समान्तर श्रेढ़ी

Ex 5.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d ज्ञात कीजिए-

(i) 6, 9, 12, 15, ...
(ii) – 7, – 9, – 11, – 13, ...
(iii) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \ldots$
(iv) 1, – 2, – 5, – 8, ...
(v) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
(vi) 3, 1, – 1, – 3, ...
(vi) 3, – 2, – 7, – 12, ...

हल: (i) दी गई समान्तर श्रेढ़ी है-
6, 9, 12, 15, ...
स्पष्टतः a = 6 और d = 9 – 6 = 3 है।

(ii) दी गई समान्तर श्रेढी है-
– 7, – 9, – 11, – 13, ...
स्पष्टतः a = – 7 और d = – 9 – (- 7) = – 9 + 7 = – 2 है।

(iii) दी गई समान्तर श्रेढ़ी है-
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \ldots$
स्पष्टत: a = 3 और $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$है।

(iv) दी गई समान्तर श्रेढ़ी है-
1, – 2, – 5, – 8, ...
स्पष्टतः a = 1 और d = – 2 – (1) = – 2 – 1 = – 3 है।

(v) दी गई समान्तर श्रेढ़ी है-
$-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
स्पष्टत: a = -1 और $d = \frac{1}{4} - (-1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$है।

(vi) दी गई समान्तर श्रेढ़ी है-
3, 1, – 1, – 3, ...
स्पष्टतः 4 = 3 और d = 1 – 3 = – 2 है।

(vii) दी गई समान्तर श्रेढी है-
3, – 2, – 7, – 12, ...
स्पष्टतः 4 = 3 और d = – 2 – 3 = – 5 है।

प्रश्न 2. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d निम्नानुसार दिया हुआ है, तो उस श्रेढ़ी के प्रथम चार पद लिखिए।
(i) a = – 1, $d=\frac{1}{2}$
(ii) $a=\frac{1}{3}, \quad d=\frac{4}{3}$
(iii) a = 0.6, d = 1.1
(iv) a = 4, d = – 3 |
(v) a = 11, d = – 4
(vi) a = -1.25, d = – 0.25
(vii) a = 20, $d=\frac{-3}{4}$

हल: ∵ यदि प्रथम पद a और सार्वअन्तर d हो, तो a और d के विभिन्न मानों के लिए a, d + d, a + 2d, a + 3d, ... एक समान्तर श्रेढी दर्शाती है।
(i) a = – 1, $d=\frac{1}{2}$को a, a + d, a + 2d, a + 3d.... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढ़ी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-

$$-1,\ -1+\frac{1}{2},\ -1+2\times\frac{1}{2},\ -1+3\times\frac{1}{2}$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$$

अर्थात् यह $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$ है। **उत्तर**

(ii) $a=\frac{1}{3}$और $d=\frac{4}{3}$को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{4}{3}, \frac{1}{3}+2\times\frac{4}{3}, \frac{1}{3}+3\times\frac{4}{3}$$

अर्थात् यह $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ है। **उत्तर**

(iii) a = 0.6, d = 1.1 को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है
0.6, 0.6 + 1.1, 0.6 + 2 × 1.1, 0.6 + 3 × 1.1
अर्थात् यह 0.6, 1.7, 2.8, 3.9 है। उत्तर

(iv) a = 4, d = – 3 को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढ़ी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-

4, 4 – 3, 4 + 2 × (-3), 4 + 3 × (-3)
4, 1, 4 – 6, 4 – 9,
4, 1, – 2, – 5
अर्थात् यह 4, 1, – 2, – 5 है। उत्तर

(v) a = 11, d = – 4 को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढ़ी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-
11, 11 + (-4), 11 + 2 × (- 4), 11 + 3(-4)
11, 7, 3, – 1
अर्थात् यह 11, 7, 3, – 1 है। उत्तर

(vi) a = – 1.25, d = – 0.25 को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-
– 1.25, – 1.25 + (- 0.25), – 1.25 + 2 × (-0.25)
– 1.25 + 3 × (- 0.25)
– 1.25, – 1.25 – 0.25, – 1.25 – 0.50, – 1.25 – 0.75
अर्थात् यह – 1.25, – 1.50, – 1.75, – 2.00 है। उत्तर

(vii) a = 20, $d = \frac{-3}{4}$ को a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... में रखने पर हम अभीष्ट समान्तर श्रेढी प्राप्त करते हैं, जो निम्न है-

$$20, 20 - \frac{3}{4}, 20 + 2 \times \left(\frac{-3}{4}\right), 20 + 3 \times \left(\frac{-3}{4}\right)$$

अर्थात् यह 20, $\frac{77}{4}, \frac{74}{4}, \frac{71}{4}$ है। उत्तर

प्रश्न 3. संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए। यदि इनमें कोई समान्तर श्रेढ़ी है तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा इसके अगले चार पद भी लिखिए।

(i) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$ **(ii)** $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, ...$

(iii) $a, a^2, a^3, a^4, ...$ **(iv)** $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$

(v) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$ **(vi)** $a, 2a, 3a, 4a, ...$

(vii) 0.2, 0.22, 0.222, ...

(viii) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, ...$

हल: (i) यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

और $$a_4 - a_3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

अर्थात् $a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है और इसका सार्वअन्तर $d = \frac{1}{2}$है।।
दिये गये अन्तिम पद के बाद, अगले चार पद होंगे-

$$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$4 + \frac{1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

और $$5 + \frac{1}{2} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$$

अतः $d = \frac{1}{2}$ और श्रेढ़ी के अगले चार पद 4, $\frac{9}{2}$, 5 तथा $\frac{11}{2}$ हैं। **उत्तर**

(ii) यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$a_3 - a_2 = \frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

और $$a_4 - a_3 = \frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

अर्थात् $a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है और इसका सार्वअन्तर d = 0 (शून्य) है।
दिये गये अन्तिम पद के बाद, अगले चार पद होंगे-
$\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ और $\frac{-1}{2}$
अतः श्रेणी का सार्वअन्तर d = 0 तथा अगले चार पद $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ तथा $\frac{-1}{2}$ हैं। उत्तर 2

(iii) यहाँ $a_2 - a_1 = a^2 - a = a(a - 1)$
$a_3 - a_2 = a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$
अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी नहीं बनाती है। उत्तर

(iv) यहाँ

$$a_2 - a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3}$$
$$a_2 - a_1 = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$$
$$a_3 - a_2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$
$$a_3 - a_2 = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ है।
अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी नहीं है। उत्तर

(v) यहाँ

$$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2}$$
$$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2}$$
$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

और $a_4 - a_3 = \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{9 \times 2}$

$$= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

अर्थात् $a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है और इसका सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ है।।
दिये गये अन्तिम पद के बाद, अगले चार पद होंगे-

$$\sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$
$$\sqrt{50} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{72}$$
$$\sqrt{72} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{98}$$

और $\sqrt{98} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} + \sqrt{2} = 8\sqrt{2} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{128}$

अतः सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ तथा श्रेणी के अगले चार पद $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$ तथा $\sqrt{128}$ हैं। उत्तर

(vi) यहाँ $a_2 - a_1 = 2a - a = a$
$a_3 - a_2 = 34 - 2a = a$
और $a_4 - a_3 = 4a - 3a = a$
अर्थात् $a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई। संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है

और इसका सार्वअन्तर d = a है।
दिये गये अन्तिम पद के बाद, अगले चार पद होंगे-
4a + a = 5a
5a + = 6a
6a + 2 = 7a
और 7a + a = 8a
अतः सार्वअन्तर d = a तथा श्रेणी के अगले चार पद 54, 64, 64 और 84 हैं। उत्तर

(vii) यहाँ $a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.22 - 0.20$
$a_2 - a_{12} = 0.02$
और $a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22$
$= 0.222 - 0.220$
$= 0.002$
$\because a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$
अतः दी गई सूची एक समान्तर श्रेढ़ी नहीं है। उत्तर

(viii) यहाँ

$$a_2 - a_1 = (3+\sqrt{2}) - 3 = \sqrt{2}$$

$$a_3 - a_2 = (3+2\sqrt{2}) - (3+\sqrt{2})$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

और

$$a_4 - a_3 = (3+3\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2})$$

$$= 3 + 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

अर्थात् $a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है और इसका सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ है।
दिये गये अन्तिम पद के बाद, अगले चार पद होंगे-

$$3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}(3+1)$$

$$= 3 + 4\sqrt{2}$$

$$3 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}(4+1)$$

$$= 3 + 5\sqrt{2}$$

$$3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}(5+1)$$

$$= 3 + 6\sqrt{2}$$

और

$$3 + 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}(6+1)$$

$$= 3 + 7\sqrt{2}$$

अतः सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$तथा श्रेणी के अगले चार पद $3 + 4\sqrt{2} 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$तथा $3 + 7\sqrt{2}$हैं। उत्तर

Ex 5.2

प्रश्न 1. ज्ञात कीजिए-
(i) समान्तर श्रेढ़ी 2, 7, 12, …… का 10 वाँ पद
(ii) समान्तर श्रेढ़ी $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \ldots\ldots$का 18वाँ पद
(iii) समान्तर श्रेढ़ी 9, 13, 17, 21, ….. का 24 वाँ पद

हल: (i) यहाँ a = 2, d = 7 – 2 = 5 और n = 10 हैं।
∵ $a_n = a + (n - 1)d$ है।।
∴ $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5$
$= 2 + 9 \times 5 = 2 + 45 = 47$
अतः दी हुई समान्तर श्रेढी (A.P) का 10वाँ पद 47 है। उत्तर

(ii) यहाँ $a = \sqrt{2}, d = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$और n = 18
∵ $a_n = a + (n - 1)d$ है।

$$\therefore \quad a_{18} = \sqrt{2} + (18 - 1) \times 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2} + 17 \times 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2} + 34\sqrt{2} = 35\sqrt{2}$$

अतः दी हुई समान्तर श्रेढ़ी (A.P) का 18वाँ पद $35\sqrt{2}$है। उत्तर

(iii) यहाँ a = 9, d = 13 – 9 = 4 और ॥ = 24
∵ $a_n = a + (n - 1)d$ है।
∴ $a_{24} = 9 + (24 - 1) \times 4$
$= 9 + 23 \times 4 = 9 + 92 = 101$
अतः दी हुई समान्तर श्रेढी (AP) का 24वाँ पद 101 है। उत्तर

प्रश्न 2. हल कीजिए-
(i) समान्तर श्रेढ़ी 21, 18, 15, ….. का कौनसा पद – 81 है?
(ii) समान्तर श्रेढ़ी 84, 80, 76, ….. का कौनसा पद शून्य है?
(iii) क्या संख्याओं के अनुक्रम 5, 11, 17, 23, … का कोई पद 301 है?
(iv) क्या समान्तर श्रेढ़ी 11, 8, 5, 2 का एक पद – 150 है?

हल: (i) यहाँ, 4 = 21, d= 18 – 21 = – 3 और $a_n = -81$ है। हमें n ज्ञात करना है।
∵ $a_n = a + (n - 1)d$
या $-81 = 21 + (n - 1) \times (-3)$
या $-81 = 21 - 3n + 3$

$3n = 21 + 3 + 81 = 105$
या $n = \frac{105}{3} = 35$
इसलिए दी हुई समान्तर श्रेढी (A.P) का 35वाँ पद – 81 है। उत्तर

(ii) यहाँ, $a = 84$, $d = 80 - 84 = -4$ और $a_n = 0$ (शून्य) है। हमें n ज्ञात करना है
$\because a_n = a + (n - 1)d$
अतः $0 = 84 + (n - 1) \times (-4)$
या $0 = 84 - 4n + 4$
या $4n = 88$
या $n = \frac{88}{4} = 22$
इसलिए दी हुई समान्तर श्रेढी (A,P) का 22 वाँ पद शून्य है। उत्तर

(iii) हमें प्राप्त है- $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$
चूँकि n = 1, 2, 3, आदि के लिए $a_{n+1} - a_n$ एकसमान संख्या होती है, इसलिए दी हुई सूची एक A.P. है।
यहाँ $a = 5$ और $d = 6$.
मान लीजिए इस A.P का वाँ पद 301 है।
हम जानते हैं कि $a_n = a + (n - 1)d$
इसलिए $301 = 5 + (n - 1) \times 6$
$301 = 6n - 1$
अतः $n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$
परन्तु n एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए अतः हम कह सकते हैं कि 301 संख्याओं की दी हुई सूची का पद नहीं है। उत्तर

(iv) यहाँ $a_2 - a_1 = 8 - 11 = -3$
$a_3 - a_2 = 5 - 8 = -3$
$a_4 - a_3 = 2 - 5 = -3$
$a_{n+1} - a_n$, n के सभी मानों के लिए समान है। अतः दी गई संख्याओं की सूची एक समान्तर श्रेढ़ी है। अब $a = 11$ और $d = -3$
माना दी गई समान्तर श्रेढी का n वाँ पद – 150 है।

$$\because \quad a_n = a + (n - 1)d$$
$$\text{अतः} \quad -150 = 11 + (n - 1) \times (-3)$$
$$\Rightarrow \quad -3(n - 1) = -150 - 11 = -161$$
$$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{-161}{-3} = \frac{161}{3}$$
$$\Rightarrow \quad n = \frac{161}{3} + 1 = \frac{164}{3}$$

परन्तु n एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए अतः हम कह सकते हैं कि – 150 संख्याओं की दी हुई सूची का पद नहीं है। उत्तर

प्रश्न 3. यदि समान्तर श्रेढ़ी का छठा पद तथा 17वाँ पद क्रमशः 19 तथा 41 हैं, तो 40वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है
$a_6 = a + (6 - 1)d = a + 5d = 19$ ......(1)
$a_{17} = a + (17 - 1)d = a + 16d = 41$ .....(2)
समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर
$a + 5d - a - 16d = 19 - 41$
$\Rightarrow -11d = -22$
$\therefore d = \frac{-22}{-11} = 2$
d का मान समीकरण (1) में रखने पर हमें प्राप्त होता है-
$a + 5 \times 2 = 19$
$\Rightarrow a + 10 = 19$ या $a = 19 - 10 = 9$
अतः $a = 9$ तथा $d = 2$ प्राप्त होता है।
इसलिए $a_{40} = a + (40 - 1)d$
$= a + 39d$ .....(3)
समीकरण (3) में a तथा 4 के मान रखने पर
$a_{40} = 9 + 39 \times 2$
$= 9 + 78 = 87$
अतः समान्तर श्रेढ़ी का 40वाँ पद 87 है। उत्तर

प्रश्न 4. किसी समान्तर श्रेढ़ी के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और – 8 हैं, तो इसका कौनसा पद शुन्य होगा?

हल: माना कि 'a' और 'd' क्रमशः दी गई A.P को प्रथम पद और सार्वअन्तर हैं।
दिया है कि-

$$a_3 = 4$$
$$a + (3 - 1)\, d = 4 \qquad [\because a_n = a + (n - 1)\, d]$$
$$a + 2d = 4 \qquad \text{.... (1)}$$
और
$$a_9 = -8$$
$$a + (9 - 1)\, d = -8 \qquad [\because a_n = a + (n - 1)\, d]$$
या
$$a + 8d = -8 \qquad \text{.... (2)}$$
अब, समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर
$$\begin{array}{r} a + 8d = -8 \\ \underset{-}{a} + \underset{-}{2d} = \underset{-}{4} \\ \hline 6d = -12 \end{array}$$
$d = \frac{-12}{6} = -2$
d का यह मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$a + 2 (- 2) = 4$
या $a – 4 = 4$
या $a = 4 + 4 = 8$
अब, $a_n = 0$ (दिया है)
$a + (n – 1) d = 0$
या $8 + (n – 1) (-2) = 0$
या $– 2 (n – 1) = – 8$
या $n – 1 = 4$
या $4 + 1 = 5$
अतः, A.P का 5वाँ पद शून्य है। उत्तर

प्रश्न 5. किसी समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है, तो समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि 'a' और 'd' दी गई A.P के प्रथम पद और सार्वअन्तर हैं।
दिया है कि
$a_3 = 16$
$a + (3 – 1) d = 16$
$a + 2d = 16$ ….(1)
प्रश्नानुसार
$a_7 – a_5 = 12$
$[a + (7 – 1) d] – [a + (5 – 1) d] = 12$
$a + 6d – 4 – 4d = 12$
$2d = 12$
$d = \frac{12}{2} = 6$
d का यह मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर
$a + 2 (6) = 16$
$a = 16 – 12 = 4$
अतः दी गई A.P हैं-4, 10, 16, 22, 28, ….. उत्तर

प्रश्न 6. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं ?

हल: तीन अंकों की संख्याओं की सूची 100, 101, 102, … 994, 999 3 अंकों की 7 से विभाज्य प्रथम संख्या = 105
और अन्तिम संख्या = 994
7 से विभाज्य तीन अंकों वाली संख्याएँ-105, 112, 119, ….., 994 हैं।
यहाँ $a = a_1 = 105, a_2 = 112, a_3 = 119$
और $a_n = 994$
$a_2 – a_1 = 112 – 105 = 7$
$a_3 – a_2 = 119 – 112 = 7$
$\therefore d = a_2 – a_1 = a_3 – a_2 = 7$

दिया है कि
$a_n = 994$
$a + (n - 1) d = 994$
या $105 + (n - 1) 7 = 994$
या $(n - 1) 7 = 994 - 105$
या $(n - 1) 7 = 889$
या $n - 1 = \frac{889}{7} = 127$
या $n = 127 + 1 = 128$
अतः, तीन अंकों वाली 128 संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं। उत्तर

प्रश्न 7. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ...- 62 का अन्तिम पद से 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ श्रेढ़ी का अन्तिम पद $l = -62$ है।
प्रथम पद $(a) = 10$ एवं सार्वअन्तर $(d) = 7 - 10 = -3$ है।
इस प्रकार अन्तिम पद से 11वाँ पद
$= l - (11 - 1)d$
$= -62 - 10 \times (-3)$
$= -62 + 30$
$= -32$
इस प्रकार अन्तिम पद से 11वाँ पद – 32 है। उत्तर

प्रश्न 8. समान्तर श्रेढ़ी 1, 4, 7, 10, ... 88 में अन्त से 12वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई समान्तर श्रेढ़ी 1, 4, 7, 10, ..., 88
प्रथम पद $(a) = 1$
सार्वअन्तर $(d) = 4 - 1 = 3$
अन्तिम पद $l = a_n = 88$
सूत्र, अन्त से वाँ पद $= l - (n - 1)d$
अन्त से 12वाँ पद $= 88 - (12 - 1) \times 3$
$= 88 - 11 \times 3$
$= 88 - 33 = 55$
अतः समान्तर श्रेढ़ी के अन्तिम पद से 12वाँ पद 55 है। उत्तर ।

प्रश्न 9. एक समान्तर श्रेढ़ी में 60 पद हैं। यदि उसका प्रथम पद तथा अन्तिम पद क्रमशः 7 तथा 125 हैं, तो उसका 32वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: माना समान्तर श्रेढ़ी का पहला पद a तथा सार्वअन्तर d है।
अब $a_n = a + (n - 1)d$
$\therefore 125 = 7 + (60 - 1)d$
या $125 = 7 + 59d$
या $59d = 118$

∴ $d=\frac{118}{59}=2$
इसलिए a_{32} = 7 + (32 – 1) × 2
= 7 + 31 × 2
= 7 + 62 = 69
अतः समान्तर श्रेढ़ी का 32वाँ पद 69 है। उत्तर

प्रश्न 10. चार संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि संख्याओं का योग 50 तथा सबसे बड़ी संख्या, सबसे छोटी संख्या की चार गुनी है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर श्रेढ़ी की चार संख्याएँ निम्न होंगी-
a – 3d, a – d, a + d, a + 3d
प्रश्नानुसार (प्रथम शर्त के अनुसार)
a – 3d + a – d + a + d + a + 3d = 50
⇒ 4a = 50
⇒ $a=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}$
प्रश्नानुसार द्वितीय शर्त के अनुसार
(a + 3d) = 4(a – 3d)
⇒ a + 3d = 44 – 12d
⇒ 12d + 3d = 4a – a
⇒ 15d = 34
अतः $d=\frac{3a}{15}=\frac{1}{5}a$
अत: a, का मान रखने पर
$d=\frac{1}{5}\times\frac{25}{2}=\frac{5}{2}$
अत: संख्याएँ होंगी-
$$\frac{25}{2}-3\times\frac{5}{2},\frac{25}{2}-\frac{5}{2},\frac{25}{2}+\frac{5}{2},\frac{25}{2}+3\times\frac{5}{2}$$
= 5, 10, 15, 20 अतः समान्तर श्रेढ़ी की चार संख्याएँ 5, 10, 15 तथा 20 हैं। उत्तर

Ex 5.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए
(i) 1, 3, 5, 7, …., 12 पदों तक
(ii) 8, 3, – 2, …., 22 पदों तक
(iii) $\frac{1}{15},\frac{1}{12},\frac{1}{10},\ldots\ldots\ldots,11$ पदों तक

हल: (i) दिया है- a = 1, d = 5 – 3 = 2 और n = 12 है। हम जानते हैं-

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

अत:
$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 1 + (12 - 1) \times 2]$$
$$= 6[2 + 22] = 6 \times 24 = 144$$

इसलिए दी हुई A.P के प्रथम 12 पदों का योग 144 है। उत्तर

(ii) दिया है-a = 8, d = 3 – 8 = – 5 और n = 22 है। हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

अत:
$$S_{22} = \frac{22}{2}[2 \times 8 + (22 - 1) \times (-5)]$$
$$= 11[16 + 21 \times (-5)]$$
$$= 11[16 - 105]$$
$$= 11 \times (-89) = -979$$

इसलिए दी हुई A.P के प्रथम 22 पदों का योग – 979 है। उत्तर

(iii) दिया है- $a = \frac{1}{15}, d = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$ और n = 11 हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

अत:
$$S_{11} = \frac{11}{2}\left[2\times\frac{1}{15}+(11-1)\times\frac{1}{60}\right]$$

⇒
$$S_{11} = \frac{11}{2}\left[\frac{2}{15}+\frac{10}{60}\right]$$
$$= \frac{11}{2}\times\frac{18}{60}=\frac{33}{20}$$

इसलिए दी हुई A.P के प्रथम 11 पदों का योग $\frac{33}{20}$ है। उत्तर

प्रश्न 2. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए-

(i) 3 + 11 + 19 +, …., + 803

(ii) 7 + $10\frac{1}{2}$ + 14 + ,…, + 84

हल: (i) यहाँ अन्तिम पद दिया है। पहले हमें पदों की संख्या ज्ञात करनी होगी। दिया है-a = 3, d = 11 – 3 = 8, l = a_n = 803

इसलिए $a_n = a + (n – 1)d$

मान रखने पर

$$803 = 3 + (n - 1) \times 8$$

$$\Rightarrow \quad 800 = (n - 1) \times 8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{800}{8} = n - 1$$

$$100 = n - 1$$

$$\therefore n = 101$$

हम जानते हैं– $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$$S_{101} = \frac{101}{2}(3 + 803) = \frac{101 \times 806}{2}$$

$$= 101 \times 403 = 40703$$ **उत्तर**

(ii) यहाँ अन्तिम पद दिया है। पहले हमें पदों की संख्या ज्ञात करनी होगी। $a = 7, d = 10\frac{1}{2} - 7 = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $a_n = l = 84$

हम जानते हैं-

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow \quad 84 = 7 + (n - 1) \times \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 84 - 7 = \frac{(n-1) \times 7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 77 \times \frac{2}{7} = n - 1$$

या $n - 1 = 22$

$$\therefore n = 22 + 1 = 23$$

हम जानते हैं– $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

अत: $S_{23} = \frac{23}{2}(7+84) = \frac{23}{2} \times 91$

$$= \frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 3. पदों की संख्या ज्ञात कीजिए

(i) समान्तर श्रेढ़ी 9, 17, 25, ... के कितने पद लिए जायें कि उनका योगफल 636 हो ?

(ii) समान्तर श्रेढ़ी 63, 60, 57, ... के कितने पद लिए जायें कि उनका योगफल 693 हो ?

हल: (i) दिया है-A.P 9, 17, 25, ...
यहाँ a = 9, d = 17 – 9 = 8
क्योंकि S_n = 636

$$\frac{n}{2}[2a + (n - 1) d] = 636$$

या $$\frac{n}{2}[2 (9) + (n - 1) 8] = 636$$

या $$\frac{n}{2}[18 + 8n - 8] = 636$$

या $$n [4n + 5] = 636$$

या $$4n^2 + 5n - 636 = 0$$

या $$a = 4, b = 5, c = -636$$

$$D = (5)^2 - 4 \times 4 \times (-636)$$
$$= 25 + 10176$$
$$= 10201$$

$\therefore$ $$n = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{10201}}{2 \times 4} = \frac{-5 \pm 101}{8}$$

$$= \frac{-106}{8} \text{ या } \frac{96}{8} = -\frac{53}{4} \text{ या } 12$$

$\because$ n ऋणात्मक नहीं हो सकता।

अत: $n = -\frac{53}{4}$ को छोड़ने पर

$\therefore$ $$n = 12$$

अतः दी गई A.P के 12 पदों का योग 636 है। उत्तर

(ii) दिया है-A.P 63, 60, 57, ...
यहाँ a = 63, d = 60 – 63 = – 3, S_n = 693

हम जानते हैं– $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

मान रखने पर– $$693 = \frac{n}{2}[2 \times 63 + (n - 1) \times (-3)]$$

$$\Rightarrow \quad 693 \times 2 = n[126 - 3n + 3]$$
$$\Rightarrow \quad 1386 = n[129 - 3n]$$
$$\Rightarrow \quad 3n^2 - 129n + 1386 = 0$$
या $$3[n^2 - 43n + 462] = 0$$
या $$n^2 - 43n + 462 = \frac{0}{3} = 0$$
$$\Rightarrow \quad n^2 - 21n - 22n + 462 = 0$$
$$\Rightarrow \quad n(n - 21) - 22(n - 21) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (n - 21)(n - 22) = 0$$
अत: $$n = 21, 22$$

अतः दी गई A.P के 21 या 22 पदों का योग 693 है। उत्तर

प्रश्न 4. निम्न श्रेढ़ियों के पहले 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका वाँ पद दिया है

(i) $a_n = 3 + 4n$

(ii) $a_n = 7 – 3n$

हल: (i) दिया है-$a_n = 3 + 4n$ n = 1, 2, 3, 4, ….. n रखने पर

श्रेढ़ी 7, 11, 15, 19, ….. (3 + 4n) एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका सार्वअन्तर d = 4 है।

हम जानते हैं-

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

इसलिए $$S_{25} = \frac{25}{2}[2 \times 7 + (25 - 1) \times 4]$$
$$= \frac{25}{2}[14 + 96] = \frac{25}{2} \times 110$$
$$= 25 \times 55 = 1375$$ उत्तर

(ii) दिया है-$a_n = 7 – 3\ n$

n = 1, 2, 3, 4, ….. n रखने पर

श्रेढी 4, 1, – 2, 5, – 8…… (7 – 3n) एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a = 4 और सार्वअन्तर d = 1

– 4 = – 3 है।

हम जानते हैं–
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_{25} = \frac{25}{2}[2 \times 4 + (25-1) \times (-3)]$$
$$= \frac{25}{2}[8 - 72] = \frac{-25 \times 64}{2}$$
$$= -25 \times 32 = -800$$
अतः $S_{25} = -800$ उत्तर

प्रश्न 5. एक समान्तर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिये जिसमें द्वितीय तथा तृतीय पद क्रमशः 14 तथा 18 हैं।

हल: माना कि 'a' और 'd' प्रथम पद और सार्व अन्तर है।
दिया गया है कि $a_2 = 14$; $a_3 = 18$
और n = 51

$\because \quad a_2 = 14$

$a + (2-1)d = 14$

या $a + d = 14$

$a = 14 - d$ .....(1)

और $a_3 = 18$ (दिया है)

$\therefore \quad a + (3-1)d = 18$

या $a + 2d = 18$

समी. (1) से मान रखने पर

या $14 - d + 2d = 18$

या $d = 18 - 14 = 4$

या $d = 4$

d का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a = 14 - 4 = 10$

अब,
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$\therefore$
$$S_n = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51-1)4]$$
$$= \frac{51}{2}[20 + 200]$$
$$= \frac{51}{2} \times 220 = 51 \times 110 = 5610$$

अतः, दी गई A.P के प्रथम 51 पदों का योग 5610 है। उत्तर

प्रश्न 6. किसी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्वअन्तर 9 हो तो समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या कितनी है तथा उनका योग क्या है?

हल: दिया है कि प्रथम पद = a= 17;
अन्तिम पद = l = a_n = 350
और सार्व अन्तर= d= 9
∵ l = a_n = 350
a + (n – 1) d= 350
17 + (n – 1)9 = 350
या 9 (n – 1) = 350 – 17 = 333

या $n - 1 = \frac{333}{9} = 37$

या $n = 37 + 1 = 38$

अब, $S_{38} = \frac{n}{2}[a + l]$

$= \frac{38}{2}[17 + 350]$

$= 19 \times 367 = 6973$

अतः दी गई A.P के 38 पदों का योग 6973 है। उत्तर

प्रश्न 7. 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य सभी विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य विषम संख्याएँ निम्न होंगी-
3, 9, 15, 21, ….., 999 एक समान्तर श्रेणी है।
अतः यहाँ पर दिया गया है-
प्रथम पद (a) = 3,
सार्वअन्तर (d) = 9 – 3 = 6,
l = a_n = 999
हम जानते हैं-
a_n = a + (n – 1)d
मान रखने पर-
999 = 3 + (n – 1) × 6
⇒ 996 = (n – 1) × 6
⇒ $(n-1) = \frac{996}{6} = 166$
n = 166 + 1 = 167
हमें यहाँ पर 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य विषम संख्याओं का योग ज्ञात करना है। इसलिए

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$S_{167} = \frac{167}{2}(3 + 999)$$

$$= \frac{167}{2} \times 1002 = 167 \times 501$$

$$= 83667$$

अतः अभीष्ट योगफल = 83667 उत्तर

प्रश्न 8. एक समान्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद 8 है, nवाँ घद 33 है तथा पहले n पदों का योग 123 है तो n तथा सार्वअन्तर d को ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-

प्रथम पद $a = 8$

$l = a_n = 33$

$S_n = 123$

$n = ?, \quad d = ?$

हम जानते हैं– $a_n = a + (n - 1)d$

मान रखने पर

$$33 = 8 + (n - 1)d$$

$\Rightarrow$ $25 = (n - 1)d$ .....(1)

तथा $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

मान रखने पर

$$123 = \frac{n}{2}(8 + 33)$$

$\Rightarrow$ $123 \times 2 = 41n$

या $n = \frac{123 \times 2}{41} = 3 \times 2 = 6$

अत: $n = 6$

समीकरण (1) में $n = 6$ रखने पर

$$25 = (6 - 1)d$$

$\Rightarrow$ $25 = 5d$

$\therefore$ $d = \frac{25}{5} = 5$

अतः n = 6 तथा d = 5 है। उत्तर

प्रश्न 9. 280 रु. की राशि चार पुरस्कार देने के लिए रखी गई है। यदि प्रथम पुरस्कार के बाद का प्रत्येक पुरस्कार, अपने ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम हो, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पुरस्कार क्रमवार a – 3d, a – d, a + d तथा a + 3d है।
इसलिए इनका योग करने पर
a – 3d + a – d + a + d + a + 3d = 280
⇒ 4a = 280
या $a = \frac{280}{4} = 70$
प्रश्नानुसार दिया गया है-
(a – 1) – (a – 3d) = 20
⇒ a – d – a + 3d = 20
⇒ 2d = 20
$\therefore d = \frac{20}{2} = 10$
इसलिए चार पुरस्कार रुपयों में इस प्रकार हैं-
70 – 3 × 10, 70 – 10, 70 + 10, 70 + 3 × 10
40, 60, 80, 100
अतः पहला पुरस्कार ₹ 100, शेष पुरस्कार क्रम से ₹ 20 – 20 कम है।
अतः पुरस्कार ₹ 100, ₹ 80, ₹ 60 और 40 है। उत्तर

प्रश्न 10. एक टेलीविजन सेटों का निर्माता, तीसरे वर्ष 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए
(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन
(ii) 10वें वर्ष में उत्पादन
(iii) 7 वर्षों में कुल उत्पादन

हल: (i) चूंकि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, इसलिए पहले, दूसरे, तीसरे.... वर्षों में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्याएँ एक A.P में होंगी। आइये हम यदि वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की, संख्या को a_n से व्यक्त करें।
दिया गया है|-
a_3 = 600 तथा a_7 = 700
प्रश्नानुसार a_3 = a + 2d = 600 .....(1)
और a_7 = a + 6d = 700 .....(2)
समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर
4d = 100
$\therefore d = \frac{100}{4} = 25$
d का मान समीकरण (1) में रखने पर हमें a = 550 प्राप्त होता है। अतः प्रथम वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 550 है। उत्तर

(ii) अब
$a_{10} = a + (10 – 1)d = a + 9d$
मान रखने पर $a_{10} = 550 + 9 \times 25$
$a_{10} = 550 + 225$
$= 775$
अतः 10वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 775 है। उत्तर

(iii) साथ ही

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore \quad S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150]$$

$$= \frac{7 \times 1250}{2} = 7 \times 625$$

$$= 4375$$

अतः प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादित हुए सभी टी.वी. सेटों की संख्या 4375 है। उत्तर

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 5

प्रश्न 1. दो समान्तर श्रेढियों को सार्वअन्तर समान है। उनमें से एक का पहला पद 8 है और दूसरे का 3 है। उनके 30वें पदों के बीच का अन्तर है-

(क) 11 (ख) 3 (ग) 8 (घ) 5

प्रश्न 2. यदि 18, a, b, – 3 समान्तर श्रेढ़ी में है तो a + b =

(क) 19 (ख) 7 (ग) 11 (घ) 15

प्रश्न 3. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 7वाँ तथा 13वाँ पद क्रमशः 34 तथा 64 है, तो इसका 18वाँ पद है-

(क) 89 (ख) 88 (ग) 87 (घ) 90

प्रश्न 4. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी को प्रथम पद 2 एवं सार्वअन्तर 8 है तथा n पदों का योग 90 है, तो ॥ का मान होगा

(क) 3 (ख) 4 (ग) 5 (घ) 6.

प्रश्न 5. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $3n^2 + 5n$ है, तो 164 इसका कौनसा पद है-

(क) 12वाँ (ख) 15वाँ (ग) 27वाँ (घ) 20वाँ

प्रश्न 6. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल S_n है तथा $S_{2n} = 3S_n$ है, तो S_{3n} : S_n होगा-

(क) 10 (ख) 11 (ग) 6 (घ) 4

प्रश्न 7. एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 1 तथा 11 है। यदि इसके पदों का योगफल 36 है, तो इसके पदों की संख्या होगी-

(क) 5 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 11

उत्तर-तालिका 1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ग) 5. (ग) 6. (ग) 7. (ख)

प्रश्न 8. समान्तर श्रेढ़ी 3, 5, 7, 9, ... 201 का अन्त से 5वाँ पद लिखिए।

हल: दी गई समान्तर श्रेढी 3, 5, 7, 9, ... 201
प्रथम पद (a) = 3
सार्वअन्तर (d) = 5 – 3 = 2
अन्तिम पद (a_n) = 201
सूत्र, अन्त से आवाँ पद = l – (n – 1)d
= 201 – (5 – 1) × 2
= 201 – 4 × 2
= 201 – 8 = 193
अतः अन्त से 5वाँ पद 193 है। उत्तर

प्रश्न 9. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद $\frac{4}{5}$, a, 2 हैं, तो a का मान लिखिए।

हल: संख्यायें $\frac{4}{5}$, a, 2 समान्तर श्रेढ़ी में हैं।
इसलिए

संख्यायें $\frac{4}{5}$, a, 2 समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

इसलिए $\left(a-\frac{4}{5}\right) = (2 - a)$

$\Rightarrow \quad a + a = 2+\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$

$\Rightarrow \quad 2a = \frac{14}{5}$

$\therefore \quad a = \frac{14}{5\times 2}=\frac{7}{5}$ उत्तर

प्रश्न 10. प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिये S = 1 + 2 + 3 + ….. + 1000 है।
समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम ॥ पदों के योग के सूत्र $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।
$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000)$
= 500 × 1001
= 500500
अतः प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग 500500 है। उत्तर

प्रश्न 11. क्या संख्याओं को अनुक्रम 5, 11, 17, 23, …. में कोई पद 299 है ?

हल: हमें प्राप्त है-
$a_2 - a_1 1$ = 11 – 5 = 6,
$a_3 - a_2$ = 17 – 11 = 6,
$a_4 - a_3$ = 23 – 17 = 6
चूँकि n = 1, 2, 3 आदि के लिए $a_{n+1} - a_n$ एक समान संख्या होती है, इसलिए दी हुई सूची एक A.P. है।
यहाँ दिया है-a = 5 और d = 11 – 5 = 6
मान लीजिए इस A.P का वाँ पद 299 है।
हम जानते हैं कि $a_n = a + (n - 1)d$
इसलिए 299 = 5 + (n – 1) × 6
⇒ 294 = 6n – 6 ⇒ 6n = 300
$n = \frac{300}{6} = 50$
यहाँ पर n एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त हो रहा है। इसलिए 299 संख्याओं की दी हुई सूची का पद होगा।
उत्तर

प्रश्न 12. समान्तर श्रेढ़ी $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \ldots\ldots$ का कौनसा पद, प्रथम ऋणात्मक पद है?

हल: दिया है-
प्रथम पद (a) = 20
सार्वअन्तर (d) = $19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$
प्रश्न में पूछा गया है कि प्रथम ऋणात्मक पद कौनसा है इसे ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसा पद ज्ञात करना होगा जिस पर a_n, का मान शून्य हो।
चूंकि श्रेढ़ी घटते क्रम में है अतः शून्य के बाद वाला पद ही पहला ऋणात्मक पद होगा।

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 20 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}(n-1) = 20$$

$$\Rightarrow \quad (n-1) = \frac{20 \times 4}{3} = \frac{80}{3}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{80}{3} + 1 = \frac{83}{3} = 27.67$$

चूँकि n एक पूर्णांक है। इसलिए n का मान 28 होगा अतः 28वाँ पद ही प्रथम ऋणात्मक पद है।

प्रश्न 13. चार संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि उनका योग 20 तथा उनके वर्गों को योग 120 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना चार संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में निम्न हैं-
a – 3d, a – d, a + d, a + 3d
प्रश्नानुसार (पहली शर्त के अनुसार)
a – 3d + a – d + a +d + a + 3d = 20
⇒ 4a = 20
⇒ $a = \frac{20}{4} = 5$
प्रश्नानुसार (दूसरी शर्त के अनुसार)
$(a-3d)^2 + (a-d)^2 + (a+d)^2 + (a+3d)^2 = 120$
⇒ $(a-3d)^2 + (a+3d)^2 + (a-d)^2 + (a+d)^2 = 120$
⇒ $a^2 - 6ad + 9d^2 + a^2 + 6ad + 9d^2 + a^2 - 2ad + d^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 120$
⇒ $2a^2 + 18d^2 + 2a^2 + 2d^2 = 120$
⇒ $4a^2 + 20d^2 = 120$
⇒ $a^2 + 5d^2 = \frac{120}{4} = 30$
मान रखने पर
$(5)^2 + 5d^2 = 30$
⇒ $5d^2 = 5$

$d^2 = 1$ या $d = \pm 1$
जब $a = 1$ तब संख्याएँ 2, 4, 6, 8
जब $d = -1$ तब संख्याएँ 8, 6, 4, 2 उत्तर

प्रश्न 14. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $\frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{2}$ हो, तो उसका 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-

$$S_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{2} = \frac{3n^2 + 5n}{2}$$

$$S_n = \frac{n(3n+5)}{2}$$

हम जानते हैं–

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = \frac{n(3n+5)}{2} - \frac{(n-1)(3(n-1)+5)}{2}$$

$$= \frac{n(3n+5)}{2} - \frac{(n-1)(3n+2)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n - 3n^2 - 2n + 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{6n+2}{2} = 3n + 1$$

अत: $a_n = 3n + 1$

अतः $a_{22} = 3 \times 25 + 1 = 75 + 1 = 76$
अतः 25वाँ पद 76 होगा। उत्तर

प्रश्न 15. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप में संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइये कि x का एक मान ऐसा है कि ४ से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद आने वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है।x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए ‘x’ किसी मकान की संख्या को व्यक्त करता है। यहाँ $a = a_1 = 1$; $d = 1$
प्रश्न के अनुसार,
$S_{x-1} = S_{49} - S_x$

$$\frac{x-1}{2}[2\ (1) + (x - 1 - 1)\ (1)] = \frac{49}{2}[1 + 49] - \frac{x}{2}[2\ (1) + (x - 1)\ (1)]$$

$$\left[\text{सूत्रों } S_n = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)\ d] \quad \text{और } S_n = \frac{n}{2}\ (a + l) \text{ का प्रयोग करने पर}\right]$$

या $$\frac{x-1}{2}[2 + x - 2] = \frac{49}{2}\ (50) - \frac{x}{2}[2 + x - 1]$$

या $$\frac{x(x-1)}{2} = 49\ (25) - \frac{x\ (x+1)}{2}$$

या $$\frac{x}{2}[x - 1 + x + 1] = 1225$$

$$\frac{x}{2} \times 2x = 1225$$

या $$x^2 = 1225$$

या $$x = 35$$

अतः x को मान 35 है। उत्तर

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद 2 तथा सार्व अन्तर 3 हो, तो समान्तर श्रेढ़ी होगी-
(A) 2, 5, 8, 11, ...
(B) 2, 6, 18, 54, ...
(C) 2, 4, – 1, 3, ...
(D) 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...

प्रश्न 2. 16 पदों वाली समान्तर श्रेढी 2, 5, 8, 11, ... का अन्तिम पद होगा
(A) 47
(B) 48
(C) 49
(D) 46

प्रश्न 3. यदि समान्तर श्रेढी का प्रथम पद 5 और पाँचवाँ पद 17 हो, तो पाँच पदों का योग होगा
(A) 55
(B) 56
(C) 57
(D) 58

प्रश्न 4. 3 के प्रथम पाँच गुणजों का योगफल है
(A) 45
(B) 55
(C) 65
(D) 75

प्रश्न 5. समान्तर श्रेणी 21, 42, 63, 84,……….. का कौनसा पद 210 है?
(A) 9th
(B) 10th
(C) 11th.
(D) 12th

प्रश्न 6. श्रेढी a + b, a – b, a – 3b, ….. के 22 पदों का योग होगा
(A) 22 (a – 20b)
(B) 22 (20b – a)
(C) 22 (20a – b)
(D) 22 (d — b)

प्रश्न 7. श्रेढ़ी – 4, – 1, 2, 5, ….. का 10वाँ पद है
(A) 23
(B) – 23
(C) 32
(D) – 32

प्रश्न 8. समान्तर श्रेढी 7, 10, 13, ……, 43 में पदों की संख्या है
(A) 13
(B) 12
(C) 17
(D) 11

प्रश्न 9. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 तथा पदों का योगफल 400 हो, तो पदों की संख्या होगी-
(A) 8

(B) 10
(C) 16
(D) 20

प्रश्न 10. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 7वाँ पद (2n + 1) है, तो उसके प्रथम तीन पदों का योगफल है
(A) 6n + 3
(B) 15
(C) 12
(D) 21

उत्तर-तालिका 1. (A) 2. (A) 3. (A) 4. (A) 5. (B) 6. (A) 7. (A) 8. (A) 9. (C) 10. (B)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. समान्तर श्रेढ़ी 1, – 2, 5, – 8, ….. का सार्व अन्तर तथा अगले तीन पद लिखिए।

हल: सार्व अन्तर (d) = – 2 – 1 = – 3
अगले पद $a_5 = -11$, $a_6 = -14$, $a_7 = -18$ उत्तर

प्रश्न 2. समान्तर श्रेढी 8, 6, 4, ….. का 9 पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम पद (a) = 8
सार्व अन्तर (d) = 6 – 8 = – 2
$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$\therefore \quad \mathrm{S}_9 = \frac{9}{2}[2 \times 8 + (9-1) \times (-2)]$
$= \frac{9}{2}[16 - 16] = 0$ उत्तर

प्रश्न 3. m के किस मान के लिए 10, m – 2 समान्तर श्रेढ़ी में होंगे?

हल: 10, m, – 2 A.P में है।
∴ m – 10 = – 2 – m
m + m = – 2 + 10 = 8
2m = 8
$\therefore m = \frac{8}{2} = 4$ उत्तर

प्रश्न 4. यदि $a_n = 9 - 5n$ एक समान्तर श्रेढी (A.P.) का nवाँ पद है, तो सार्व अन्तर लिखिये।

हल: दिया गया है-
$a_n = 9 – 5n$
n = 1, 2, 3, रखने पर
$a_1 = 9 – 5(1) = 4$
$a_2 = 9 – 5(2) = 9 – 10 = – 1$
$a_3 = 9 – 5(3) = 9 – 15 = – 6$
A.P के लिये सार्वअन्तर (d) = $a_2 – a_1 = a_2 – a_2$
d = – 1 – 4 = – 5 उत्तर

प्रश्न 5. समान्तर श्रेढ़ी 4, 1, -2, -5 …… के अगले दो पद लिखिए।

हल: दी गई श्रेढी 4, 1, -2, -5 ……
श्रेढ़ी का सार्वअन्तर d = 1 – 4 = – 3
अतः 5वाँ पद (a_5) = – 5 + (-3) = – 5 – 3 = – 8
6ठा पद (a_6) = – 8 + (-3) = -8 – 3 = -11
अर्थात् $a_5 = – 8$ व $a_6 = -11$ उत्तर

प्रश्न 6. समान्तर श्रेढ़ी 7, 5, 3, 1, -1, -3, …… को सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर श्रेढी 7, 5, 3, 1, -1, -3, ……
∵ सार्वअन्तर = $a_2 – a_1$
यहाँ $a_1 = 7, a_2 = 5$ ∴ सार्वअन्तर (d) = 5 – 7 = -2 उत्तर

प्रश्न 7. A.P -17, -12, -7, …………….. में 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ a = -17, d = -12 – (-17) = -12 + 17 = 5
और n = 11
चूंकि $a_n = a + (n – 1)d$ है।
इसलिएं $a_{11} = -17 + (11 – 1) × 5$
= -17 + 10 × 5
= -17 + 50 = 33
अतः दी हुई A.P का 11वाँ पद 33 है। उत्तर

प्रश्न 8. समान्तर श्रेढी का व्यापक पद ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

हल: $a_n = a + (n – 1)d$

प्रश्न 9. समान्तर श्रेढ़ी के ॥n पदों को योगफल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

हल: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

प्रश्न 10. रिक्त खाने के पद का मान ज्ञात कीजिए यदि ये समान्तर श्रेढी

$2, \square, 26$

हल:
$a_1 = a = 2$
और $a_3 = a + 2d = 26$
या $2 + 2d = 26$
या $2d = 24$ या $d = 12$
इसलिए लुप्त पद $a_2 = a + d = 2 + 12 = 14$
अतः रिक्त बॉक्स को पद $a_2 = 14$ उत्तर

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. संख्याओं की निम्नलिखित अनुक्रमों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए-
(i) 4, 10, 16, 22, ...
(ii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, ...

हल: (i) $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$
$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$
$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$
अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर '6' प्राप्त हो रहा है। अतः दिया गया अनुक्रम समान्तर श्रेढी है तथा इसका सार्वअन्तर (d) = 6 है।

(ii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$
$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$
$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$
अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर समान प्राप्त नहीं हो रहा है। अतः यह सूची समान्तर श्रेढ़ी नहीं है।

प्रश्न 2. निम्न समान्तर श्रेढ़ियों के सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा उनके अगले चार पद भी लिखिए
(i) 0, – 3, – 6, – 9, ...
(ii) $-1, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}, \ldots$

हल:
(i) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots$ है । अतः यहाँ
$a_2 - a_1 = -3 - 0 = -3$
$a_3 - a_2 = -6 - (-3) = -3$
$a_4 - a_3 = -9 - (-6) = -3$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर :-3" समान है। अतः सार्वअन्तर 'd = – 3 है, अतः अगले चार पद निम्न प्रकार होंगे-
$a_5 = a_4 + d = -9 + (-3) = -12$
$a_6 = a_5 + d = -12 + (-3) = -15$
$a_7 = a_6 + d = -15 + (-3) = -18$
$a_8 = a_7 + d = -18 + (-3) = -21$

(ii) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots$ है अतः यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{-5}{6} - (-1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{-2}{3} - \frac{(-5)}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर $\frac{1}{6}$ समान है। अतः सार्वअन्तर, $d = \frac{1}{6}$
इस प्रकार अगले चार पद निम्न होंगे-

$$a_4 = a_3 + d = \frac{-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-4+1}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{-1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$a_7 = a_6 + d = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

प्रश्न 3. यदि किसी अनुक्रम का nवाँ पद $a_n = 4n + 5$ है, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक समान्तर श्रेढ़ी है तथा उसका सार्वअन्तर भी ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है- $a_n = 4n + 5$
n के स्थान पर (n+ 1) प्रतिस्थापित करने पर |
$a_{n+1} = 4(a + 1) + 5 = 4n + 9$
इसलिए $a_{n+1} - a_n = 4n + 9 - 4n - 5 = 4$
स्पष्ट है कि $a_{n+1} - a_n$ 'n' से स्वतंत्र है और 4 के बराबर है अतः दिया गया अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका सार्वअन्तर 4 है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में सम्बन्ध संख्याओं की सूची समान्तर श्रेढ़ी बनाती है और क्यों ?
(i) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि निकालने वाला पम्प प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।

(ii) खाते के प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि 10,000 रु. की राशि 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेश की जाती है।

हल: (i) माना कि बेलन में उपस्थित वायु की मात्रा x इकाई है।
प्रश्नानुसार बेलन में उपस्थित वायु की सूची निम्न दर्शाती है-

$$x,\ x-\frac{x}{4}=\frac{3}{4}x, \frac{3x}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3x}{4}=\frac{9x}{16}, \ldots$$

यहाँ $\frac{3x}{4}-x=\frac{-x}{4}$ और $\frac{9x}{16}-\frac{3x}{4}=\frac{9x-12x}{16}=\frac{-3x}{16}$

अर्थात् $\frac{3x}{4}-x\neq\frac{9x}{16}-\frac{3x}{4}$

इसलिए ये संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी नहीं बनाती हैं।

(ii) प्रश्नानुसार खाते में प्रथम वर्ष का मिश्रधन और उसके बाद के वर्षों में खाते में मिश्रधन निम्न द्वारा दर्शित है-

$$10000,\ 10000\left(1+\frac{8}{100}\right),\ 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2,\ \ldots$$

अर्थात् $10000,\ \frac{10000\times108}{100}, \frac{10000\times108\times108}{100\times100}, \ldots$

अर्थात् $10000,\ 10800,\ 11664,\ \ldots$

चूँकि $10800-10000\neq11664-10800$ है।

अतः यह सूची समान्तर श्रेढ़ी नहीं बनाती है।

प्रश्न 5. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ... का 30वाँ एवं वाँ (व्यापक पद) ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है- प्रथम पद (a) = 10
सार्वअन्तर (d) = 7 – 10 = – 3
n = 30
अतः इस समान्तर श्रेढ़ी का नावाँ पद a_n दिया जाता है।
$a_n = a + (n – 1)d$
मान रखने पर-
$a_{30} = 10 + (30 – 1) \times (-3)$.
$= 10 + 29 \times (-3) = 10 – 87 = – 77$
तथा व्यापक nवाँ पद $a_n = 10 + (n – 1) \times (-3)$
$a_n = 10 – 3(n – 1) = 13 – 3$
अतः अभीष्ट 30वाँ पद = – 77
एवं nवाँ व्यापक पद = 13 – 3n है।।

प्रश्न 6. समान्तर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद 639 है ?

हल: दिया है- प्रथम पद (a) = 3
सार्वअन्तर (d) = 15 – 3 = 12
माना nवाँ पद = 639 है। अर्थात् a_n = 639
हम जानते हैं–व्यापक पद $a_n = a + (n - 1)d$
मान रखने पर-
639 = 3 + (n – 1) × 12
या 639 = 3 + 12n – 12
या 648 = 12n
या $n = \frac{648}{12} = 54$
अतः दी गई समान्तर श्रेढी का 54वाँ पद 639 है।

प्रश्न 7. समान्तर श्रेढ़ी 7, 13, 19...205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है- प्रथम पद (a) = 7
सार्वअन्तर (d) = 13 – 7 = 6
माना nवाँ पद अन्तिम पद है। तब
$a_n = 205$
इस प्रकार nवाँ पद $a_n = a + (n - 1)d$
मान रखने पर-
205 = 7 + (n – 1) × 6
या 205 = 7 + 6n – 6
या 204 = 6n
या $n = \frac{204}{6} = 34$
अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी में 34 पद हैं।

प्रश्न 8. क्या समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... का एक पद 184 है ?

हल: दी गई समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... है।
प्रथम पद (a) = 3, सार्वअन्तर d = 7 – 3 = 4 है।
माना श्रेढ़ी का नावाँ पद 184 है।
अतः $a_n = a + (n - 1)d$
इसलिए 184 = 3 + (n – 1) × 4
या 184 = 3 + 4n – 4
या 185 = 4n
या $n = \frac{185}{4} = 46\frac{1}{4}$
चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 184 दी गई समान्तर श्रेढी का पद नहीं हो सकता है।

प्रश्न 9. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से भाज्य हैं ?

हल: दो अंकों वाली सबसे छोटी धनात्मक संख्या 14 है जिसमें 7 का भाग जाता है। इस प्रकार दो अंकों वाली 7 से भाज्य संख्याएँ अग्र अनुक्रम में होंगी-
14, 21, 28, ..., 98
यह एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद 4 = 14 एवं सार्वअन्तर d = 7 है।
माना समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या n है, तब nवाँ पद a_n = 98 निम्न प्रकार दिया जाता है-
$a_n = a_n + (n - 1)d$
मान रखने पर
98 = 14 + (n – 1) × 7
या 98 = 14 + 7n – 7
या 91 = 7n
या $n = \frac{91}{7} = 13$
इस प्रकार दो अंकों वाली 13 संख्याएँ ऐसी हैं जो 7 से भाज्य हैं।

प्रश्न 10. समान्तर श्रेढ़ी 3, 8, 13, ..., 253 के अन्तिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-
प्रथम पद (a) = 3
सार्वअन्तर (d) = 8 – 3 = 5
अन्त से nवाँ पद ज्ञात करने का सूत्र
= t – (n – 1)d
= 253 – (20 – 1) × 5
= 253 – 19 × 5
= 253 – 95
= 158
अतः अन्त से 20वाँ पद 158 है। उत्तर

प्रश्न 11. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

हल: 10 और 250 के बीच 4 से विभाजित होने वाली प्रथम संख्या 12 है। जब हम 250 को 4 से विभाजित करते हैं, तो शेषफल 2 प्राप्त होता है। इस प्रकार 4 से विभाजित होने वाली अन्तिम संख्या 250 – 2 = 248 है। अर्थात् 4 से विभाजित होने वाली 10 और 250 के बीच वाली संख्याएँ निम्न होंगी, जो कि समान्तर श्रेढ़ी में हैं-
12, 16, 20, 24, ..., 248
अतः यहाँ से स्पष्ट है-
a = 12
d = 16 – 12 = 4
अन्तिम पद (l) = a_n = 248

हम जानते हैं-
$a_n = a + (n – 1)d$
या 248 = 12 + (n – 1) × 4
या 248 = 12 + 4n – 4
या 248 = 4n + 8
या 4n = 240
या $n = \frac{240}{4} = 60$
अतः 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज 60 होंगे।

प्रश्न 12. किसी समान्तर श्रेढ़ी का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि ‘a’ और ‘d’ क्रमशः दी गई A.P का प्रथम पद और सार्व अन्तर हैं।
अब, $a_{17} = a + (17 – 1) d$
= a + 16d
और $a_{10} = a + (10 – 1) d$
= a + 9d
प्रश्नानुसार
$a_{17} – a_{10} = 7$
(a + 16d) – (a + 9d) = 7
या a + 16d – a – 9d = 7
या 7d = 7
या $d = \frac{7}{7} = 1$
अतः, सार्व अन्तर 1 है। उत्तर

प्रश्न 13. समान्तर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

हल: दिया है-a = 3, d = 15 – 3 = 12 है।
तब $a_{54} = a + 53d = 3 + 53 × 12$
$a_{54} = 3 + 636 = 639$
माना a_n अर्थात् nवाँ पद इसके 54वें पद से 132 अधिक है।
अर्थात् $a_n = a_{54} + 132$
= 639 + 132 = 771
अतः $a_n = a + (n – 1)d$
मान रखने पर 771 = 3 + (n – 1) × 12
या 771 = 3 + 12n – 12
या 12n = 780
$n = \frac{780}{12} = 65$
अतः इस समान्तर श्रेढ़ी का 65वाँ पद 54वें पद से 132 अधिक होगा।

प्रश्न 14. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्वअन्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अन्तर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अन्तर क्या होगा?

हल: माना कि 'a' और 'd' पहली A.P का प्रथम पद और सार्व अन्तर हैं। साथ ही, 'A' और 'I दूसरी A.P का प्रथम पद और सार्व अन्तर हैं।
चूँकि यहाँ पर सार्वअन्तर दोनों श्रेढ़ियों का समान है।
प्रश्नानुसार

[दूसरी A.P. का a_{100}] – [पहली A.P. का a_{100}] = 100

या $[A + (100 - 1)d] - [a + (100 - 1)d] = 100$

या $A + 99d - a - 99d = 100$

या $A - a = 100$ ....(1)

अब, [दूसरी A.P. का a_{1000}] – [पहली A.P. का a_{1000}]

$= [A + 1000 - 1)d] - (a + (1000 - 1)d]$

$= A + 999d - a - 999d$

$= A - a$

$= 100$ [(1) का प्रयोग करने से]

अतः 1000वें पदों का अन्तर = 100 उत्तर

प्रश्न 15. तीन संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि उनका योग -3 तथा गुणनफल 8 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना समान्तर श्रेढ़ी में ये तीन संख्याएँ निम्न हैं-
$a - d, a, a + d$
प्रश्नानुसार इनका योग = – 3 है
$\therefore (a - d) + a + (a + d) = -3$
या $3a = -3$
या $a = -1$
प्रश्नानुसार इनका गुणनफल 8 है
$\therefore (a - d) \times a \times (a + d) = 8$
या $(a^2 - d^2) \times a = 8$
यहाँ a = -1 रखने पर।
$[(-1)^2 - d^2] (-1) = 8$
या $d^2 - 1 = 8$
या $d^2 = 9$
या $d = \pm 3$
अतः a एवं d के मान रखने पर अभीष्ट संख्याएँ निम्न प्राप्त होती हैं। यदि d= 3 तो – 1 – 3, – 1, – 1 + 3 अर्थात् – 4, – 1, – 2 और यदि d = – 3 तो – 1 + 3, – 1, – 1 – 3 अर्थात् 2, – 1, – 4 अभीष्ट संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

प्रश्न 16. 32 को चार ऐसे भागों में विभाजित कीजिए कि चारों भाग, समान्तर श्रेढ़ी में हों तथा प्रथम व अन्तिम संख्याओं का गुणनफल मध्य संख्याओं के गुणनफल से 7:15 के अनुपात में हो।

हल: माना कि 32 के चार भाग (a – 3d), (a – d), (a + d) तथा (a + 3d) हैं।
स्पष्ट है कि संख्याओं का योग = 32
⇒ (a – 3d) + (a – d) + (a + d) + (a + 3d) = 32
⇒ 4a = 32
⇒ a = 8
यह भी दिया गया है कि

$$\frac{(a-3d)(a+3d)}{(a-d)(a+d)} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-9d^2}{a^2-d^2} = \frac{7}{15}$$

a का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{(8)^2-9d^2}{(8)^2-d^2} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{64-9d^2}{64-d^2} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow \quad 960 - 135d^2 = 448 - 7d^2$$

$$\Rightarrow \quad 960 - 448 = -7d^2 + 135d^2$$

$$\Rightarrow \quad 128d^2 = 512$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{512}{128} = 4 \Rightarrow d = \pm 2$$

यदि a = 8 और d = 2 रखने पर संख्यायें प्राप्त होती हैं-
8 – 3 × 2, 8 – 2, 8 + 2 तथा 8 + 3 × 2
अर्थात् संख्यायें 2, 6, 10 तथा 14 हैं।
यदि a = 8 और d = – 2 रखने पर संख्यायें प्राप्त होती हैं-
14, 10, 6 तथा 2 उत्तर

प्रश्न 17. योगफल ज्ञात कीजिए-
(i) समान्तर श्रेढी 1, 4, 7, 10, ... के 20 पदों का
(ii) समान्तर श्रेढ़ी 2, 7, 12, ... के 10 पदों का

हल; (i) समान्तर श्रेढी 1, 4, 7, 10, ... दी हुई है।
प्रथम पद (a) = 1, सार्वअन्तर (d) = 4 – 1 = 3

पदों की संख्या (n) = 20
चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ होता है इसलिए मान रखने पर

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 1 + (20 - 1) \times 3]$$
$$= 10[2 + 57] = 10 \times 59$$
$$= 590$$

अतः अभीष्ट योगफल = 590 है। उत्तर

(ii) समान्तर श्रेढी दी हुई है-
2, 7, 12, ... के 10 पदों तक
प्रथम पद (a) = 2 सार्वअन्तर (d) = 7 – 2 = 5
चूँकि पदों की संख्या n = 10 है।
समान्तर श्रेढ़ी के 7 पदों के योग का सूत्र

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

मान रखने पर

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10 - 1) \times 5]$$
$$= 5\ [4 + 45] = 5 \times 49 = 245$$

अतः अभीष्ट योगफल = 245 उत्तर

प्रश्न 18. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए-
(i) 34 + 32 + 30 + ... + 10
(ii) (- 5) + (- 8) + (- 11) + ... + (- 230)

हल: (i) दी हुई श्रेढ़ी 34 + 32 + 30 + ... + 10 एक समान्तर श्रेढी है, जिसका प्रथम पद (a) = 34, अन्तिम पद (l) = a_n = 10 तथा सार्वअन्तर (d) = – 2 है।

अत: $a_n = a + (n - 1)d$
या $10 = 34 + (n - 1)(-2)$
या $10 = 34 - 2n + 2$
या $2n = 26$
या $n = 13$

श्रेढ़ी का योगफल $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

अत: $S_{13} = \frac{13}{2}[34 + 10]$
$$= 13 \times 22 = 286$$

(ii) दी हुई श्रेढी (- 5) + (- 8) + (- 11) + ….. + (- 230) एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a = – 5 तथा सार्वअन्तर d = – 3 एवं अन्तिम nवाँ पद a_n = l = – 230 है।

अत: $a_n = a + (n - 1)d$

यहाँ $-230 = -5 + (n - 1) \times (-3)$

या $-230 = -5 - 3n + 3$

या $3n = 228$

या $n = \frac{228}{3} = 76$

$\because$ $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$\therefore$ $S_{76} = \frac{76}{2}[-5 + (-230)]$

$= 38 \times (-235) = -8930$ उत्तर

प्रश्न 19. समान्तरे श्रेढ़ी के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। जिसका nवाँ पद a_n = 9 – 5n है।

हल: दिया है-a_n = 9 – 5n
n = 1, 2, 3 रखने पर
a_1 = 9 – 5 × 1 = 4
a_2 = 9 – 5 × 2 = -1
a_3 = 9 – 5 × 3 = -6
इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूची 4, -1, – 6,…. प्राप्त होती है, जो कि समान्तर श्रेढ़ी है। जिसका प्रथम पद (a) = 4 एवं सार्वअन्तर (d) = -1 – 4 = – 5 है। समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल
$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

मान रखने पर $S_{15} = \frac{15}{2}[2 \times 4 + (15 - 1) \times (-5)]$

$= \frac{15}{2}[8 - 70] = \frac{-15 \times 62}{2}$

$= -15 \times 31 = -465$

अतः समान्तर श्रेढी के प्रथम 15 पदों का योगफल – 465 होगा।

प्रश्न 20. उस समान्तर शेढ़ा के प्रथम 51 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसके दूसरे तथा तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

हल: माना दी गई समान्तर श्रेढ़ी का पहला पद 4 तथा सार्वअन्तर में है।
दिया है-
a_2 = 14 तथा a_3 = 18

⇒ a + d = 14 …..(1)
a + 2d = 18 …..(2)
समीकरण को हल करने पर a = 10 और d = 4
हम जानते हैं-

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

मान रखने पर–

$$S_{51} = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51 - 1) \times 4]$$

$$= \frac{51}{2}[20 + 50 \times 4]$$

$$= \frac{51}{2} \times 220 = 51 \times 110$$

$$= 5610$$

अतः उस समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 51 पदों का योगफल = 5610 होगा। उत्तर

प्रश्न 21. किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद a_n = 25 – 2n है। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: दिया है-
a_n = 25 – 2n
n = 1, 2, 3 रखने पर
a_1 = 25 – 2 × 1 = 25 – 2 = 23
a_2 = 25 – 2 × 2 = 25 – 4 = 21
a_3 = 25 – 2 × 3 = 25 – 6 = 19
अर्थात् प्रथम पद a = 23
सार्वअन्तर (d) = 21 – 23 = – 2
हम जानते हैं-
$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

∴

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2 \times 23 + (15 - 1) \times (-2)]$$

$$= \frac{15}{2}[46 + 14 \times (-2)]$$

$$= \frac{15}{2}[46 - 28] = \frac{15 \times 18}{2} = 135$$

अतः S_{15} = 135 उत्तर

प्रश्न 22. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का दूसरा व तीसरा पद क्रमशः 3 और 5 हैं, तो इसके प्रथम 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद
$a_n = a + (n - 1)d$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 30$
अतः प्रश्नानुसार 3 = a + d ....(1)
5 = a + 3d ....(2)
समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर
5 – 3 = a + 3d – d – d
⇒ 2 = 2d
d का मान समी. (1) में रखने पर
3 = a + 1
∴ a = 2
हम जानते हैं-

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

$$\therefore \quad S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 2 + (20 - 1) \times 1)$$
$$= 10(4 + 19) = 10 \times 23$$
$$= 230$$ उत्तर

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 12 है और 50वाँ पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद = nवाँ पद
∴ $a_n = a + (n - 1) d$
जहाँ a समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद है और में उस श्रेढी का सार्वअन्तर है।
दिया है-
$a_3 = 12$, $a_{50} = 106$
अतः सूत्र से लिखा जा सकता है-
$a_3 = a + (3 - 1)d$
या 12 = a + 2d .....(1)
$a_{50} = a + (50 - 1)d$
106 = a + 49d .....(2)
समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर
106 – 12 = 49d – 2d
⇒ 47d = 94
या $d = \frac{94}{47} = 2$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर
12 = 4 + 2 × 2
∴ a = 12 – 4 = 8
इसलिए a_{29} = a + (29 – 1)d
= a + 28d
= 8 + 28 × 2 = 8 + 56 = 64
अतः समान्तर श्रेढ़ी को 29वाँ पद 64 होगा। उत्तर

प्रश्न 2. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का mवाँ पद $\frac{1}{n}$ तथा nवाँ पद $\frac{1}{m}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी का mnवाँ पद 1 के बराबर होगा।

हल: मान लीजिए कि दी गई समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद (a) तथा सार्वअन्तर (d) है।

इसलिए $\frac{1}{n} = m$वाँ पद

$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} = a + (m-1)d \quad .....(1)$

$\frac{1}{m} = n$वाँ पद

$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} = a + (n-1)d \quad .....(2)$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = (m-n)d$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-n}{mn} = (m-n)d$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{1}{mn}}$$

समीकरण (1) में d का मान रखने पर

$$\frac{1}{n} = a + (m-1) \times \frac{1}{mn}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} = a + \frac{m}{mn} - \frac{1}{mn}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} = a + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{1}{mn}}$$

इसलिए mnवाँ पद $= a + (mn - 1)d$

मान रखने पर– $= \frac{1}{mn} + (mn-1) \times \frac{1}{mn}$

$= \frac{1}{mn} + \frac{mn}{mn} - \frac{1}{mn} = 1$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 3. समान्तर श्रेढ़ी 54, 51, 48, ….. के कितने पदों का योगफल 513 होगा?

हल: समान्तर श्रेढ़ी 54, 51, 48, ….. का प्रथम पद (a) = 54, सार्वअन्तर (d) = 51 – 54 = – 3 है।
मान लीजिए, इसके n पदों का योगफल 513 है।
इसलिए $S_n = 513$
तब समान्तर श्रेढी के n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 513 = \frac{n}{2}[2 \times 54 + (n - 1) \times (- 3)]$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times 513 = n[108 - 3n + 3]$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times 513 = n[111 - 3n] = 3n[37 - n]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2 \times 513}{3} = n[37 - n]$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times 171 = 37n - n^2$$

$$\Rightarrow \quad n^2 - 37n + 342 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n - 18)(n - 19) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 18 \text{ या } 19$$

यहाँ सार्वअन्तर ऋणात्मक है तथा
19वाँ पद = a_{19} = 54 + (19 – 1) × (-3) = 0 है।
अतः 18 पदों तथा 19 पदों का योगफल समान रहेगा एवं 513 होगा। उत्तर

प्रश्न 4. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो उसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि $S_7 = 49$ एवं $S_{17} = 289$
समान्तर श्रेढ़ी के n पदों के योग का सूत्र

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

इसलिए
$$S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7 - 1)d] = 49$$

तथा
$$S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17 - 1)d] = 289$$

अतः उपरोक्त दोनों समीकरणों को सरल रूप में लिखने पर हमें समीकरण प्राप्त होते हैं-

$$2a + 6d = \frac{49 \times 2}{7}$$

या
$$a + 3d = 7 \quad .....(i)$$

एवं द्वितीय समीकरण

$$2a + 16d = \frac{289 \times 2}{17}$$

या
$$2(a + 8d) = \frac{289 \times 2}{17}$$

या
$$a + 8d = 17 \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर

$$5d = 10$$

या
$$d = 2$$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$a + 3 \times 2 = 7$$

या
$$a = 7 - 6$$

या
$$a = 1$$

अत: a एवं d के मान समान्तर श्रेढ़ी के n पदों के योग के सूत्र में रखने पर n पदों का योग,

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n - 1) \times 2]$$

$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग n^2 है।

प्रश्न 5. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो पहला पद क् है? पहले दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इस प्रकार तीसरे, 10वें और ॥वें पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-

$S_n = 4n - n^2$

n के स्थान पर (n – 1) लिखने पर हमें S_{n-1} प्राप्त होता है।

$S_{n-1} = 4(n - 1) - (n - 1)^2$

$= 4n - 4 - (n^2 - 2n + 1)$

$= 4n - 4 - n^2 + 2n - 1$
$= 6n - n^2 - 5$
हम जानते हैं- $a_n = S_n - S_{n-1}$
मान रखने पर- $a_n = (4n - n^2) - (6n - n^2 - 5)$
$= 4n - n^2 - 6n + n^2 + 5$

$$\boxed{a_n = 5 - 2n}$$

पहले पद के लिए n = 1 रखने पर
$a_1 = 5 - 2 \times 1 = 5 - 2 = 3$ उत्तर
अतः दूसरा पद $a_2 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 4 = 1$ उत्तर
∴ पहले दो पदों का योग $= a_1 + a_2$
$= 3 + 1 = 4$ उत्तर
तीसरे पद के लिए n = 3 रखने पर
$a_3 = 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$ उत्तर
इसी प्रकार 10वाँ पद
$a_{10} = 5 - 2 \times 10 = 5 - 20 = -15$ उत्तर
और nवाँ पद $(a_n) = 5 - 2n$ उत्तर

प्रश्न 6. 250 से 1000 तक 3 से भाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

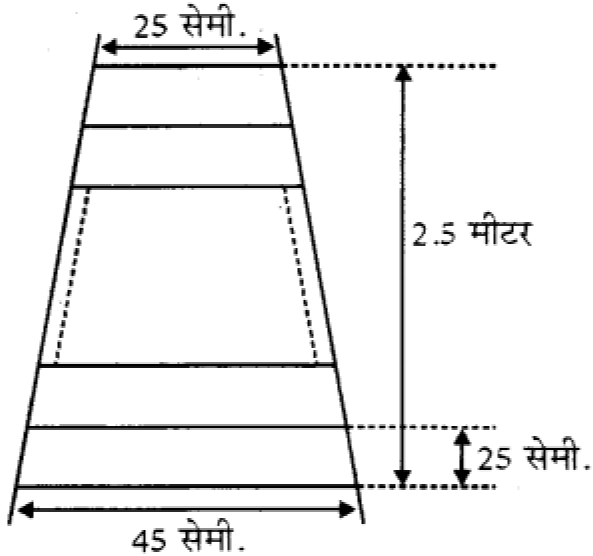
हल: 250 से 1000 के बीच 3 से भाज्य संख्यायें 252, 255, 258, ..., 999 हैं जो कि एक समान्तर श्रेढ़ी है।
प्रथम पद (a) = 252, अन्तिम पद (l) = a_n = 999 एवं सार्वअन्तर (d) = 3 है।
हम जानते हैं- $a_n = a + (n - 1)$
इसलिए $999 = 252 + (n - 1) \times 3$
या $999 = 252 + 3n - 3$
या $999 = 249 + 3n$
या $3n = 999 - 249 = 750$
या $n = \frac{750}{3} = 250$

अतः अभीष्ट योगफल $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

अर्थात् $S_{250} = \frac{250}{2}(252 + 999)$
$= 125 \times 1251$
$= 156375$

इस प्रकार अभीष्ट योगफल 156375 होगा। उत्तर

प्रश्न 7. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 सेमी. की दूरी पर हैं।(सामने दिए गए चित्र में देखिए) डंडों की लम्बाई एक समान रूप से घटती जाती है। तथा सबसे निचले डंडे की लम्बाई 45 सेमी. है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लम्बाई 25 सेमी. है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी 2.5 मी. है, तो डंडों को बनाने के लिए कितनी लम्बाई की लकड़ी लेना आवश्यक होगा?



हल:

प्रथम व अन्तिम डण्डे के बीच की दूरी = $2\frac{1}{2}$ m = $\frac{5}{2}$ m

$= \left(\frac{5}{2} \times 100\right)$ सेमी.

= 250 सेमी.

और दो क्रमागत डण्डों के बीच की दूरी = 25 सेमी.

∴ सीढ़ी में डण्डों की संख्या = $\frac{\text{प्रथम व अन्तिम डण्डे के बीच की दूरी}}{\text{दो क्रमागत डण्डों के बीच की दूरी}} + 1$

$= \frac{250}{25} + 1 = 10 + 1 = 11$

∵ प्रथम डण्डे की लम्बाई (a) = 25 सेमी.

और अन्तिम डण्डे की लम्बाई (l) = 45 सेमी.

∴ 11 डण्डों में प्रयुक्त लकड़ी की कुल माप

$= \frac{n}{2}(a + l) = \frac{11}{2}(25 + 45)$

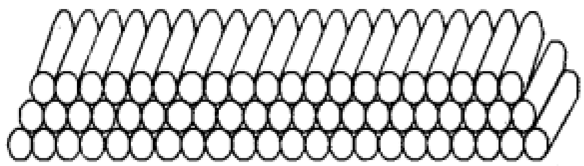
$= \frac{11}{2} \times 70 = 11 \times 35$

= 385 सेमी.

= 3.85 मीटर

अतः सीढ़ी के डण्डों में प्रयुक्त लकड़ी की लम्बाई = 385 सेमी. या 3.85 मीटर उत्तर

प्रश्न 8. 200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है-सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



हल: सबसे नीचे वाली पहली पंक्ति में (लट्ठों की संख्या) = 20
दूसरी पंक्ति में लट्ठों की संख्टा = 19
तीसरी पंक्ति में लट्ठों की संख्या = 18
इसी प्रकार आगे भी।
∴ प्रत्येक पंक्ति में रखे गए लट्ठों की संख्या एक A.P बनाती है।
यहाँ $a = a_1 = 20;$
$a_2 = 19; a_3 = 18$ .....
$d = a_2 - 41$
$= 19 - 20 = -1$
मान लीजिए S_n लट्ठों की कुल संख्या को व्यक्त करता है।
सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

∴ $$S_n = \frac{n}{2}[2(20) + (n-1)(-1)]$$

$$= \frac{n}{2}[40 - n + 1]$$

$$= \frac{n}{2}[41 - n]$$

प्रश्नानुसार

$$\frac{n}{2}[41 - n] = 200$$

या $41n - n^2 = 400$

या $n^2 - 41n + 400 = 0$ | $S = -41$

या $n^2 - 16n - 25n + 400 = 0$ | $P = 400$

या $n(n-16) - 25(n-16) = 0$

या $(n-16)(n-25) = 0$

अर्थात् $n - 16 = 0$ या $n - 25 = 0$

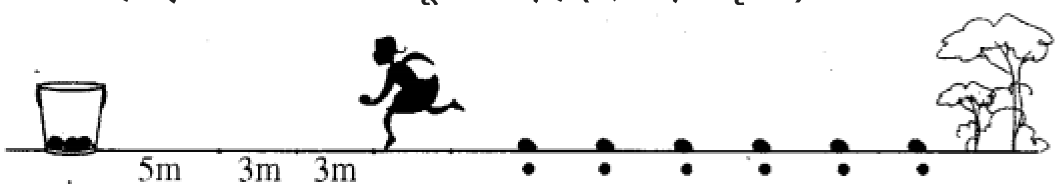
अथवा $n = 16$ या $n = 25$

$n = 16, 25.$

स्थिति I. जब n = 25
$a_{25} = a + (n – 1) d$
= 20 + (25 – 1) (-1)
= 20 – 24 = – 4; जो कि असम्भव है।
n = 25 छोड़ देते हैं।

स्थिति II. जब n = 16
$a_{16} = a + (n – 1) d$
= 20 + (16 – 1) (- 1)
= 20 – 15 = 5
अतः, कुल 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपरी पंक्ति में 5 लट्ठे हैं। उत्तर

प्रश्न 9. एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारम्भिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5 m की दूरी पर है, तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 m की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति)।



प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारम्भ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?
[संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी = 2 × 5 + 2 × (5 + 3) है ।]

हल: पहला आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी = 2 (5) m = 10 m
उत्तरोत्तर आलुओं के बीच की दूरी = 3 m।
∴ दूसरा आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी = 2 (5 + 3) m = 16 m
तीसरा आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी = 2 (5 + 3 + 3) m = 22 m
और यह प्रतिक्रिया चलती रहती है। इससे स्पष्ट है कि यह स्थिति एक A.P बन जाती है।
10 m, 16 17, 22 in, 22, 28 m, ...
यहाँ $a = a_1 = 10$; $a_2 = 16$; $a_{32} = 22$, ...
$d = a_2 – a_1 = 16 – 10 = 6$
और n = 10
∴ प्रतियोगी को कुल जितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी

$= S_{10}$

$= \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d]$

$= \frac{10}{2}[2 (10) + (10 - 1) 6]$

$= 5 [20 + 54]$

$5 \times 74 = 370$

अतः, प्रतियोगी को कुल 370 मी. की दूरी दौड़नी पड़ेगी। उत्तर