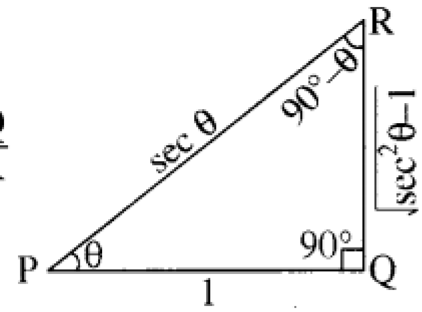
त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

Ex 7.1

प्रश्न 1. ∠θ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec θ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि



$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\therefore \text{ लम्ब } (QR) = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{1} = \sqrt{\sec^2\theta-1}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$$

$$\text{तथा} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$$

$$\text{अत:} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}, \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},$$

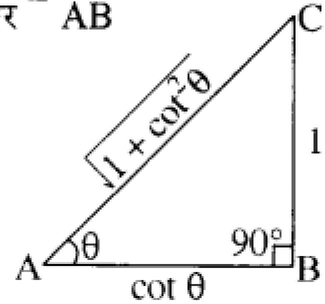
$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta-1}, \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$$

$$\text{तथा} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} \quad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 2. त्रिकोणमितीय अनुपातों sin θ, sec θ, tan θ को cot θ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$



$\therefore$ कर्ण (AC) $= \sqrt{1+\cot^2\theta}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

तथा $\quad \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$

अत: $\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$, $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

तथा $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$ उत्तर

निम्नलिखित को सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध कीजिए

प्रश्न 3. $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \cot^2\theta = \cot^2\theta$

हल: L.H.S. = $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \cot^2\theta$
= $\cos^2\theta 6(1 + \cot^2\theta)$
= $\cos^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta$ [$\because 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$]
$= \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} \quad \left[\because \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}\right]$
$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$ = R.H.S
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. $\sec\theta(1 - \sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

हल: L.H.S = sec θ(1 – sin θ) (sec θ + tan θ)

$$= \frac{1}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\left[\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)}{\cos\theta}\left[\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \qquad [\because\ 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 5. $\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \sec\theta$

हल: L.H.S. = $\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta} \qquad [\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta\ .\ \sec^2\theta = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

अंश तथा हर को $\sqrt{1-\sin\theta}$ से गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\Rightarrow \sec\theta - \tan\theta = \text{R.H.S.}$

$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. $\sqrt{\sec^2\theta + \csc^2\theta}$ **= tan θ+ cot θ**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

अंश व हर का वर्गमूल लेने पर

$$= \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$ **= tan α tan β**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{(\cos\alpha.\sin\beta+\sin\alpha.\cos\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}}$$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \times \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{(\cos\alpha.\sin\beta+\sin\alpha.\cos\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$= \tan\alpha\ .\ \tan\beta =$ R.H.S. (इतिसिद्धम्)

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 9. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\sec\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\times(\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta+1+\sin^2\theta+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$[\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab]$

$$= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$$= \frac{2+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta} \qquad [\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1]$$

$$= \frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$= \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta =$ R.H.S. (इतिसिद्धम्)

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इतिसिद्धम्

प्रश्न 10. $\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=1$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}$$

$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. cot θ – tan θ = $\frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cot\theta - \tan\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} \quad [\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$$

$$= \frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. cose^4 θ + sin^4 θ = 1 – 2 cos^{2}θ sin^{2}θ (माध्य शिक्षा बोर्ड मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cos^4\theta + \sin^4\theta$$

$2\sin^2\theta\cos^2\theta$ जोड़ने व घटाने पर

$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (1)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. (sec θ – cos θ) (cot θ + tan θ) = tan θ sec θ

हल:

$$\text{L.H.S.} = (\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right) \times \left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

[$\because$ $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ तथा $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$]

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta \,.\, \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 14. $\frac{1-\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha-1} = \tan^2\alpha$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{1} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{1}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} \times \frac{\sin^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 15. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$(1 + \cos\theta)$ का अंश व हर में गुणा करने पर

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} \qquad [\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 16. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

हल: L.H.S = $\sin^6\theta + \cos^6\theta$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)[(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$=(1)[\sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= [(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= [(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= (1)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ = R.H.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 17. $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$ (माध्य शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta\times\cos\theta}{\sin\theta\times(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin^2\theta-\cos\theta\times\cos^2\theta}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)\times(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$[\because\ a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + b^2 + ab)]$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\times\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1$$

$= \tan\theta + \cot\theta + 1$

$= 1 + \tan\theta + \cot\theta =$ R.H.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 18. $\sin\theta\,(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$

हल: L.H.S. = $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta)$

$$= \sin\theta\left[\frac{1}{1}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]+\cos\theta\left[\frac{1}{1}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \sin\theta\left[\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\right]+\cos\theta\left[\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{1}{\sin\theta\,.\cos\theta}\right]$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 19. $\sin^2\theta\cos\theta + \tan\theta\sin\theta + \cos^3\theta = \sec\theta$

हल: L.H.S. = $\sin^2\theta\cos\theta + \tan\theta\sin\theta + \cos^{23}\theta$

= $\sin^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta + \tan\theta.\sin\theta$

$$= \cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\sin\theta$$

$$\left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 20. $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$ **= 1 + sec θ cosec θ**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta\times\cos\theta}{\sin\theta\times(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin^2\theta-\cos\theta\times\cos^2\theta}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)\times(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)]$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\times\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} \qquad \because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} + 1$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 21. (sin A + cosec A)^2 + (cos A + sec A)^2 = 7 + tan^{2}A + cot^{2}A

हल: L.H.S. = (sin A + cosec A)^2 + (cos A + sec A)^2

= {sin^2 A + cosec^2 A + 2 sin A × cosec A}

$$= \left[\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A}\right] + \left[\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \times \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$\left[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A},\ \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= \{\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\} + \{\cos^2 A + \sec^2 A + 2\}$$

$$= 2 + 2 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A$$

$$\left[\because \sec^2 A = \tan^2 A + 1,\ \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A + 1\right]$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 22. sin^{8}θ – cos^{8}θ = (sin^{2}θ – cos^{2}θ) (1 – 2sin^{2}θ cos^{2}θ)

हल: L.H.S. = sin^{8}θ – cos^{8}θ

= (sin^{4}θ)^2 – (cos^{4}θ)^2

= (sin^{4}θ – cos^{4}θ) (sin^{4}θ + cos^{4}θ)

= [(sin^{2}θ)^2 – (cos^{2}θ)]^2 (sin^{4}θ + cos^{4}θ)

= (sin^{2}θ – cos^{2}θ) (sin^{2}θ + cos^{2}θ) (sin^{4}θ + cos^{4}θ)

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^4\theta + \cos^4\theta]$ [:: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]
$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)[(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta]$
($2\sin^2\theta\cos^2\theta$ उपर्युक्त मे जोड़ने व घटाने पर)
$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta]$
$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$
= R.H.S.
∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 23. $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$ **= cot θ + cosec θ (माध्य शिक्षा बोर्ड मॉडल पेपर, 2017-18)**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$$

$\sqrt{(\sec\theta+1)}$ का अंश व हर में गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{\sec^2\theta-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{\tan^2\theta}} \qquad [\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$$

वर्गमूल लेने पर

$$= \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta} = \frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

$$= \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 24.

$$\frac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\csc^3\theta} = \sin^2\theta\cos^2\theta$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\operatorname{cosec}^3\theta}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{1}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right](\sin\theta-\cos\theta)}{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\sin^3\theta}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right](\sin\theta-\cos\theta)}{\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}}$$

$$= \frac{\left[\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right](\sin\theta-\cos\theta)}{\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\sin^3\theta.\cos^3\theta}}$$

$$\left[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \text{ तथा } a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\right]$$

$$= \frac{(1+\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\times \frac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta.\cos\theta)}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta\cos\theta).\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta\cos\theta)}$$

$$[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$

$$= \sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 25.

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{2}{1-2\cos^2\theta}=\frac{2}{2\sin^2\theta-1}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2}{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{2\times 1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \qquad .....(i)$$

(i) में $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ रखने पर क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{2}{1 - 2\cos^2\theta} = \text{मध्य पद}$$

तथा पुन: (i) में $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ रखने पर क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{\sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta} = \frac{2}{2\sin^2\theta - 1} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 26.

$\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$ **= sin A + cos A (माध्य शिक्षा बोर्ड, 2018)**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$$

$$= \frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{1} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin A}{1} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} - \frac{\cos^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{(\sin A - \cos A)} = \frac{(\sin A - \cos A)(\sin A + \cos A)}{(\sin A - \cos A)}$$

$$= \sin A + \cos A = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 27. (cosec A – sin A)(sec A – cos A) = $\frac{1}{\tan A + \cot A}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \sin A \cdot \cos A \quad \text{.....(i)}$$

तथा

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{1} \times \frac{\sin A . \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{\sin A . \cos A}{1}$$

$$= \sin A \cdot \cos A \quad \text{.....(ii)}$$

$\because$ (i) व (ii) बराबर हैं अत: L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 28. $\frac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ **= 1 + sin θ cos θ**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{1} \times \frac{\cos\theta}{(\cos\theta-\sin\theta)} + \frac{\sin^3\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos^3\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta} - \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + \sin\theta\cos\theta \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 29. यदि sec θ + tan θ = P हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{P^2-1}{P^2+1} = \sin\theta$

हल:

$$\because \quad P = \sec\theta + \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad P^2 = (\sec\theta + \tan\theta)^2$$

$$= \sec^2\theta + \tan^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad P^2 - 1 = (\sec^2\theta - 1) + \tan^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta$$

(दोनों पक्षों में से 1 घटाने पर)

$$\Rightarrow \quad P^2 - 1 = \tan^2\theta + \tan^2\theta + 2\sec\theta \,.\, \tan\theta$$

$$[\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$$

$$= 2\tan^2\theta + 2\sec\theta \,.\, \tan\theta$$

$$P^2 - 1 = 2\tan\theta(\tan\theta + \sec\theta) \quad .....(i)$$

पुन: $P^2 - 1 = 2(\sec^2\theta - 1) + 2\sec\theta \,.\, \tan\theta$

$$P^2 - 1 = 2\sec^2\theta - 2 + 2\sec\theta \,.\, \tan\theta$$

$$P^2 - 1 + 2 = 2\sec^2\theta + 2\sec\theta \,.\, \tan\theta$$

$$P^2 + 1 = 2\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) \quad .....(ii)$$

(i) में (ii) का भाग देने पर

$$\frac{P^2-1}{P^2+1} = \frac{2\tan\theta(\tan\theta+\sec\theta)}{2\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1} = \sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{P^2-1}{P^2+1} = \sin\theta \quad \text{(इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 30. यदि $\frac{\cos A}{\cos B} = m$ तथा $\frac{\cos A}{\sin B} = n$ हो, तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2)\cos^2 B = n^2$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\because \quad \frac{\cos A}{\cos B} = m \qquad \therefore \quad m^2 = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B}$$

तथा $\frac{\cos A}{\sin B} = n$ $\therefore$ $n^2 = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B}$

$\therefore$ L.H.S. $= (m^2 + n^2)\cos^2 B$

m^2 व n^2 का मान रखने पर

$$= \left[\frac{\cos^2 A}{\cos^2 B} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B}\right]\cos^2 B$$

$$= \left[\frac{\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B}{\sin^2 B . \cos^2 B}\right]\cos^2 B$$

$$= \frac{(\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B)}{\sin^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)}{\sin^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B} \times 1 \qquad [\because \sin^2 B + \cos^2 B = 1]$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B} = n^2$$

$=$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. $=$ R.H.S. (इतिसिद्धम्)

Ex 7.2

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो-

प्रश्न 1.

(i) $\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$ (ii) $\frac{\operatorname{cosec} 32^\circ}{\sec 58^\circ}$

(iii) $\frac{\tan 10^\circ}{\cot 80^\circ}$ (iv) $\frac{\cos 19^\circ}{\sin 71^\circ}$

हल:

(i) $\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 53^\circ)}{\sin 53^\circ}$ $[\because \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta]$

$$= \frac{\sin 53^\circ}{\sin 53^\circ} = 1 \text{ उत्तर}$$

(ii) $\frac{\operatorname{cosec} 32^\circ}{\sec 58^\circ} = \frac{\operatorname{cosec}(90^\circ - 58^\circ)}{\sec 58^\circ}$

$[\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta]$

$$= \frac{\sec 58^\circ}{\sec 58^\circ} = 1 \text{ उत्तर}$$

(iii) $\frac{\tan 10°}{\cot 80°} = \frac{\tan(90° - 80°)}{\cot 80°}$ [$\because$ $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$]

$= \frac{\cot 80°}{\cot 80°} = 1$ उत्तर

(iv) $\frac{\cos 19°}{\sin 71°} = \frac{\cos(90° - 71°)}{\sin 71°}$ [$\because$ $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

$= \frac{\sin 71°}{\sin 71°} = 1$ उत्तर

प्रश्न 2. (i) cosec 25° – sec 65°
(ii) cot 34° – tan 56°
(iii) $\frac{\sin 36°}{\cos 54°} - \frac{\sin 54°}{\cos 36°}$
(iv) sin θ cos(90° – θ) + cos θ sin(90° – θ)

हल: (i) cosec 25° – sec 65°
= cosec(90° – 65°) – sec 65° [∵ cosec(90° – θ) = sec θ]
= sec 65° – sec 65°
= 0 उत्तर

(ii) cot 34° – tan 56° .
= cot (90° – 56°) – tan 56° [∵ cot(90° – θ) = tan θ]
= tan 56° – tan 56°
= 0 उत्तर

(iii) $\frac{\sin 36°}{\cos 54°} - \frac{\sin 54°}{\cos 36°}$

$= \frac{\sin(90° - 54°)}{\cos 54°} - \frac{\sin(90° - 36°)}{\cos 36°}$

[$\because$ $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$]

$= \frac{\cos 54°}{\cos 54°} - \frac{\cos 36°}{\cos 36°}$

$= 1 - 1 = 0$ उत्तर

(iv) sin θ cos(90° – θ) + cos θ sin(90° – θ) [∵ cos(90° – θ) = sin θ sin(90° – θ) = cos θ]
= sin θ . sin θ + cos θ . cos θ
= $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ [∵ $\sin^2\theta = \cos^2\theta = 1$]
= 1 उत्तर

प्रश्न 3.
(i) sin 70° sec 20° – cos 20° cosec 70°
(ii) $\frac{2\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$

हल: (i) sin 70° sec 20° – cos 20° cosec 70°
= sin 70° . sec (90° – 70°) – cos 20° . cosec(90° – 20°) [∵ sec(90° – θ) = cosec θ और cosec(90° – θ0) = sec θ]
= sin 70° cosec 70° – cos 20° sec 20°

= 1 – 1 उत्तर

(ii) $\frac{2\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$

$$= \frac{2\cos(90^\circ - 23^\circ)}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan(90^\circ - 50^\circ)}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$$

∵ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

$$= \frac{2\sin 23^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\cot 50^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$$

$$= 2 \times 1 - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 2 - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 4.

(i) $\left(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ}\right)^2 - 2\cos 60^\circ$

(ii) $\left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}\right)^2$

हल:

(i) $\left(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ}\right)^2 - 2\cos 60^\circ$

$$= \left[\frac{\sin(90^\circ - 55^\circ)}{\cos 55^\circ}\right]^2 + \left[\frac{\cos(90^\circ - 35^\circ)}{\sin 35^\circ}\right]^2 - 2\cos 60^\circ$$

[∵ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$]

$$= \left(\frac{\cos 55^\circ}{\cos 55^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\sin 35^\circ}{\sin 35^\circ}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= (1)^2 + (1)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$
$$= 1 + 1 - 1 = 1$$ उत्तर

(ii) $\left(\frac{\sin 27°}{\cos 63°}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63°}{\sin 27°}\right)^2$

$$= \left[\frac{\sin(90° - 63°)}{\cos 63°}\right]^2 + \left[\frac{\cos(90° - 27°)}{\sin 27°}\right]^2$$

$[\because \sin(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta]$

$$= \left(\frac{\cos 63°}{\cos 63°}\right)^2 + \left(\frac{\sin 27°}{\sin 27°}\right)^2$$
$$= (1)^2 + (1)^2$$
$$= 1 + 1 = 2$$ उत्तर

प्रश्न 5. (i) cot 12° cot 38° cot 52° cot 60° cot 78°
(ii) tan 5° tan 25° tan 30° tan 65° tan 85°

हल: (i) cot 12° cot 38° cot 52° cot 60° cot 78°
= cot 12° cot 78° cot 38° cot 52° cot 60°
= cot (90° – 78°). cot 78° . cot (90° – 52°) . cot 52° . cot 60° ∵ cot(90° – θ) = tan θ
= tan 78°. cot 78° . tan 52°. cot 52°. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
= tan 78° . tan 78° . tan 52° . $\frac{1}{\tan 52°} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$
1 . 1 . $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(ii) tan 5° tan 25° tan 30° tan 65° tan 85°
= tan 5° . tan 25° . tan 65°. tan 85° . tan 30°
= tan 5° tan 85° . tan 25° tan 65o° . tan 30°
= tan(90° – 85°) tan 85° , tan (90° – 65°) tan 65°. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
∵ tan(90° – θ) = cot θ
= cot 85° tan 85°. cot 65o tan 65° . $\frac{1}{\sqrt{3}}$

1 . 1 . $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

प्रश्न 6. निम्न को 0° से 45° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए
(i) sin 81° + sin 71°
(ii) tan 68° + sec 68°

हल: (i) sin 81° + sin 71°
∵ 81°= 90° – 9°
∴ sin 81°= sin (90° – 9°).
∵ sin(90° – θ) = Cos θ
तथा = cos 9° .....(i)
71°= 90° – 19°
sin 71°= sin (90° – 19°)
∵ sin(90° – θ) = cos θ sin 71°
= cos 19° .....(ii)
(i) व (ii) से मान दिए गए व्यंजक में रखने पर
= sin 81° + sin 71°
= cos 9° + cos 19° उत्तर

(ii) tan 68° + sec 68°
68°= 90° – 22°
tan 68° = tan(90° – 22°)
∵ tan(90° – θ) = cot θ
∴ tan 68°= cot 22° .....(i)
पुन: 68°= 90° – 22°
sec 68° = sec (90° – 22°)
sec(90° – θ) = cotθ
या sec 68° = cosec 22° .....(ii)
(i) व (ii) से मान दिए गए व्यंजक में रखने पर
tan 68° + sec 68° = cot 22° + cosec 22° उत्तर

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 7. sin 65° + c0s 25° = 2 cos 25°

हल: L.H.S. = sin 65° + cos 25°
∵ 65°= 90° – 25°
∴ sin 65°= sin (90° – 25°) [∵ sin(90° – θ) = cos θ]

या

sin 65° = cos 25°
मान व्यंजक में रखने पर
= sin 65° + cos 25°
= cos 25° + cos 25°
= 2 cos 25° = R.H.S.
∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. sin 35° sin 55° – cos 35° cos 55° = 0

हल: L.H.S. = sin 35° sin 55° – cos 35° cos 55°
= sin 35° sin (90°-35°) – cos 35° . cos (90°-35°)
[∵ sin(90° – θ) = cos θ
cos(90° – θ) = sin θ]
= sin 35°. cos 35° – cos 35°. sin 35°
= sin 35° (cos 35° – cos 35°)
= sin 35°. 0 = 0 = R.H.S. (इतिसिद्धम्)
∴ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 9. $\frac{\cos 70^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}+\frac{\cos 59^{\circ}}{\sin 31^{\circ}}-8 \sin ^{2} 30^{\circ}=0$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 70^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}+\frac{\cos 59^{\circ}}{\sin 31^{\circ}} - 8 \sin^{2} 30^{\circ}$$

$$= \frac{\cos(90^{\circ}-20^{\circ})}{\sin 20^{\circ}}+\frac{\cos(90^{\circ}-31^{\circ})}{\sin 31^{\circ}}-8\sin^{2} 30^{\circ}$$

$$\cos(90^{\circ}-\theta) = \sin\theta$$

$$= \frac{\sin 20^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}+\frac{\sin 31^{\circ}}{\sin 31^{\circ}}-8\sin^{2} 30^{\circ}$$

$$= 1 + 1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$= 2 - 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 - 2 = 0 = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 10. sin (90° – θ) cos (90° – θ) = $\frac{\tan\theta}{1+\tan^{2}\theta}$

हल: L.H.S. = $\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)$
= $\cos\theta \cdot \sin\theta = \sin\theta\cos\theta$ .....(1)

$$\text{R.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{1}$$

$= \sin\theta \cdot \cos\theta$ .....(ii)

(i) व (ii) से L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. $\frac{\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\tan\theta}$ **+ $\cos^2(90° - \theta) = 1$**

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\tan\theta} + \cos^2(90° - \theta)$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \sin^2\theta \quad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{1}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin^2\theta$$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = \text{R.H.S.}$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. $$\frac{\tan(90°-\theta)\cot\theta}{\text{cosec}^2\theta} - \cos^2\theta = 0$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan(90^\circ - \theta)\cot\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \cos^2\theta$$

$\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

$$= \frac{\cot\theta.\cot\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \cos^2\theta$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}} - \cos^2\theta$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{1} - \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - \cos^2\theta = 0 = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. $\frac{\cos(90^\circ - \theta)\sin(90^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} = \sin^2\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos(90^\circ - \theta).\sin(90^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)}$$

[$\because \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$]

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sin^2\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

$$\frac{\sin\theta\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\sec(90^\circ-\theta)}+\frac{\cos\theta\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\operatorname{cosec}(90-\theta)}$$

प्रश्न 14.

$$= \sin\theta\ \cos\theta$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta.\cos(90^\circ-\theta).\cos\theta}{\sec(90^\circ-\theta)}+\frac{\cos\theta\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\operatorname{cosec}(90-\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta.\sin\theta.\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta}+\frac{\cos\theta.\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta}$$

$$\left[\begin{array}{c}\because\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \\ \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta \\ \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta \\ \text{तथा } \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta\end{array}\right]$$

$$= \sin^2\theta\ .\ \cos\theta\ .\ \sin\theta + \cos^2\theta\ .\ \sin\theta\ .\ \cos\theta$$

$$= \sin\theta\ .\ \cos\theta\ (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$[\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \sin\theta\ .\ \cos\theta(1)$$

$$= \sin\theta.\ \cos\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. यदि sin 3θ = cos (θ – 6°) यहाँ 3θ और (θ – 6°) न्यूनकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दिया हुआ है की sin 3θ = cos (θ – 6°) …(i)
∵ sin 3θ = cos(90° – 3θ)
∴ समीकरण (i) को इस रूप में लिख सकते हैं-
cos(90° – 3θ) = cos(θ – 6°)
क्योंकि 90° – 3θ और θ – 6° दोनों ही न्यूनकोण हैं, इसलिए
90° – 3θ = θ – 6°
या -3θ – θ = – 6° – 90°
या -4θ = – 96°
जिससे $\theta = \frac{-96^\circ}{-4} = 24^\circ$
अतः θ का मान 24° होगा। उत्तर

प्रश्न 16. यदि sec 5θ = cosec (θ – 36°) यहाँ 58 एक न्यूनकोण है। तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार दिया गया है कि sec 5θ = cosec (θ – 36°) …..(i)
∵ sec 5θ = cosec (90° – 5θ)
∴ समीकरण (i) को इस रूप में भी लिखा जा सकता है
cosec(90° – 5θ) = cosec(θ – 36°)
क्योंकि 90° – 5θ और θ – 36° दोनों ही न्यूनकोण हैं,
∴ 90° – 5θ = θ – 36°
या – 5θ – θ = – 36° – 90°
या – 6θ = – 126°
∴ $\theta=\frac{-126}{-6}=21^{\circ}$
अतः 8 का मान 21° होगा। उत्तर

प्रश्न 17. यदि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्त:कोण हों तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$

हल: A, B और C त्रिभुज के अन्त:कोण हैं।
∴ A + B + C = 180° [त्रिभुज के तीनों कोणों का जोड़ 180° होता है]

या $\quad B + C = 180° - A$

या $\quad \frac{B+C}{2} = \frac{180°-A}{2}$

या $\quad \frac{B+C}{2} = \left(90° - \frac{A}{2}\right)$

दोनों ओर tan लेने पर,

$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\left(90° - \frac{A}{2}\right)$

$=\cot\frac{A}{2}$
[∵ tan (90° – θ) = cot] इतिसिद्धम्।

प्रश्न 18. यदि cos 2θ = sin 4θ हो और 2θ व 4θ न्यूनकोण हो तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार दिया गया है कि cos 2θ = sin 4θ …..(i)
∵ cos 2θ8 = sin(90° – 2θ)
∴ समीकरण (i) को इस रूप में भी लिखा जा सकता है-
sin(90° – 2θ) = sin 4θ
क्योंकि 90° – 2θ और 4θ दोनों ही न्यूनकोण हैं।
∴ 90° – 2θ = 4θ
या – 2θ – 4θ = – 90°
या – 6θ = – 9θ°

$\therefore \theta = \frac{-90^\circ}{-6} = 15^\circ$
अतः θ का मान 15° होगा। उत्तर

Additional Questions

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. $\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ **बराबर है**

(A) cos θ (B) sin θ (C) sec θ (D) cot θ

प्रश्न 2. $\frac{\sqrt{cosec^2\theta-1}}{cosec\theta}$ **बराबर है**

(A) cos θ (B) sec θ (C) sin θ (D) cosec θ

प्रश्न 3. sin θ cosec θ + cos θ sec θ बराबर है

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) – 1

प्रश्न 4. दिया गया है कि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ **और** $\cos\beta = \frac{1}{2}$ **तब (α +β) का मान है—**

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

प्रश्न 5. $\frac{3sec51^\circ}{cosec39^\circ}$ **का मान है-**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

प्रश्न 6. यदि $\cos(90^\circ-\theta) = \frac{1}{2}$ **हो तो 6 का मान होगा**

(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

प्रश्न 7. $\sin^2 50° + \cos^2 50° + 1$ का मान बराबर है

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

प्रश्न 8. $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ बराबर होगा

(A) $\frac{1}{\sin\theta}$ (B) $\frac{1}{\cos\theta}$ (C) $\frac{1}{1-\sin\theta}$ (D) $\frac{1}{1+\sin\theta}$

प्रश्न 9. $\text{cosec}^2\theta - 1$ बराबर है

(A) $\tan^2\theta$ (B) $\cot^2\theta$ (C) $-\tan^2\theta$ (D) $-\cot^2\theta$

प्रश्न 10. $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ का मान है-

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 2

उत्तर-तालिका 1. (B) 2. (A) 3. (A) 4. (D) 5. (C) 6. (D) 7. (A) 8. (B) 9. (B) 10. (B)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1. यदि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ हो, जहाँ 3A एक न्यून कोण है। तो A का मान ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया है-
$\sin 3A = \cos (A - 26°)$
$\because \sin 3A = \cos (90° - 3A)$
$\therefore \cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$
क्योंकि $90° - 3A$ और $A- 26°$ दोनों ही न्यूनतम कोण हैं,
$\therefore 90° - 3A = A - 26°$
या $4A = 90° + 26° = 116°$
$A = \frac{116°}{4} = 29°$ उत्तर

प्रश्न 2. $\cot 85° + \cos 75°$ को (0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिये ।

हल: cot 85° + cos 75° = cot (90° – 5°) + cos (90° – 15°)
∵ cot(90° – θ) = tan θ
cos(90° – θ) = sinθ
= tan 5° + sin 15° उत्तर

प्रश्न 3. sin 25° . cos 65° + cos 25° . sin 65° + $\sin^2$ 25° + sin 65° का मान ज्ञात कीजिये ।

हल: sin 25° . cos 65° + cos 25° . sin 65° + sin 25° + $\sin^2$ 65°
= sin(90° – 65°) . cos 65° + cos(90° – 65°) . sin 65° + sin (90° – 65°) + sin 65°
= cos 65° . cos 65° + sin 65° . sin 65° + $\cos^2$ 65° + $\sin^2$ 65°
= $\cos^2$ 65° + $\sin^2$ 65° + $\cos^2$ 65° + $\sin^2$ 65°
∵ $\sin^2$ θ + $\cos^2$ θ
= 1 = 1 + 1 = 2 उत्तर

प्रश्न 4. यदि sin θ = cos θ तो θ का मान ज्ञात कीजिये।

हल: ∵ sin θ = cos θ
⇒ sin θ = sin (90° – θ)
⇒ θ = 90° – θ
⇒ 2 θ = 90°
⇒ $\theta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ उत्तर

प्रश्न 5. 4 sin 18 sec 72° का मान लिखिए।

हल: 4 sin 18 sec 72° = 4 sin 18 sec (90° – 18°)
= 4 sin 18° . cosec 18°
$= 4\sin 18^\circ \times \frac{1}{\sin 18^\circ} = 4$ उत्तर

प्रश्न 6. $\cos^2$ 50° + $\cos^2$ 40° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\cos^2$ 50° + $\cos^2$ (90° – 50°)
= $\cos^2$ 50° + $\sin^2$ 50°
= 1 उत्तर

प्रश्न 7. $\frac{\sqrt{1-\sin^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ}$ **का सरलतम मान लिखिए।**

हल: $\frac{\sqrt{\cos^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 1$ उत्तर

प्रश्न 8. sin θ . cosec θ – cos θ sec θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin θ . cosec θ – cos θ . sec θ
$= \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta} - \cos\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} = 1 - 1 = 0$ उत्तर

प्रश्न 9. (1 – $\sin^2$ θ) $\sec^2$ θ का मान लिखिए।

हल: (1 – $\sin^2$ θ) sec θ
= $\cos^2$ θ . $\sec^2$ θ
$= \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = 1$ उत्तर

प्रश्न 10. $\frac{1}{\sqrt{cosec^2\theta - 1}}$ **का मान लिखिए।**

हल: उत्तर

प्रश्न 11. $\frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल: tan 49° = cot(90° – 49°) = cot 41°
{tan θ = cot(90 – θ)}
$\therefore \frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ} = \frac{\cot 41^\circ}{\cot 41^\circ} = 1$

प्रश्न 12. $\sin^2 50°$ + $\sin^2 40°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: 40° = 90° – 50°
∴ sin 40° = sin(90° – 50°) = cos 50°
अतः $\sin^2 50°$ + $\sin^2 40°$ = $\sin^2 50°$ + $\cos^2 50°$ = 1 (∵ $\sin^2\theta$ + $\cos^2\theta$ = 1)

प्रश्न 13. tan 39° – cot 51° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: tan 39° = tan(90° – 51°) = cot 51°
अतः tan 39° – cot 51° = cot 51° – cot 51° = 0

प्रश्न 14. sec 50° sin 40° + cos 40° cosec 50° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sec 50° sin 40° + cos 40° cosec 50°
= sec(90° – 40°) sin 40° + cos 40° cosec (90° – 40°)
= cosec 40° sin 40° + cos 40° sec 40°
$= \frac{1}{\sin 40°} . \sin 40° + \cos 40° \cdot \frac{1}{\cos 40°}$ 1 + 1 = 2

प्रश्न 15. यदि tan 2A = cot (A – 18°) हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल: tan 2A = tan [90 – (A – 18°)]
tan 2A = tan(108 – A)
∴ 2A = 108° – A
3A = 108° ⇒ A = 36°

प्रश्न 16. tan 52° tan 38° का मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: tan 52° tan 38°
= tan 52° tan (90° – 52°)
= tan 52° cot 52° ∵ tan (90° – θ) = cot θ
= 1 उत्तर ∵ tan θ. cot θ = 1

प्रश्न 17. cos 50° . cosec 40° का मान लिखिये। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: cos 50° . cosec 40°
⇒ cos(90° – 40°) . cosec 40°
⇒ sin 40° . cosec 40° ∵ cos(90° – θ) = sin θ
= 1 उत्तर ∵ sin θ × cosec θ = 1

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. $\sec^2 65° – \cot^2 25° – 2 \sin 30° \cos 60°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sec^2 65° – \cot^2 25° – 2 \sin 30° \cos 60°$
यहाँ 25° = 90° – 65° करने पर-
cot (25°) = cot (90° – 65°)
cot 25° = tan 65° [∵ cot (90° – θ) = tan θ]
अब व्यंजक इस प्रकार हो जाएगा-

$(\sec^2 65° - \tan^2 65°) - 2 \sin 30° \cos 60°$
$= 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ [$\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$]
$= 1 - \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2}$ उत्तर

प्रश्न 2. का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin 17° = sin (90° — 73°)
या sin 17° = cos 73° .... (i)
cos 67° = cos (90° – 23°)
या cos 67° = sin 23° .... (ii)
sin 15° = sin (90° – 75°)
या sin 15° = cos 75° .... (iii)
समीकरण (i), (ii) व (iii) से sin 17°, cos 67° व sin 15° के मान मूल व्यंजके में रखने पर

= 5 (1) + 2 (1) – 6 (1) = 5 + 2 – 6
= 7 – 6 = 1 उत्तर

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिये कि
sec A (1 – sin A) (sec A + tan A) = 1

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sec A\ (1 - \sin A)\ (\sec A + \tan A)$$
$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$
$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$
$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{R.H.S.}\ (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 4. $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल: $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$
हम जानते हैं कि cot A = tan (90° – A)
अतः cot 25° = tan (90° – 25°) = tan 65°

अर्थात् $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ} = \frac{\tan 65^\circ}{\tan 65^\circ}$
= 1 उत्तर

प्रश्न 5. sin 35° cos 55° + cos 35° sin 55° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin 35° cos 55° + cos 35° sin 55°
= sin 35° × cos (90° – 35°) + cos 35° × sin (90° – 35°) [∵ cos (90°- θ) = sinθ sin (90°- θ) = cosθ]
= sin 35° × sin 35° + cos 35° × cos 35°
= sin 35° + $\cos^2$ 35° (∵$\sin^2$ θ + $\cos^2$ θ = 1, θ के प्रत्येक मान के लिये) = 1 उत्तर

प्रश्न 6. cos 12° + cos 78° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: cos 12° + cos 78°
= cos- 12° + $\{\cos (90^\circ – 12^\circ)\}^2$
= $\cos^2$ 12° + sin° 12° [∵ cos (90° – θ) = sin θ]
= 1 उत्तर

प्रश्न 7. दिखाइए कि tan 36° tan 17° tan 54° tan 73° = 1

हल: tan 36° tan 17° tan 54° tan 73°
= tan 36° tan 17° tan (90° – 36°) . tan (90° – 17°)
= tan 36° . tan 17° cot 36° cot 17°
= tan 36° . cot 36° . tan 17° . cot 17°
= 1.1
= 1 उत्तर

प्रश्न 8. दिखाइए कि sin 28° cos 62° + cos 28° sin 62° = 1.

हल: sin 28° cos 62° + cos 28° sin 62°
= sin 28° × cos (90° – 28°) + cos 28° × sin (90° – 28°)
[∵ cos (90° – θ) = sin θ तथा sin (90° – θ) = cos θ]
= sin 28° . sin 28° + cos 28° . cos 28°
= $\sin^2$ 28° + $\cos^2$ 28°
(∵ $\sin^2$ θ + cose^2 θ = 1, θ के प्रत्येक मान के लिये)
= 1 उत्तर

प्रश्न 9. $\frac{\tan 67^\circ}{\cot 23^\circ}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल: $\frac{\tan 67^\circ}{\cot 23^\circ}$
हम जानते हैं कि cot A = tan (90° – A)
अतः cot 23° = tan (90° – 23°) = tan 67°
अर्थात् $\frac{\tan 67^\circ}{\cot 23^\circ} = \frac{\tan 67^\circ}{\tan 67^\circ} = 1$ उत्तर

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि $\left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \tan^2 A$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{-(\sin A-\cos A)}{\cos A}\times\frac{\sin A}{(\sin A-\cos A)}\right]^2$$

$$= \left[-\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि cot θ + tan θ = cosec θ sec θ

हल:

LHS (वाम पक्ष) = cot θ + tan θ

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

= cosec θ . sec θ = RHS दक्षिण पक्ष

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि $(1 + \tan^2\theta)(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = 1$

हल: LHS (वाम पक्ष)= $(1 + \tan^2\theta)(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$
$= (1 + \tan^2\theta)(1 - \sin^2\theta)$
$= \sec^2\theta \cos^2\theta$
$= \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$
= 1 = RHS (दक्षिण पक्ष) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

हल:

LHS (वाम पक्ष) $= \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} = 2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$= 2\sec^2\theta$ = RHS (दक्षिण पक्ष)

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए tan 15° tan 20° tan 70° tan 75° = 1

हल: वाम पक्ष (LHS) = tan 15° tan 20° tan 70° tan 75°
= tan 15° tan 20° tan (90° – 20°) tan (90° – 15°)

= tan 15° tan 20° . cot 20° . cot 15°
= tan 15° tan 20° $\frac{1}{\tan 20^\circ \tan 15^\circ} = 1$ (RHS) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. सिद कीजिए $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

हल:

LHS (वाम पक्ष) = $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta]}{\cos\theta[2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)]}$

$(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \frac{\sin\theta[\cos^2\theta - \sin^2\theta]}{\cos\theta[\cos^2\theta - \sin^2\theta]} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

= tan θ = RHS (दक्षिण पक्ष) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) = $\cos^4\theta - \sin^4\theta$
$= (\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2$
$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$= 1.(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$= 1.(1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$
= RHS (दक्षिण पक्ष) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 17. यदि sin θ + cos θ = p और sec θ + cosec θ = q हो, तो सिद्ध कीजिए कि $q(p^2 - 1) = 2p$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: LHS (वाम पक्ष) = $q(p^2 - 1)$ p
p व q का मान रखने पर = (sec θ + cosec θ) [(sin θ + cos θ) – 1]

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)[\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1]$$

$$= \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)[1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1]$$

$$= \left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta.\cos\theta}\right] \times (2\sin\theta\cos\theta)$$

$= 2[\sin\theta + \cos\theta] = 2p =$ RHS (दक्षिण पक्ष)

निबन्धात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1. यदि θ = 30° तो अग्रलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

$$\frac{3\cot(90° - \theta) - \tan^3\theta}{1 - 3\cot^2(90° - \theta)}$$

हल: θ = 30° रखने पर व्यंजक होगा-

$$= \frac{3\cot(90° - 30°) - \tan^3 30°}{1 - 3\cot^2(90° - 30°)}$$

$$= \frac{3\tan 30° - \tan^3 30°}{1 - 3\tan^2 30°} \qquad [\because \cot(90° - \theta) = \tan\theta]$$

$$= \frac{3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1 - 3.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1 - 3.\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1 - 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{0} = \frac{\frac{9-1}{3\sqrt{3}}}{0} = \frac{8}{0} = \infty$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए-

tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84° = 1

हल: L.H.S. = tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84°
∵ 6° = 90° – 84°
∴ tan 6° = tan (90° – 84°)
tan 6° = cot 84° [∵ tan (90° – 8) = cot 8] ….(i)
तथा 26° = 90° – 64°
tan 26° = tan (90° – 64°)
tan 26° = cot 64° ….(ii)
समीकरण (i) वे (ii) से दिए गए व्यंजक में मान रखने पर
= tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84°
= cot 84° . tan 84° . cot 64° . tan 64° ∵ tan θ . cot θ = 1
= 1 . 1 = 1 = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 3. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए-
cosec (90° – θ) + x cos o cot (90° – θ) = sin (90° – θ)

हल: cosec (90° – θ) + x cos θ cot (90° – θ) = sin (90° – θ)
⇒ sec θ + x cos θ tan θ = cos θ

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} + \frac{x\cos\theta \times \sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} + x\sin\theta = \cos\theta$$

$$\Rightarrow x\sin\theta = \cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow x\sin\theta = \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta}$$

$$x\sin\theta = \frac{-\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad [\because 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$x = \frac{-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 4. निम्न का मान ज्ञात कीजिये – (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ – cosec θ)

हल: (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ – cosec 0)

$$= \left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-(1)^2}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

= 2 **उत्तर**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिये-

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\cos^2 B-\sin^2 A}{\cos^2 B\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \tan^2 A - \tan^2 B$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 A)\cos^2 B-\cos^2 A(1-\cos^2 B)}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B-\cos^2 A+\cos^2 A\cos^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 B-\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}$$ = मध्य पद **(इतिसिद्धम्)**

$$= \frac{(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

= R.H.S. **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 6. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिये-

$$\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} = \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2}{(\sin A - \cos A)(\sin A + \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 2\sin A \cos A + \cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A \cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A + 2\cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \frac{2(\sin^2 A + \cos^2 A)}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2 \times 1}{\sin^2 A - \cos^2 A} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिये कि-

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$\frac{\frac{\cos A - \cos A \sin A}{\sin A}}{\frac{\cos A + \cos A \sin A}{\sin A}} = \frac{\cos A(1 - \sin A)}{\cos A(1 + \sin A)} = \frac{(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)}$$

अंश तथा हर में sin A से भाग देने पर

$$\frac{\frac{(1 - \sin A)}{\sin A}}{\frac{(1 + \sin A)}{\sin A}} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 8. सर्वसमिका $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

हल: क्योंकि हमें sec θ और tan θ से सम्बन्धित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए सबसे पहले सर्वसमिका के वाम पक्ष के अंश और हर को cos θ से भाग देकर वाम पक्ष को sec θ और tan θ के पदों में रूपान्तरित करने पर

वाम पक्ष = $\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)-1}{(\tan\theta-\sec\theta)+1} = \frac{\{(\tan\theta+\sec\theta)-1\}(\tan\theta-\sec\theta)}{\{(\tan\theta-\sec\theta)+1\}(\tan\theta-\sec\theta)}$$

अंश तथा हर में $(\tan\theta - \sec\theta)$ से गुणा करने पर

$$= \frac{(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\tan\theta-\sec\theta)}{\{\tan\theta-\sec\theta)+1\}(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{-1-\tan\theta+\sec\theta}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

$$= \frac{-(1+\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta-\sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि

$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ = cosec θ + cot θ (मध्य. शिक्षा बोर्ड , 2018)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

वर्गमूल के अंदर अंश व हर में $1 + \cos\theta$ का गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$[\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta]$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

$= \text{R.H.S.}$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. (i) यदि cos 3A = sin(A – 34°) हो, जहाँ 3A एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।
(ii) निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।
$\frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A} = \left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2$

हल: (i) यहाँ यह दिया हुआ है कि
cos 3A = sin(A – 34°) ....(1)
cos 3A = sin(90° – 3A)
इसलिए समीकरण (1) को इस रूप में लिख सकते हैं।
sin(90° – 3A) = sin(A – 34°)
क्योंकि 90° – 3A और A – 34° दोनों ही न्यून कोण हैं, इसलिए
90° – 3A = A – 34°
या -3A – A = -34° – 90°
या -4A = -124°

जिससे $A = \frac{-124}{-4} = 31^\circ$ प्राप्त होता है।
अत: A का मान 31° होगा। **उत्तर**

(ii) $\text{L.H.S.} = \frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{\text{cosec}^2 A}{\sec^2 A}$ $\quad \Big| \because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ और $1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A$

$= \frac{\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{1}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$

$\text{R.H.S.} \quad \left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}\right)^2$

$= \left(\frac{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}\right)^2 = \left(\frac{(\sin A - \cos A)\times \cos A}{-(\sin A - \cos A)\times \sin A}\right)^2$

$$= \left(\frac{\cos A}{-\sin A}\right)^2 = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इतिसिद्धम्

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

हल:

LHS (वाम पक्ष) = $(\sec\theta - \tan\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$ = RHS (दक्षिण पक्ष)

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि $\frac{sin\theta}{1+cos\theta} + \frac{1+cos\theta}{sin\theta} = 2cosec\theta$

हल:

LHS (वाम पक्ष) = $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = 2\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

= 2 cosec θ = RHS (दक्षिण पक्ष)

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

हल:

LHS (वाम पक्ष) = $\frac{1+\sec A}{\sec A}$

$= \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos A+1}{\cos A}\times\frac{\cos A}{1}$

$= \frac{1+\cos A}{1}$

$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$

{अंश व हर में (1 – cos A) से गुणा करने पर}

$= \frac{(1)^2-(\cos A)^2}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ = RHS (दक्षिण पक्ष) **(इतिसिद्धम्)**

$(\because 1-\cos^2 A=\sin^2 A)$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि $\frac{cosA+cosecA-1}{cotA-cosecA+1}=\frac{1+cosA}{sinA}$

हल:

LHS (वाम पक्ष) = $\frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-1}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}$

$= \frac{(\cot A+\operatorname{cosec} A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}$

$(\because \operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1)$

$= \frac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)-[(\operatorname{cosec} A+\cot A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)]}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}$

$= \frac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)[1-(\operatorname{cosec} A-\cot A)]}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}$

$= \frac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)[\cot A-\operatorname{cosec} A+1]}{(\cot A-\operatorname{cosec} A+1)}$

$= \operatorname{cosec} A+\cot A$

$= \frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}$ = RHS (दक्षिण पक्ष)

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ $[0 \leq \mathbf{A} < 45^\circ]$ **(माध्य. शिक्षा बोर्,ड मॉडल पेपर, 2017-18)**

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$$= \left[\frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}\right]^2 = \left[\frac{1/\cos A}{1/\sin A}\right]^2 = \left[\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

$$\text{अब, मध्य पद} = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \left[\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}\right]^2$$

$$= \left[-\frac{(\sin A - \cos A)}{\cos A} \times \frac{\sin A}{(\sin A - \cos A)}\right]^2$$

$$= \left[-\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [-\tan A]^2$$

$$= \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

अत: L.H.S. = मध्य पद = R.H.S. (इतिसिद्धम्)