अध्याय 11

एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण

11.1 आपने पिछली कक्षाओं में बीजीय व्यंजकों एवं समीकरणों के बारे में पढ़ा है। नीचे कुछ व्यंजक व समीकरण दिए गए हैं।

(i) $2x + 5$ (ii) $x + y = 0$ (iii) $3xy = 5z$ (iv) $10x^2y$

इसमें से कौन कौन से समीकरण हैं ?

आपको याद होगा कि समीकरणों में सदैव "=" चिह्न का प्रयोग होता है।

हम इस अध्याय में एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन करेंगे अर्थात् जिन समीकरणों में एक ही चर हो तथा चर की अधिकतम घात भी एक ही हो जैसे –

$x + 2 = 7, \ 2x - 3 = 0$

पिछली कक्षा में हमने ऐसे सरल समीकरणों को हल करना सीखा जिसमें चर राशि एक ही पक्ष में थी। साथ ही हमने परिमेय गुणांकों वाले समीकरण को भी हल करना सीखा। जैसे –

$$5x - 4 = 26$$

और

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 30$$

आओ एक समीकरण के साथ कुछ अभ्यास करके उसके हल को देखें–

समीकरण $3x + 9 = 15$ हल $x = 2$

क्र.सं.	दोनों पक्षों	नया समीकरण	हल
1	में 2 जोड़ने पर	$3x + 11 = 17$	$x = 2$
2	में से 3 घटाने पर	$3x + 6 = 12$	$x =$ ....
3	को 2 से गुणा करने पर	$6x + 18 =$ ...	$x =$ ....
4	में 3 से भाग देने पर	............$= 5$	$x =$ ....

इस प्रकार समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने, घटाने, शून्येतर संख्या से गुणा करने या भाग लगाने पर समीकरण का स्वरूप बदल जाता है लेकिन उसके हल (उत्तर) में कोई अन्तर नहीं आता है। अतः समीकरण हल करने में हम आवश्यकतानुसार इन संक्रियाओं का सहारा लेते हैं।

अब हम ऐसे सरल समीकरण हल करना सीखेंगे, जिनके दोनों पक्षों में चर राशि हो सकती है।

समीकरण $8x - 13 = 5x - 7$ को हल करने का अर्थ है उसका स्वरूप $x =$ .... बनाना।

अतः LHS में इकाई चर राशि लानी है और RHS में अचर राशि रखनी है इसके लिए दोनों पक्षों में समान संक्रिया या पक्षान्तरण करेंगे।

उदाहरण 1 समीकरण $8x - 13 = 5x - 7$ को हल कीजिए।

हल 1 (तुला विधि) –

$8x - 13 + 13 = 5x - 7 + 13$ [दोनों पक्षों में 13 जोड़ने पर]

या $8x = 5x + 6$

या $8x - 5x = 5x - 5x + 6$ [दोनों पक्षों 5x घटाने पर]

या $3x = 6$

या $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ [दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर]

या $x = 2$

हल 2 (पक्षान्तर विधि) –

$8x - 13 = 5x - 7$

या $8x - 5x = -7 + 13$ [5x और - 13 का पक्षान्तर करने पर]

या $3x = 6$

$x = \frac{6}{3}$ [गुणांक 3 का पक्षान्तर क्रिया]

या $x = 2$

चूंकि पक्षान्तर विधि तुलाविधि का ही संक्षिप्त और सरलरूप है अतः आगे हम पक्षान्तर विधि का ही प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 2 समीकरण $\frac{x}{5} = \frac{7-6x}{3}$ हल कीजिए।

हल $\frac{x}{5} = \frac{7-6x}{3}$

या $3x = 35 - 30x$ [ल.स. 15 से दोनों को गुणा करने पर या वज्र गुणन करने पर]

या $3x + 30x = 35$

या $33x = 35$

या $x = \frac{35}{33}$

उदाहरण 3 समीकरण $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$ हल कीजिए।

हल $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+1+3}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+4}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+4}{3} \times 6 = \frac{x-3}{6} \times 6$ [ल.स. 6 से दोनों पक्षों का गुणा करने पर]

या $12x + 8 = x - 3$

या $12x - x = -3 - 8$

या $11x = -11$

या $x = \frac{-11}{11}$

या

$x = -1$

उदाहरण 4 समीकरण $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$ हल कीजिए।

हल $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$

2, 3, 4 और 5 के ल. स. 60 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर–

$$60 \times \frac{x+1}{2} + 60 \times \frac{x+2}{3} = 60 \times \frac{x+3}{4} + 60 \times \frac{x+4}{5}$$

या $30(x + 1) + 20(x + 2) = 15(x + 3) + 12(x + 4)$

या $30x + 30 + 20x + 40 = 15x + 45 + 12x + 48$

या $30x + 20x - 15x - 12x = 45 + 48 - 30 - 40$

या $50x - 27x = 93 - 70$

या $23x = 23$

या $x = \frac{23}{23}$

या $x = 1$

यदि गुणांक या संख्याएँ दशमलव व भिन्न के रूप में हों तो उन्हें सरल भिन्न में बदलकर लघुत्तम से गुणा करके हल करते हैं।

उदाहरण 5 समीकरण 0.5m + 1.5 = 0.25m - 1.5 हल कीजिए।

हल 0.5m + 1.5 = 0.25m - 1.5

या $\frac{5}{10}m + \frac{15}{10} = \frac{25}{100}m - \frac{15}{10}$ [दशमलव भिन्न को सरल भिन्न में बदलने पर]

या $50m + 150 = 25m - 150$ [100 से गुणा करने पर क्योंकि 10 और 100 का ल.स. 100 होता है]

या $50m - 25m = -150 - 150$

या $25m = -300$

या $m = \frac{-300}{25}$

या $m = -12$

यदि किसी भिन्न के अंश और हर में चर राशि हो तो वहाँ वज्र (तिर्यक) गुणन या उनके पक्षान्तर से सरल समीकरण में बदल कर हल किया जाता है।

उदाहरण 6 समीकरण $\frac{(2x + 5)}{(3x + 1)} = \frac{3}{11}$ हल कीजिए।

हल वज्र (तिर्यक) गुणन द्वारा

$11(2x + 5) = 3(3x + 1)$

या $22x + 55 = 9x + 3$

या $22x - 9x = 3 - 55$

या $13x = -52$

या $x = \frac{-52}{13}$

या $x = -4$

करो और सीखो

निम्न समीकरण हल कीजिए।

1. $\frac{2x}{x + 6} = 1$
2. $10 = x + 3$
3. $16 = 7x - 9$
4. $\frac{x + 5}{x} = 2\frac{2}{3}$

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए।

1. $6x + 3 = 4x + 11$
2. $3(x + 5) = 4x + 9$
3. $3x + 2(x + 3) = 21$
4. $\frac{x + 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = \frac{2x - 5}{7} + 9$
5. $\frac{3x - 2}{5} = 4 - \left(\frac{x + 2}{3}\right)$
6. $\frac{x + 2}{2} + \frac{x + 4}{3} = \frac{x + 6}{4} + \frac{x + 8}{5}$

7. $0.6x + 0.25x = 0.45x + 1.2$
8. $2.5x - 7 = 0.5x + 13$
9. $\frac{7x + 4}{x + 2} = \frac{-4}{3}$
10. $\frac{4x + 8}{5x + 8} = \frac{5}{6}$

11.2 इबारती प्रश्नों का हल

आइए गणितीय वाक्य बनाने का दोहरान करें कोई संख्या x हैं तो रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

संख्या से 5 अधिक = $x + 5$
संख्या से 3 कम = ...
संख्या का आधा = ...
संख्या के आधे से 7 कम = ...
संख्या के तिहाई से 4 अधिक = ...
संख्या के तीन गुने से 6 अधिक = ...
संख्या के 5 गुने से 3 कम = ...

दैनिक जीवन की कई समस्याओं, पहेलियों आदि का समाधान हम समीकरण द्वारा प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए निम्नलिखित चरणों में कार्य किया जाता है–

1. दी गई समस्या को ध्यान से पढ़ें इसमें ज्ञात तथा अज्ञात राशि पता करें।
2. अब अज्ञात राशि को चर राशि x के रूप में लिखें।
3. समस्त कथनों को गणितीय कथन (बीजीय पद एवं व्यंजक) के रूप में लिखें।
4. प्रश्न की शर्त के अनुसार जो राशियाँ बराबर हों उन्हें समीकरण के रूप में लिखें।
5. समीकरण को हल करके चर का मान ज्ञात करें।
6. उत्तर की जाँच प्रश्न की शर्ते जाँच कर करें।

उदाहरण 7 दो संख्याओं का योग 60 है। छोटी संख्या का तीन गुना बड़ी संख्या के दुगुने के बराबर है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना कि छोटी संख्या = x
प्रश्नानुसार बड़ी संख्या = $60 - x$
छोटी संख्या का तीन गुना = $3x$
बड़ी संख्या का दुगुना = $2(60 - x)$
प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$$3x = 2(60 - x)$$

या $$3x = 120 - 2x$$

या $3x + 2x = 120$

या $5x = 120$

या $x = \frac{120}{5}$

या $x = 24$

दूसरी संख्या = $60 - x = 60 - 24 = 36$ उत्तर 24, 36

दो अंकों की संख्याएँ बनाने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करे–
संख्या = 10 x दहाई का अंक + इकाई का अंक

उदाहरण 8 एक संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक से 3 कम है। संख्या उसके अंकों के योग के 7 गुने से 3 अधिक है। संख्या ज्ञात करो।

हल माना कि दहाई का अंक = x

तो इकाई का अंक = $x - 3$

संख्या = 10 x दहाई का अंक + इकाई का अंक

= $10 \times x + x - 3$

= $11x - 3$

अंको का योग = $(x + x - 3)$

प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$11x - 3 = 7(x + x - 3) + 3$

या $11x - 3 = 7x + 7x - 21 + 3$

या $11x - 7x - 7x = -21 + 3 + 3$

$-3x = -15$

$x = \frac{-15}{-3}$

$x = 5$

अतः अभीष्ट संख्या

$= 11x - 3$

$= 11 \times 5 - 3$

$= 55 - 3$

$= 52$

उदाहरण 9 रमेश के पिता की आयु रमेश से 27 वर्ष अधिक है। 5 वर्ष बाद रमेश की आयु और उसके पिता की आयु का अनुपात 2 : 3 हो जाएगा। दोनों की वर्तमान आयु बताओ।

हल माना कि रमेश की आयु = x वर्ष

तो पिता की आयु = $(x + 27)$ वर्ष

5 वर्ष बाद रमेश की आयु = $(x + 5)$ वर्ष

5 वर्ष बाद पिता की आयु = $x + 27 + 5 = x + 32$ वर्ष

प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$$\frac{\text{5 वर्ष बाद रमेश की आयु}}{\text{5 वर्ष बाद पिता की आयु}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x + 5}{x + 32} = \frac{2}{3}$$

या $3(x + 5) = 2(x + 32)$

या $3x + 15 = 2x + 64$

या $3x - 2x = 64 - 15$

या $x = 49$

रमेश की आयु $x = 49$ वर्ष

पिता की आयु $x + 27 = 49 + 27 = 76$ वर्ष

उदाहरण 10 एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 8 अधिक है। यदि अंश में 17 जोड़ दिया जाए तथा हर में से 1 घटा दिया जाए तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना परिमेय संख्या का अंश 'x' है

प्रश्न के अनुसार हर का मान $x + 8$ होगा

अतः परिमेय संख्या होगी $= \frac{x}{x + 8}$

अब अंश में 17 जोड़ने तथा हर मे से 1 घटाने पर

$$\frac{x + 17}{x + 8 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x + 17}{x + 7} = \frac{3}{2}$$

या $2(x + 17) = 3(x + 7)$

या $2x + 34 = 3x + 21$

या $3x - 2x = 34 - 21$

या $x = 13$

अतः अंश = 13 तथा हर = 13 + 8 = 21

अभीष्ट परिमेय संख्या $= \frac{13}{21}$

प्रश्नावली 11.2

1. एक परिमेय संख्या का अंश उसके हर से 3 कम है। यदि अंश और हर में पाँच–पाँच जोड़ दिया जाए तो उसका मान $\frac{3}{4}$ हो जाता है। संख्या बताइए।
2. भिन्न $\frac{5}{13}$ के अंश और हर में क्या जोड़ें कि भिन्न का मान $\frac{3}{5}$ हो जाए ?
3. भिन्न $\frac{15}{19}$ के अंश और हर में से क्या घटाएँ कि भिन्न का मान $\frac{5}{7}$ हो जाए ?
4. रमेश ने अपने धन का आधा पत्नी को, एक तिहाई अपने पुत्र को और शेष 50,000 रू. अपनी पुत्री को दे दिया तो उसका कुल धन ज्ञात कीजिए।
5. किसी संख्या का पाँच गुना उसके दुगुने से 48 अधिक है। संख्या बताइए।
6. 45 को ऐसे दो भागों में बाँटिए कि एक भाग दूसरे भाग के तीन गुने से 7 कम है।
7. रानू की आयु सुजल की आयु से तीन गुनी है। 4 वर्ष बाद दोनों की आयु का योग 40 वर्ष हो जाएगा दोनों की वर्तमान आयु बताइए।
8. एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई से 6 मीटर अधिक है। यदि उसका परिमाप 64 मीटर है तो लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
9. दो अंको की एक संख्या के अंको का योग 12 है। अंक पलटने पर नई संख्या मूल संख्या से 54 अधिक हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
10. दो अंको की एक संख्या में एक अंक दूसरे अंक से चार गुना है। अंक पलटने पर बनी संख्या को इसमें जोड़ने पर 110 प्राप्त होता है। संख्या बताइए।

हमने सीखा

1. यदि समीकरण की घात एक हो तो इसे रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. यदि रैखिक समीकरण में केवल एक चर हो तो इसे एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण कहते हैं।
3. वह मान जो समीकरण में चर के लिए प्रतिस्थापन करने पर बायाँ पक्ष (L.H.S) = दायाँ पक्ष (R.H.S) हो, उसे समीकरण का हल अथवा मूल कहते हैं।
4. समीकरण में संख्याओं के जैसे ही चर भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षान्तर किए जा सकते हैं।