2$

= $36(a + b)^2(a - b)$ उत्तर

प्रश्न 28. $(x^2 - 4)$ और $(x - 2)(x + 1)$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

अतः प्रथम व्यंजक = $(x - 2)(x + 2)$

द्वितीय व्यंजक = $(x - 2)(x + 1)$

अतः म.स. = $(x - 2)$ उत्तर

प्रश्न 29. दो व्यंजकों के म.स. और ल.स. क्रमशः $2x^2y^2$ और $2x^5y^3$ हैं। यदि उनमें से एक व्यंजक $4x^5y^2$ हो, तो दूसरा व्यंजक ज्ञात कीजिए।

हल:

$\therefore \text{म.स.} \times \text{ल.स.} = \text{प्रथम व्यंजक} \times \text{द्वितीय व्यंजक}$

$\therefore \text{द्वितीय व्यंजक} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{प्रथम व्यंजक}}$

$$= \frac{2x^2y^2 \times 28x^5y^3}{4x^5y^2} = 14x^2y^3 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 30. $a^2b - ab^2$ तथा $a^3b^2 + a^2b^3$ का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल: माना $u(x) = a^2b - ab^2$

$$= ab(a - b)$$

तथा $v(x) = a^3b^2 + a^2b^3$

$$= a^2b^2(a + b)$$

अतः उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= a^2b^2(a - b)(a + b)$

$$\text{ल.स.प.} = a^2b^2(a - b)(a + b)$$

$$= a^2b^2(a^2 - b^2) \text{ उत्तर}$$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों को योग तथा गुणनफल $\frac{1}{4}$ और -1 है।

हल: माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हैं।

$$\text{अतः शून्यकों का योग} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{या} \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\text{प्रश्नानुसार} \quad \alpha + \beta = \frac{1}{4} \text{ दिया है।}$$

$$\text{इसलिए} \quad \frac{1}{4} = \frac{-b}{a} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$

$$\text{प्रश्नानुसार} \quad \alpha\beta = -1$$

$$\text{इसलिए} \quad -1 = \frac{c}{a} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) तथा (ii) में यदि $a = 4$, $b = -1$ तथा $c = -4$ हो तो द्विघात बहुपद $4x^2 - x - 4$ होगा। उत्तर

प्रश्न 2. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर बहुपद $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ को $g(x) = x^2 + 1 - x$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: सर्वप्रथम हम बहुपद को मानक रूप में लिखते हैं तब विभाजन प्रक्रिया करते हैं।

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 3 \\
 x^2 - x + 1 \overline{) x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5} \\
 \underline{-x^4 + x^3 + x^2} \\
 x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 \underline{-x^3 + x^2 + x} \\
 -3x^2 + 3x + 5 \\
 \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\
 8
 \end{array}$$

अतः भागफल = $x^2 + x - 3$, शेषफल = 8

यहाँ—

$$\begin{aligned}
 & \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\
 &= (x^2 - x + 1) \times (x^2 + x - 3) + 8 \\
 &= x^4 + x^3 - 3x^2 - x^3 - x^2 + 3x + x^2 + x - 3 + 8 \\
 &= x^4 - 3x^2 + 4x + 5 \\
 &= \text{भाज्य}
 \end{aligned}$$

अतः विभाजन ऐल्गोरिथ्म सत्यापित होता है।

प्रश्न 3. यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b$, a , $a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

हल:

$\therefore (a - b), a, (a + b)$ बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक हैं

तब शून्यकों का योग = $\alpha + \beta + r = -\frac{b}{a}$

$$(a - b) + a + (a + b) = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$\Rightarrow 3a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1$$

दो शून्यकों को साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग अर्थात्

$$\alpha\beta + \beta r + r\alpha = \frac{c}{a}$$

$$(a - b)a + a(a + b) + (a + b)(a - b) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + a^2 + ab + a^2 - b^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3a^2 - b^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3(1)^2 - b^2 = 1 [\because a = 1]$$

$$\Rightarrow 3 - b^2 = 1$$

$$\Rightarrow b^2 = 2$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

अतः, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$ उत्तर

प्रश्न 4. p के किसे मान के लिए बहुपद $px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ व्यंजक $(3x + 2)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।

हल: दिया गया है कि $(3x + 2)$ दिये गये व्यंजक का एक गुणखण्ड है।

$$\therefore 3x + 2 = 0$$

$$\text{या } 3x = -2 \quad \therefore x = -\frac{2}{3}$$

व्यंजक $f(x) = px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ में $x = -\frac{2}{3}$ मान रखने पर इसका मान शून्य के बराबर होगा

$$\therefore f\left(-\frac{2}{3}\right) = p\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = 0$$

$$\text{या } p \times \frac{-8}{27} + 4 - 4 - 1 = 0$$

$$\text{या } \frac{-8p}{27} = 1$$

$$\text{या } p = -\frac{27}{8} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. यदि द्विघात व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान ज्ञात कीजिये।

हल: दिए गए व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के अनुसार

$$\text{शून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = -\frac{5}{k}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\beta) = \frac{3k}{k} = 3$$

$$\text{अब प्रश्नानुसार } -\frac{5}{k} = \frac{3}{1}$$

$$\text{या } 3k = -5$$

$$\therefore k = -\frac{5}{3} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल: दिए हुए बहुपद मानक रूप में नहीं हैं। भाग की क्रिया करने के लिए, हम सर्वप्रथम भाज्य और भाजक दोनों को उनकी घातों के घटते क्रम में लिखते हैं।

$$\begin{array}{r}
 \overline{) -x^3+3x^2-3x+5} \\
 \underline{-x^3+x^2-x} \\
 2x^2-2x+5 \\
 \underline{2x^2-2x+2} \\
 3
 \end{array}$$

यहाँ शेषफल (3) प्राप्त होता है। इसकी घात भाजक $x^2 + x - 1$ से कम है। अतः विभाजन प्रक्रिया यहीं रोक देते हैं। इस प्रकार भागफल $(x - 2)$ एवं शेष (3) प्राप्त होता है। विभाजन एल्गोरिथ्म में निम्न कथन की जाँच करते हैं।

$$\begin{aligned}
 &\text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} = \text{भाज्य} \\
 &= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\
 &= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\
 &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\
 &= \text{भाज्य}
 \end{aligned}$$

अतः, विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया। उत्तर

प्रश्न 7. गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण ।

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$

$$\text{या } x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$$

$$\text{या } (x + 2)(x - 5) = 0$$

$$\text{या } x + 2 = 0 \qquad \text{या } x - 5 = 0$$

$$\text{या } x = -2 \qquad \text{या } x = 5$$

अतः $x = -2$ और $x = 5$ दिये गये समीकरण के दो अभीष्ट मूल हैं।

प्रश्न 8. गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण-

$$\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

गुणनखण्ड करने पर

$$\sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$$

या $x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0$

या $(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$

या $\sqrt{2}x + 5 = 0$ या $x + \sqrt{2} = 0$

या $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$ या $x = -\sqrt{2}$

अतः $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$ और $x = -\sqrt{2}$ दिये गये समीकरण के दो अभीष्ट मूल हैं।

प्रश्न 9. निम्न व्यंजकों को लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए-

(i) $4a^2b^2c$ तथा $6ab^2d$

(ii) $x^2 - 4x + 3$ तथा $x^2 - 5x + 6$

(iii) $-2(x-1)(x-2)(x+3)$ तथा $3(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$

हल:

(i) माना $u(x) = 4a^2b^2c$ तथा $v(x) = 6ab^2d$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u(x) = 2^2 \times a^2 \times b^2 \times c$$

तथा $v(x) = 2 \times 3 \times a \times b^2 \times d$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple)

$$= 2^2 \times 3^1 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$$

= उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अर्थात् $LCM = 12a^2b^2cd$ उत्तर

(ii) माना $u(x) = x^2 - 4x + 3$ तथा $v(x) = x^2 - 5x + 6$

अतः इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर

$$u(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3$$

$$= x(x-3) - 1(x-3) = (x-3)(x-1) \quad \dots(1)$$

तथा $v(x) = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$

$$= x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2) \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि अभाज्य गुणनखण्डों की उच्चतम घातों का गुणनफल

$$= (x - 1) \times (x - 2) \times (x - 3)$$

अतः अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक LCM = $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ होगा।

(iii) माना

$$u(x) = -2(x - 1)(x - 2)(x + 3) \text{ तथा}$$

$$v(x) = 3(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 5)$$

यहाँ अवलोकन मात्र से लिखा जा सकता है कि सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

$$= -2 \times 3 \times (x - 1) \times (x - 2) \times (x + 3) \times (x + 5)$$

है।

अतः अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक = $-6(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 5)$

है।

प्रश्न 10. निम्न व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए-

(i) $8a^2b^2x$ तथा $18ab^3c^2$

(ii) $20x^2 - 9x + 1$ तथा $5x^2 - 6x + 1$

(iii) $(x + 1)^2(x + 2)^2(x + 3)^2$ तथा $(x + 1)^3(x - 2)^3(x + 3)^3$

हल: (i) माना $u(x) = 8a^2b^2c$ तथा $v(x) = 18ab^3c^2$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर।

$$u(x) = 2^3 \times a^2 \times b^2 \times c \text{ तथा } v(x) = 2 \times 3^2 \times a \times b^3 \times c^2$$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक = $2 \times 2 \times b^2 \times c$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल।

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $2ab^2c$ है।

(ii) माना $u(x) = 20x^2 - 9x + 1$ तथा $v(x) = 5x^2 - 6x + 1$ है।

इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर।

$$u(x) = 20x^2 - 9x + 1 = 20x^2 - 5 - 4x + 1$$

$$= 5x(4x - 1) - 1(4 - 1) = (4 - 1)(5x - 1) \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा } v(x) = 5x^2 - 6x + 1 = 5x^2 - 5x - x + 1$$

$$= 5x(x - 1) - 1(x - 1) = (x - 1)(5x - 1) \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $(5x - 1)$ है।

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक = $(5x - 1)$ है।

(iii) माना $u(x) = (x + 1)^2(x + 2)^2 - (x + 3)$ तथा
 $v(x) = (x + 1)^3(x - 2)(x + 3)^2$
 अतः महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $= (x + 1)^2(x + 3)^2$
 $=$ न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणखण्डों का गुणनफल
 अर्थात् अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) $= (x + 1)^2(x + 3)^2$ है।

प्रश्न 11. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 8 व 12 है। (माध्य, शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

माना कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha + \beta = 8 = -\frac{b}{a}$

तथा $\alpha\beta = 12 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow b = -8a$

तथा $c = 12a$

माना $a = k$ है। तब

$b = -8k$ तथा $c = 12k$

इसलिए व्यंजक

$= kx^2 + (-8k)x + 12k$

$= k(x^2 - 8x + 12)$

इसलिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $= x^2 - 8x + 12$ उत्तर

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यक एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:

माना $f(x) = x^2 - 2x - 8$
 $= x^2 - 4x + 2x - 8$
 $= x(x - 4) + 2(x - 4)$
 $= (x - 4)(x + 2)$

चूँकि हमें शून्यक ज्ञात करना है इसलिए $f(x) = 0$ लेने पर

$(x - 4)(x + 2) = 0$

या $x - 4 = 0$ या $x + 2 = 0$

या $x = 4$ या $x = -2$

अतः बहुपद $f(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यक -2 और 4 होंगे।

अतः शून्यकों का योग $= -2 + 4 = 2$

अर्थात् शून्यकों का योग $= \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$= \frac{-(-2)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = -2 \times 4 = -8$$

$$\text{अर्थात् शून्यकों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-8}{1}$$

अतः शून्यकों एवं गुणांकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

प्रश्न 2. द्विघात बहुपद $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों एवं गुणांकों के मध्य सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल:

$$\text{माना } f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$\text{या } f(x) = \frac{3x^2 + 6x - x - 2}{3x(x+2) - 1(x+2)}$$

$$f(x) = (x+2)(3x-1)$$

शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x) = 0$ लेने पर

$$\text{या } (x+2)(3x-1) = 0$$

$$\text{या } x+2 = 0 \quad \text{या } 3x-1 = 0$$

$$\text{या } x = -2 \quad \text{या } x = \frac{1}{3}$$

अतः दिये गये बहुपद के शून्यक -2 और $\frac{1}{3}$ होंगे।

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + \frac{1}{3} = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times \frac{1}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{या शून्यकों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः बहुपद $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक एवं गुणांकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

प्रश्न 3. बहुपद $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं।

हल:

$$\text{दिया है } -\alpha = \sqrt{\frac{5}{3}}, \beta = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{अतः } (x - \alpha)(x - \beta) = \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$= (x)^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 - 5)$$

बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अर्थात् $(3x^2 - 5)$ भी बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अब हम $f(x)$ को $(3x^2 - 5)$ से विभाजित करते हैं।

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 1 \\
 3x^2 - 5 \overline{) 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5} \\
 \underline{3x^4 - 5x^2} \\
 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 \underline{6x^3 - 10x} \\
 3x^2 - 5 \\
 \underline{- 3x^2 - 5} \\
 0
 \end{array}$$

विभाजन एल्गोरिथ्म से स्पष्ट है कि भागफल $(x^2 + 2x + 1)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है, क्योंकि शेषफल 0 प्राप्त हुआ है। यहाँ गुणनखण्डन द्वारा भागफल को निम्न प्रकार लिख सकते हैं-

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

इस प्रकार भाज्य = भागफल × भाजक + शेषफल

$$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 = (x + 1)^2 \times (3x^2 - 5) + 0$$

$$= (x + 1)^2 (\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5})$$

चूँकि बहुपद $f(x)$ के शून्यक निकालने के लिए $f(x) = 0$ संतुष्ट होना चाहिए। अतः

$$(x + 1)^2 (\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5}) = 0$$

$$\text{या } x + 1 = 0, x + 1 = 0, \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0, \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$$

अर्थात् शून्यक $-1, -1, \sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}$ होंगे।

प्रश्न 4. यदि $(x + 1)$ तथा $(x - 2)$ बहुपद $x^3 + kx^2 + hx + 6$ के गुणनखण्ड हों तो h तथा k के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि $f(x) = x^3 + kx^2 + hx + 6$
दिया गया है कि $(x + 1)$ तथा $(x - 2)$ बहुपद $f(x) = x^3 + kx^2 + hx + 6$
के गुणनखण्ड हैं।

अतः $f(-1) = 0$ तथा $f(2) = 0$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 + k(-1)^2 + h(-1) + 6 = 0$
 $= -1 + k - h + 6 = 0$

$\Rightarrow k - h + 5 = 0$
 $k - h = -5$ (i)

तथा $f(2) = (2)^3 + k(2)^2 + h(2) + 6 = 0$
 $= 8 + 4k + 2h + 6 = 0$

$\Rightarrow 4k + 2h + 14 = 0$
 $4k + 2h = -14$ (ii)

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके समीकरण (ii) में जोड़ने पर

$$2k - 2h = -10$$

$$4k + 2h = -14$$

$$\hline 6k = -24$$

$$k = -\frac{24}{6} = -4$$

k का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$k - h = -5$$

$$-4 - h = -5$$

$$-h = -5 + 4 = -1$$

$$h = 1$$

अतः $h = 1$ तथा $k = -4$ प्राप्त होगा। उत्तर

प्रश्न 5. बहुपद $f(x) = 3x^3 + ax^2 + 4x + b$ का एक गुणनखण्ड $(x + 2)$ है। यदि इसमें $(x - 3)$ का भाग दिया जाये तो शेषफल -5 बचता है। a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$f(x) = 3x^3 + ax^2 + 4x + b$ है, इसका गुणनखण्ड $(x + 2)$ है। अतः

$$\begin{aligned}f(-2) &= 3(-2)^3 + a(-2)^2 + 4(-2) + b = 0 \\ &= -24 + 4a - 8 + b = 0\end{aligned}$$

$$\text{या } 4a + b - 32 = 0 \quad \dots (i)$$

तथा $+5$ जोड़ने पर गुणनखण्ड $(x - 3)$ है अतः

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^3 + ax^2 + 4x + b \\ f(3) &= 3(3)^3 + a(3)^2 + 4 \times 3 + b + 5 \\ &= 81 + 9a + 12 + b + 5 = 0\end{aligned}$$

$$\text{या } 9a + b + 98 = 0 \quad \dots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर

$$9a + b = -98$$

$$4a + b = 32$$

$$\hline 5a = -130$$

$$a = -\frac{130}{5} = -26$$

a का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$4a + b = 32$$

$$4(-26) + b = 32$$

$$-104 + b = 32$$

$$b = 104 + 32 = 136$$

अतः $a = -26, b = 136$ उत्तर

प्रश्न 6. निम्न द्विघात समीकरण का गुणनखण्ड विधि से मूल ज्ञात कीजिए

$$\frac{4}{x} - 3 = \frac{5}{2x+3} \quad \text{जहाँ } x \neq 0, \frac{-3}{2}$$

हल:

दिया गया समीकरण है-

$$\frac{4}{x} - 3 = \frac{5}{2x+3}$$

लघुत्तम लेने पर $\frac{4-3x}{x} = \frac{5}{2x+3}$

वज्रगुणन करने पर निम्न प्रकार लिखा जा सकता है कि

$$(4-3x)(2x+3) = 5x$$

या $8x - 6x^2 + 12 - 9x = 5x$

या $-6x^2 - x + 12 = 5x$

पक्षान्तरण करने पर

$$-6x^2 - x + 12 - 5x = 0$$

$$-6x^2 - 6x + 12 = 0$$

या $-(6x^2 + 6x - 12) = 0$

या $6x^2 + 6x - 12 = 0$

या $6(x^2 + x - 2) = 0$

या $x^2 + x - 2 = \frac{0}{6} = 0$

या $x^2 + x - 2 = 0$

या $\frac{x^2 + 2x}{x} - \frac{x - 2}{x} = 0$

या $x(x+2) - 1(x+2) = 0$

या $(x+2)(x-1) = 0$

या $x+2 = 0$ या $x-1 = 0$

या $x = -2$ या $x = 1$

अतः $x = -2$ और $x = 1$ द्विघात समीकरण के दो अभीष्ट हल हैं।

प्रश्न 7. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए तथा श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र से मूलों का सत्यापन कीजिए।

हल:

दिया गया समीकरण है-

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

x^2 के गुणांक को इकाई बनाने पर

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

या
$$x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

LHS को पूर्ण बनाने के लिए x के गुणांक के आधे का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

या
$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \frac{49}{16}$$

या
$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16} = \frac{25}{16}$$

या
$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

या
$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$

या
$$x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \frac{-5}{4}$$

या
$$x = \frac{-5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः $x = 3$ और $\frac{1}{2}$ दिये गये द्विघात समीकरण के हल हैं।

प्रश्न 8. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $x^2 + x + 1 = 0$

हल:

(i) दिया गया द्विघात समीकरण है-

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

इस द्विघात समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर हमें प्राप्त होता है-

$$a = 2, b = -6 \text{ तथा } c = 3$$

विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$D = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24$$

$$D = 12 > 0$$

अतः समीकरण के मूल वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न होंगे।

अतः श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$

$$x = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

अतः द्विघात समीकरण के अभीष्ट दो मूल $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ हैं।

(ii) दिया गया समीकरण है-

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$$

इस द्विघात समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

यहाँ पर $a = 3$, $b = -4\sqrt{3}$ तथा $c = 4$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$\begin{aligned} D &= (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 \\ &= 48 - 48 = 0 \end{aligned}$$

अतः द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के दोनों मूल वास्तविक एवं समान होंगे।

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मान रखने पर $x = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{0}}{2 \times 3} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \times 3}$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

अतः द्विघात समीकरण के अभीष्ट दो मूल वास्तविक एवं समान $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ होंगे।

(iii) दिया गया समीकरण है-

$$x^2 + x + 1 = 0$$

इस द्विघात समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर हमें प्राप्त है $a = 1$, $b = 1$ तथा $c = 1$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करने पर

$$D = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

यहाँ पर $b^2 - 4ac < 0$ प्राप्त हो रहा है। अतः द्विघात समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के दोनों मूल काल्पनिक होंगे।

प्रश्न 9.3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग 3 है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि रहमान की वर्तमान आयु = x वर्ष

3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु = $(x - 3)$ वर्ष

अब से 5 वर्ष पश्चात् रहमान की आयु = $(x + 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

या
$$\frac{x+5+x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

या
$$\frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$$

या
$$\frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$$

या
$$6x+6 = x^2+2x-15$$

या
$$x^2+2x-15-6x-6=0$$

या $x^2 - 4x - 21 = 0$, जो कि x में द्विघात है। इसलिए इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

∴ $a = 1, b = -4, c = -21$

अब,
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)$$
$$= 16 + 84$$
$$= 100 > 0$$

∴
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2}$$

$$= \frac{4+10}{2} \text{ और } \frac{4-10}{2}$$

$$= \frac{14}{2} \text{ और } -\frac{6}{2}$$

$$= 7 \text{ और } -3$$

∴ आयु ऋणात्मक नहीं हो सकती।

इसलिए $x = -3$ को छोड़ने पर

∴ $x = 7$

अतः, रहमान की वर्तमान आयु = 7 वर्ष। उत्तर

प्रश्न 10. एक मोटर बोट जिसकी स्थिर जल में चाल 18 किमी/घण्टा है। उस बोट ने 12 किमी धारा के प्रतिकूल जाने में, वही दूरी धारा के अनुकूल जाने की अपेक्षा $\frac{1}{2}$ घण्टा अधिक लेती है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि धारा की चाल x km/h है।

\therefore धारा के प्रतिकूल नाव की चाल = $(18 - x)$ km/h

और धारा के अनुकूल नाव की चाल = $(18 + x)$ km/h होगी।

धारा के प्रतिकूल जाने में लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{12}{18 - x}$ घंटे

इसी प्रकार धारा के अनुकूल जाने में लिया गया समय = $\frac{12}{18 + x}$ घंटे

प्रश्नानुसार $\frac{12}{18 - x} - \frac{12}{18 + x} = \frac{1}{2}$

$$12 \left[\frac{1}{18 - x} - \frac{1}{18 + x} \right] = \frac{1}{2}$$

$$12 \left[\frac{18 + x - 18 + x}{(18 - x)(18 + x)} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{12 \times 2x}{(18)^2 - (x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$48x = 324 - x^2$$

या $x^2 + 48x - 324 = 0$

उपर्युक्त समीकरण की तुलना द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1, b = 48$ तथा $c = -324$

द्विघात सूत्र का उपयोग करने पर

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{(48)^2 - 4 \times 1 \times (-324)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 1296}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-48 \pm 60}{2}$$

$\therefore x = \frac{-48 + 60}{2}$ या $x = \frac{-48 - 60}{2}$

$x = \frac{12}{2}$ या $x = \frac{-108}{2}$

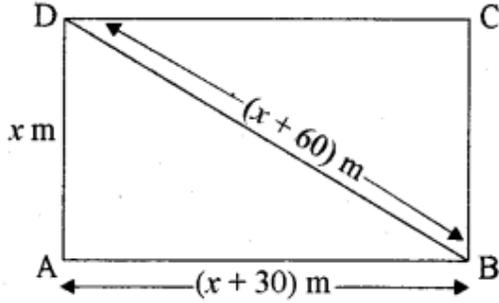
$x = 6$ या -54

क्योंकि x धारा की चाल है इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती है। अतः हम मूल $x = -54$ को छोड़ देते हैं। इसलिए $x = 6$ अर्थात् धारा की चाल = 6 km/h है। उत्तर

प्रश्न 11. एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक लम्बा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मीटर अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयताकार खेत की छोटी भुजा = AD = x m

माना कि आयताकार खेत की छोटी भुजा = AD = x m



आयताकार खेत की लम्बी भुजा = AB = (x + 30) m

और आयताकार खेत का विकर्ण = DB = (x + 60) m

एक आयत में लम्बाई और चौड़ाई के बीच का कोण समकोण होता है।

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ$$

अब समकोण त्रिभुज DAB में,

पाइथागोरस प्रमेय से—

$$(DB)^2 = (AD)^2 + (AB)^2$$

या

$$(x + 60)^2 = (x)^2 + (x + 30)^2$$

या

$$x^2 + 3600 + 120x = x^2 + x^2 + 900 + 60x$$

$$\text{या } x^2 + 3600 + 120x - 2x^2 - 900 - 60x = 0$$

या

$$-x^2 + 60x + 2700 = 0$$

या

$$x^2 - 60x - 2700 = 0$$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$\therefore a = 1, b = -60, c = -2700$$

और

$$b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2700)$$

$$= 3600 + 10800$$

$$= 14400 > 0$$

\therefore

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(-60) \pm \sqrt{14400}}{2 \times 1} \\
&= \frac{60 \pm 120}{2} \\
&= \frac{60+120}{2} \text{ और } \frac{60-120}{2} \\
&= \frac{180}{2} \text{ और } \frac{-60}{2} \\
&= 90 \text{ और } -30
\end{aligned}$$

∴ किसी भी भुजा की लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती।

इसलिए $x = -30$ को छोड़ने पर

∴ $x = 90$

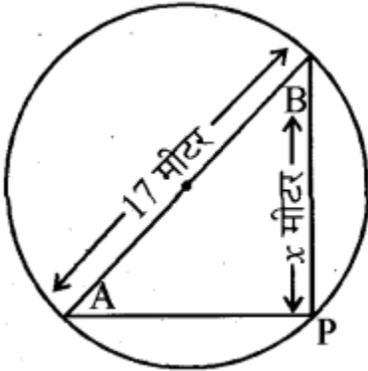
अतः आयताकार खेत की सबसे छोटी भुजा = 90 m

आयताकार खेत की लम्बी भुजा = (90 + 30) m

= 120 m उत्तर

प्रश्न 12. 17 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के एक बिन्दु पर एक खम्भा इस प्रकार गोड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनों अन्त बिन्दुओं पर बने फाटकों A और B से खम्भे की दूरियों का अन्तर 7 मीटर हो। क्या ऐसा करना सम्भव है? यदि है तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियों पर खम्भा गाड़ना है?

हल: माना खम्भे की अभीष्ट स्थिति P है। माना खम्भे की फाटक B से दूरी x मीटर है अर्थात् BP = x मीटर है। अब खम्भे की दोनों फाटकों की दूरियों को अन्तर = AP - BP (या BP - AP) = 7 मीटर है। इसलिये, AP = 7 + BP = (7 + x) मीटर होगा।



साथ ही, $AB = 17$ मीटर है। चूँकि AB व्यास है, इसलिए

$$\angle APB = 90^\circ$$

चूँकि अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

इसलिए $(AP)^2 + (BP)^2 = (AB)^2$

पाइथागोरस प्रमेय से

अर्थात् $(7 + x)^2 + x^2 = (17)^2$

अर्थात् $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 289$

अर्थात् $2x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$

अर्थात् $2x^2 + 14x - 240 = 0$

या $2(x^2 + 7x - 120) = 0$

या $x^2 + 7x - 120 = \frac{0}{2} = 0$

या $x^2 + 7x - 120 = 0$

गुणनखण्ड करने पर

$$x^2 + 15x - 8x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 15) - 8(x + 15) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 8)(x + 15) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ या } -15 \text{ है।}$$

चूँकि x खम्भे की फाटक B के बीच की दूरी है। यह धनात्मक होनी चाहिए इसलिए $x = -15$ को छोड़ देते हैं। अतः $x = 8$ है। इस प्रकार, खम्भे की पार्क की परिसीमा पर फाटक B से 8 मीटर और फाटक A से

$$\sqrt{(17)^2 - (8)^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ मीटर}$$

की दूरी पर गाड़ना है। उत्तर