

त्रिकोणमितीय अनुपात

Ex 6.1

निम्न के मान ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1. $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$

हल: $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

प्रश्न में $\sin 45^\circ \cos 45^\circ$ के मान सारणी से रखने पर

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 2. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$

हल: $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$

सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 3. $\sin^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ + 3 \tan^2 60^\circ$

हल: $\sin^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ + 3 \tan^2 60^\circ$

सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3(\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 \\ &= \frac{1}{4} + 1 + 9 = 10\frac{1}{4} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ$

हल: $3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ$
सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= 0 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

हल:

$$\begin{aligned} &\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ} \\ &= \frac{5(\cos 60^\circ)^2 + 4(\sec 30^\circ)^2 - (\tan 45^\circ)^2}{(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2} \end{aligned}$$

सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{5}{4} + 4 \times \frac{4}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1 = \frac{15 + 64 - 12}{12} \\ &= \frac{67}{12} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ$

हल: $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ$
सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot (1)^2 - (2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0)^2 \\ &= 4 \cdot 1 - 4 + \frac{3}{4} + 0 \\ &= 4 - 4 + \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 7.

$$\frac{4}{\cot^2 30^\circ} + \frac{1}{\sin^2 30^\circ} - \cos^2 45^\circ$$

हल:

$$\frac{4}{\cot^2 30^\circ} + \frac{1}{\sin^2 30^\circ} - \cos^2 45^\circ$$

सारणी से मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{8+24-3}{6} = \frac{29}{6} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 8.

$$\frac{\tan^2 60^\circ + 4\sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ}{3\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$$

हल:

$$\frac{\tan^2 60^\circ + 4\sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ}{3\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$$

सारणी से मान रखने पर

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1)^2}{3 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 3} = \frac{3 + 2 + 1}{4 + \frac{4}{3} - 3}$$

$$= \frac{6}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{6}{\frac{3+4}{3}} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{18}{7} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 9.

$$\frac{\sin 30^\circ - \sin 90^\circ + 2 \cos 0^\circ}{\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ}$$

हल:

$$\frac{\sin 30^\circ - \sin 90^\circ + 2 \cos 0^\circ}{\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ}$$

सारणी से मान रखने पर

$$= \frac{\frac{1}{2} - 1 + 2 \cdot 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} - 1 + 2}{1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1}{1} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 10.

$$\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$$

हल:

$$\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$$

सारणी से मान रखने पर

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 11. निम्न में x का मान ज्ञात कीजिए-

- (i) $\cos x = \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$
(ii) $\sin 2x = \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$
(iii) $\sqrt{3} \tan 2x = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ + 2 \sin 90^\circ$

हल: (i) $\cos x = \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ \text{ उत्तर}$$

(ii) $\sin 2x = \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{3-1}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\text{या } 2x = 30^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ \text{ उत्तर}$$

$$\text{(iii) } \sqrt{3} \tan 2x = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ + 2 \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \tan 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot 1$$

$$\sqrt{3} \tan 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2$$

$$\sqrt{3} \tan 2x = 3$$

$$\tan 2x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 2x = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 60$$

$$\text{या } x = 30^\circ \text{ उत्तर}$$

सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 12.

$$\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$$

सारणी से मान रखने पर

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 + 1 + 1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 13. $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -1$

हल: L.H.S. = $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$

सारणी से मान रखने पर

$$= 4 \cdot (1)^2 - (2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 4 \cdot 1 - 4 - \frac{1}{4}$$

$$= 4 - 4 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \text{R.H.S.}$$

\therefore L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. $4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2 \sec^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

हल: L.H.S. = $4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= 3$$

R.H.S. = $2 \sec^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

$$= 2(\sqrt{2})^2 - (1)^2$$

$$= 2 \cdot 2 - 1$$

$$= 4 - 1 = 3.$$

अतः L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. $\operatorname{cosec}^2 45^\circ \cdot \sec^2 30^\circ \sin^3 90^\circ \cos 60^\circ = \frac{4}{3}$

हल: L.H.S. = $\operatorname{cosec}^2 45^\circ \cdot \sec^2 30^\circ \sin^3 90^\circ \cos 60^\circ$

$$= (\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (1)^3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2 \times \frac{4}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3} = \text{R.H.S.}$$

\therefore L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 16.

$$\frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad \dots\dots(i) \end{aligned}$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad \dots\dots(ii)$$

∴ (i) व (ii) बराबर है

∴ L.H.S = R.H.S (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 17. $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan 30^\circ) = 6$

हल: L.H.S. = $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2\right] - 6\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{1}\right] - 6\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1+6}{2}\right) - 6\left(\frac{3-2}{6}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{7}{2} - 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 7 - 1 = 6 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 18. $(\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ) (2 \cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \tan 45^\circ)$

हल: L.H.S. = $(\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ) (2 \cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \tan 45^\circ)$

$$= \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + (\sqrt{2})^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 + 1 \right]$$

$$= \left(\frac{4}{3} + 2 \right) (1 + 1 + 1)$$

$$= \left(\frac{4+6}{3} \right) (3) = \left(\frac{10}{3} \right) \times 3 = 10$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 19. $(1 - \sin 45^\circ + \sin 30^\circ) (1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$

हल: L.H.S. = $(1 - \sin 45^\circ + \sin 30^\circ) (1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9-2}{4}$$

$$= \frac{7}{4} = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 20. $\cos^2 0^\circ - 2 \cot^2 30^\circ + 3 \operatorname{cosec}^2 90^\circ = 2(\sec^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ)$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cos^2 0^\circ - 2 \cot^2 30^\circ + 3 \operatorname{cosec}^2 90^\circ$$

$$= (1)^2 - 2(\sqrt{3})^2 + 3(1)^2$$

$$= 1 - 2(3) + 3$$

$$= 1 - 6 + 3 = -2$$

$$\text{R.H.S.} = 2(\sec^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ)$$

$$= 2 \left[(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \right]$$

$$= 2(2 - 3) = 2(-1)$$

$$= -2$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 21. यदि $x = 30^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए-

(i) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(ii) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(iii) $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

हल:

(i) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

L.H.S. = $\sin 3x$

$x = 30^\circ$ रखने पर

= $\sin 3 \cdot (30) = \sin 90^\circ = 1$

तथा R.H.S. = $3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$x = 30^\circ$ रखने पर

= $3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 30^\circ$

= $3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

= $\frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{1}{8}$

= $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

\therefore L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

(ii) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

L.H.S. = $\tan 2x$

$x = 30^\circ$ रखने पर

= $\tan 2 \cdot (30^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

R.H.S. = $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$x = 30^\circ$ रखने पर

= $\frac{2 \cdot \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

= $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}$

= $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

= $\sqrt{3}$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

$$(iii) \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin x = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2(30^\circ)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

$$(iv) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos 3x \\ &= \cos 3(30^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ &= 4 \cdot \cos^3 30^\circ - 3 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 22. यदि $A = 60^\circ$ और $B = 30^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए-

$$\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

हल:

$$\because A = 60^\circ \text{ तथा } B = 30^\circ$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \cot(A - B) = \cot(60^\circ - 30^\circ) = \cot 30^\circ \\ = \sqrt{3}$$

$$\text{तथा R.H.S.} = \frac{\cot 60^\circ \cdot \cot 30^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 60^\circ} \\ = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3}) + 1}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+1}{\frac{3-1}{\sqrt{3}}} \\ = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S. (इतिसिद्धम्)}$$

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 6

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 5 तक)-

प्रश्न 1. $\tan-60^\circ$ को मान है

(क) 3 (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) 1 (घ) ∞

प्रश्न 2. $2 \sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$ का मान होगा

(क) $\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{5}{2}$ (ग) $\frac{3}{4}$ (घ) $\frac{1}{3}$

प्रश्न 3. यदि $\operatorname{cosec} 8 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ हो, तो 6 का मान है-

(क) $\frac{\pi}{4}$ (ख) $\frac{\pi}{3}$ (ग) $\frac{\pi}{2}$ (घ) $\frac{\pi}{6}$

प्रश्न 4. $\cos^2 45^\circ$ का मान होगा-

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ख) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 5. यदि $\theta = 45^\circ$ हो, तो $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान है-

(क) 0 (ख) 1 (ग) 2 (घ) ∞

उत्तर-तालिका 1. (क) 2. (ग) 3. (ख) 4. (ग) 5. (ख)

सिद्ध कीजिए (6 से 10 तक)-

प्रश्न 6. $\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \dots(i)$$

$$\text{R.H.S.} = 2 \cos^2 30^\circ - 1$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} - 1$$

$$= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \dots(ii)$$

(i) व (ii) से

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. $\sin 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots(i)$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots(ii)$$

(i) व (ii) से

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. $\cos 60^\circ = \frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \dots(i)$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad \dots(ii)$$

(i) व (ii) से

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 9. $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = 2$

हल: L.H.S. = $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= (\sqrt{2})^2$$

$$= 2 = \text{R.H.S.}$$

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. $4 \tan 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin 90^\circ = 2$

हल: L.H.S. = $4 \tan 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin 90^\circ$

$$= 4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \text{R.H.S.}$$

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. $\sin^2 60^\circ \cot 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin^2 60^\circ \cdot \cot 60^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 12. $4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 13. यदि $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5}$

हल:

दिया है— $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

अब $\frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 60^\circ}{2 - \sin^2 60^\circ}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2}{2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2 - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

अतः $\frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए-

$$3(\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ) - 8(\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ) = 0$$

हल: L.H.S. = $3(\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ) - 8(\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ)$

$$= 3 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (\sqrt{3})^2 \right] - 8 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{1} \right] - 8 \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right]$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1+9}{3} \right) - 8 \left(\frac{2+3}{4} \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{10}{3} - 8 \cdot \frac{5}{4}$$

$$= 10 - 10 = 0 = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 15. $4(\sin^4 30^\circ + \cos^2 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ) = \frac{15}{4}$

हल: L.H.S. = $4(\sin^4 30^\circ + \cos^2 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ)$

$$= 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - (1)^2 \right]$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right] - 3 \left[\frac{1}{2} - 1 \right]$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1+8}{16} \right) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9+6}{4}$$

$$= \frac{15}{4} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 16.

$$\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$$

सारणी से मान रखने पर

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}}{\frac{2+1+1}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{R.H.S. (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 17. $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ) = 6$

हल: L.H.S. = $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + (\sqrt{3})^2 \right] - 6 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} + 3 \right] - 6 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1+6}{2} \right) - 6 \left(\frac{3-2}{6} \right)$$

$$= 2 \times \frac{7}{2} - 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= 7 - 1 = 6 = \text{R.H.S. (इतिसिद्धम्)}$$

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न-

प्रश्न 1. $2 \operatorname{cosec} 30^\circ \sec 30^\circ$ बराबर है-

(A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) 8

(D) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 2. यदि $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, तो θ का मान है-

- (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

प्रश्न 3. यदि $\theta = 30^\circ$ हो, तो $\frac{1 - \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$ का मान होगा-

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

प्रश्न 4. $\cot 30^\circ$ का मान है-

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

प्रश्न 5. $\sec 45^\circ$ का मान है-

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

प्रश्न 6. $\sin^2 45^\circ$ का मान है-

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 7. $\cot^2 60^\circ$ का मान होता है-

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) 1 (D) ∞

प्रश्न 8. यदि $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो θ का मान है-

- (A) 30° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

प्रश्न 9. यदि $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, तो θ का मान है-

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

प्रश्न 10. $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$ का मान है-

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

उत्तर-तालिका 1. (D) 2. (C) 3. (D) 4. (B) 5. (A) 6. (C) 7. (A) 8. (A) 9. (B) 10. (C)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $\tan \theta = 1$ हो तो $\sec \theta$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल: $\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$

$\theta = 45^\circ$

$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ उत्तर

प्रश्न 2. यदि $\sin \theta = \cos \theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिये।

हल-: $\sin \theta = \cos \theta$

या $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$

या $\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$ उत्तर

प्रश्न 3. $3 \cos 60^\circ - 4 \cos^3 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $3 \cos 60^\circ - 4 \cos^3 60^\circ$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 4. $\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{3} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ को मान लिखिए।

हल:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. $\tan^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ$ (त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$= (\sqrt{3})^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 + 3 \times \frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 7. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 8. यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ हो, तो θ का मान लिखिए।

हल: $\theta = 60^\circ$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए-

$$3 \tan^2 30^\circ - \frac{4}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 90^\circ = \frac{1}{3}$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष (L.H.S.)} &= 3 \tan^2 30^\circ - \frac{4}{3} \sin^2 60^\circ - \\ &\quad \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 90^\circ \end{aligned}$$

मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{3} (1)^2 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot (2) + \frac{4}{3} \\ &= 1 - 1 - 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \text{ दायाँ पक्ष (R.H.S.) (इतिसिद्धम्)} \end{aligned}$$

प्रश्न 2. यदि $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। ($x < 90^\circ$)

हल: दिया है, $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

या $\tan 3x = 1$ या $\tan 3x = \tan 45^\circ$

या $3x = 45^\circ$ या $x = 15^\circ$ उत्तर

प्रश्न 3. $\sin 30^\circ \cdot \cos^2 30^\circ + \tan 45^\circ \cdot \cos^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 30^\circ \cdot \cos^2 30^\circ + \tan 45^\circ \cdot \cos^2 60^\circ$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + (1) \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ तथा $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ मान दिये गये व्यंजक में रखने पर

$$\begin{aligned}\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} &= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 5. $4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$\begin{aligned}&= 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \times 1 \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ &= 3 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $\sin(A + B) = 1$ तथा $\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यहाँ $0^\circ < (A + B) \leq 90^\circ$, $A > B$ हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है $\sin(A + B) = 1$

या $\sin(A + B) = \sin 90^\circ$

या $A + B = 90^\circ \dots(1)$

तथा $\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $\cos(A - B) = \cos 30^\circ$

या $A - B = 30^\circ \dots(2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$(A + B) + (A - B) = 90^\circ + 30^\circ$$

$$2A = 120^\circ \text{ या } A = 60^\circ$$

A का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$60^\circ + B = 90^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ, B = 30^\circ$$

प्रश्न 2. $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \csc 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \left(\frac{3\sqrt{3} - 4}{4 + 3\sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{4 - 3\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

(अंश व हर में $(4 - 3\sqrt{3})$ से गुणा करने पर)

$$\begin{aligned} &= \frac{-(4 - 3\sqrt{3})(4 - 3\sqrt{3})}{(4)^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{-(4 - 3\sqrt{3})^2}{16 - 27} \\ &= \frac{-(16 + 27 - 24\sqrt{3})}{-11} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 45^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

प्रश्न 3. $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \csc 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

(अंश तथा हर में $(\sqrt{3}-1)$ से गुणा करने पर)

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(3-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}(3-1)}$$

($\sqrt{2}$ से अंश तथा हर में गुणा करने पर)

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3}-1)}{4(3-1)} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 4. $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$
 $= 2 (\tan 45^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 - (\sin 60^\circ)^2$
 $= 2 (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $= 2 \times 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$
 $= \frac{8+3-3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ उत्तर}$

प्रश्न 5. यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan(A + B) = \sqrt{3}$

$\tan(A + B) = \tan 60^\circ$

या $A + B = 60^\circ$

$\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan(A - B) = \tan 30^\circ$

या $A - B = 30^\circ$ (ii)

समीकरण (i) और समीकरण (ii) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} A + B = 60^\circ \\ A - B = 30^\circ \\ \hline 2A = 90^\circ \end{array}$$

$$A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$A = 45^\circ$ उत्तर

समीकरण (i) में मान रखने पर

$A = 45^\circ$

$45^\circ + B = 60^\circ$

$B = 60^\circ - 45^\circ$

$B = 15^\circ$ उत्तर

प्रश्न 6. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

(ii) 8 में वृद्धि होने के साथ $\sin 8$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) 6 में वृद्धि होने के साथ $\cos 6$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) 8 के सभी मानों पर $\sin 8 = \cos 8$.

(v) $A = 0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

हल: (i) जब $A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$

L.H.S. = $\sin(A + B)$

= $\sin(60^\circ + 30^\circ)$

= $\sin 90^\circ = 1$

R.H.S. = $\sin A + \sin B$

= $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$

= $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

अर्थात् L.H.S. \neq R.H.S.
यह असत्य है। उत्तर

$$(ii) \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$$

क्योंकि $\sin 0^\circ = 0$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 \text{ (लगभग)}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87 \text{ (लगभग)}$$

और $\sin 90^\circ = 1$

अर्थात्, जब θ का मान 0° से 90° तक बढ़ता है तो $\sin \theta$ का मान भी बढ़ता है। परन्तु यह $\theta = 90^\circ$ तक ही सही है, आगे नहीं।

\therefore यह सत्य है। उत्तर

(iii) क्योंकि $\cos 0^\circ = 1$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87 \text{ (लगभग)}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 \text{ (लगभग)}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$$

और $\cos 90^\circ = 0$

जब θ का मान 0° से 90° तक बढ़ता है तो $\cos \theta$ का मान घटता है। अतः यह असत्य है। उत्तर

(iv) चूँकि $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

और $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $\sin 30^\circ \neq \cos 30^\circ$
 $\theta = 45^\circ$ पर

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

और $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

सिर्फ $\theta = 45^\circ$ पर मान बराबर है।
लेकिन θ के सभी मानों के लिये

$$\sin \theta \neq \cos \theta$$

\therefore दिया गया कथन असत्य है। उत्तर

(v) $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$, या परिभाषित नहीं। यह सत्य है। उत्तर