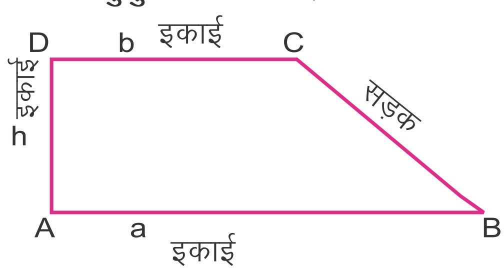
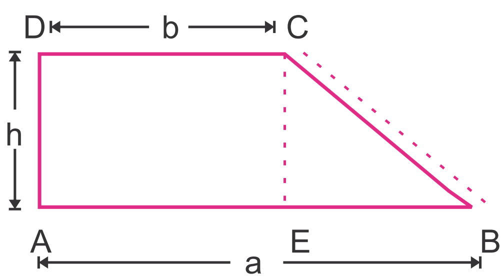
# अध्याय 14
# क्षेत्रफल

**14.1** हम पूर्व में चतुर्भज तथा इसके विभिन्न प्रकारों तथा उनका क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों से परिचित हो चुके हैं। इस अध्याय में हम चतुर्भुजों के कुछ और प्रकारों (समलम्ब, समचतुर्भुज तथा सामान्य चतुर्भज ) के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करेंगे।

## 14.2 समलम्ब चतुर्भुज

नीचे दिए गए भूखण्ड के आकार पर विचार कीजिए। इस भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए क्या युक्ति लगानी होगी? आदित्य इस भूखण्ड की दो समान्तर भुजाओं को देख कर एक समलम्ब चतुर्भुज की कल्पना करता है। ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजा का एक युग्म समान्तर हो, **समलम्ब चतुर्भुज** कहलाता है।




वह पूरे भूखण्ड को दो ऐसे भागों (आकृतियों) में विभक्त करता है जिन आकृतियों (आयत तथा त्रिभुज) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के तरीकों से वह पूर्व में परिचित है।

सम्पूर्ण भूखण्ड का क्षेत्रफल = आयत AECD का क्षे. + त्रिभुज ECB का क्षे.

$$= (AE \times AD) + \frac{1}{2} \times (EB \times EC)$$

[EC = AD तथा AE = DC है ]

आकृति ABCD का क्षे. $= (AE \times AD) + \frac{1}{2} \times (EB \times AD)$

$$\because \quad = \left[AE + \frac{1}{2} EB\right] \times AD$$

$$= \left(\frac{2AE + EB}{2}\right) \times AD$$

$$= \left(\frac{AE + AE + EB}{2}\right) \times AD$$

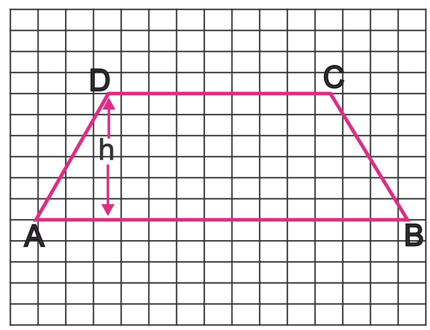
$$= \left(\frac{(AE+EB)+AE}{2}\right) \times AD$$

$$= \left(\frac{AB+CD}{2}\right) \times AD$$

$$= \frac{1}{2}[a+b] \times h$$ (जहाँ a व b समान्तर भुजाएँ हैं।)

**अतः समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई**

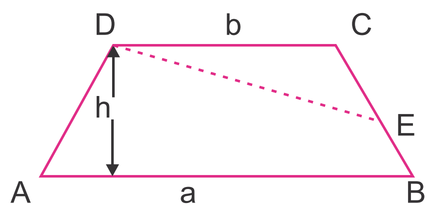
**गतिविधि** समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल को एक क्रियाकलाप से ज्ञात करते हैं। जिसके चरण निम्न हैं–



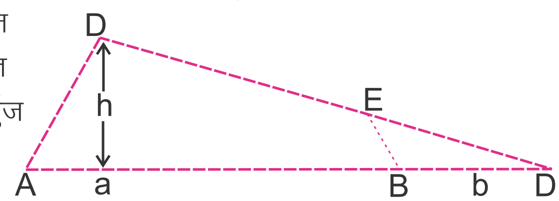

(1) ग्राफ पेपर पर किसी भी माप का एक समलंब चतुर्भुज चित्रानुसार खींचिए तथा उसे काटकर बाहर निकालिए।

(2) BC भुजा का मध्य बिन्दु E ज्ञात कीजिए तथा इसे D से मिलाकर चित्रानुसार बिन्दु रेखा के सहारे काटिए।

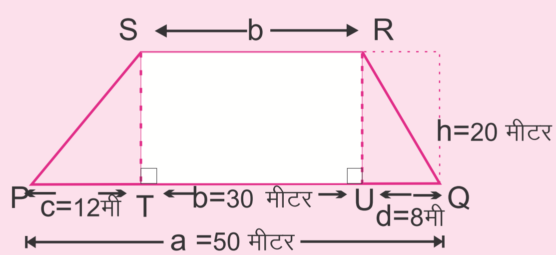
(3) काटे गए△ DEC को ऐसे रखिए कि C बिन्दु B पर आए। इस प्रकार बने बड़े त्रिभुज के आधार की लम्बाई क्या होगी ? यदि ऊँचाई h हो, तो त्रिभुज का क्षे0 $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$ होगा।




क्या त्रिभुज तथा काटे गए समलम्ब चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल समान होंगे ? इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज के क्षेत्रफल वाले व्यंजक का समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए व्यंजक क्या होगा ?




## करो और सीखो

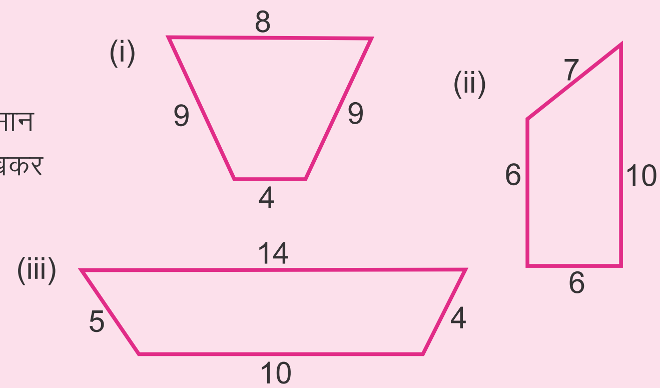



1. अजहर के पास समलम्ब चतुर्भुज के आकार का एक खेत है (चित्रानुसार) वह इसे तीन अलग–अलग भागों में बाँटकर देखता है। यदि खेत के विभिन्न भागों की माप चित्रानुसार दी गई हो तो प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कर दशाईए कि समलम्ब चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

= △SPT का क्षेत्रफल + आयत STUR का क्षेत्रफल + △ RUQ का क्षेत्रफल होता है।

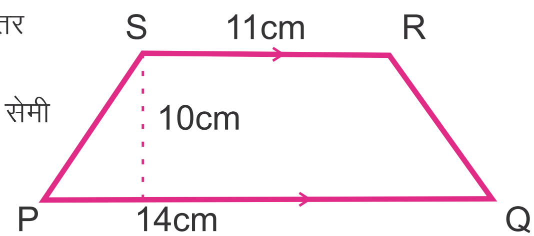
एवं समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$ में मान रख तुलना कीजिए।

2. क्या विभिन्न परिमापों वाले समलम्ब चतुर्भुज, क्षेत्रफल में समान होते हैं ? दी गयी मापों को देखकर तथ्य को स्थापित कीजिए।




**उदाहरण 1** चित्र में दिए गए समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा ?

**हल** ∵ समलम्ब चतुर्भुज PQRS की समान्तर भुजाएँ क्रमशः PQ = 14 सेमी तथा SR = 11 सेमी है। ऊँचाई h = 10 सेमी दी गई है।




समलम्ब चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई

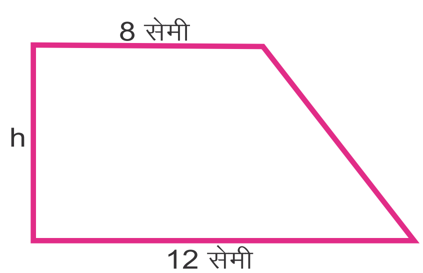
$= \frac{1}{2}(14 + 11) \times 10$ वर्ग सेमी

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 10 = 125$ वर्ग सेमी

**उदाहरण 2** एक समलम्ब चतुर्भुज की दो समान्तर भुजाएँ क्रमशः 12 सेमी तथा 8 सेमी की हैं। यदि उसका क्षेत्रफल 60 वर्ग सेमी हो, तो समलम्ब चतुर्भुज की ऊँचाई क्या होगी ?

**हल** माना समलम्ब चतुर्भुज की ऊँचाई = h सेमी

सूत्रानुसार समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई




$60 = \frac{1}{2} \times (12 + 8) \times h$

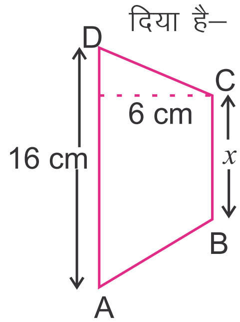
$h = \frac{60 \times 2}{20} = 6$ सेमी

अतः ऊँचाई = 6 सेमी

**उदाहरण 3** चित्रानुसार एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD की भुजाओं की माप दी गई है। यदि इसका क्षेत्रफल 78 वर्ग सेमी हो तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल** चूंकि AD तथा BC समान्तर भुजाएँ हैं।

दिया है– चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 78 $cm^2$




$\frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई = क्षेत्रफल

$\frac{1}{2}$ x $(16 + x)$ x 6 = 78

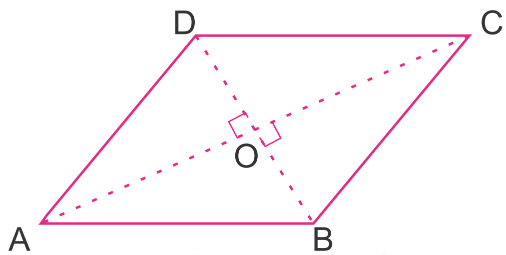
$16 + x = \frac{78 \times 2}{6}$ या $16 + x = 26$

या $x = 26 - 16 = 10$ सेमी **उत्तर**

## 14.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम अध्ययन कर चुके हैं कि ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाओं की माप समान हो, समचतुर्भुज कहलाता है। समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए हम एक समचतुर्भुज का उदाहरण लेकर उसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।




चित्रानुसार ABCD एक सम चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC की लम्बाई $d_1$ तथा BD की लम्बाई $d_2$ है। ये दोनों विकर्ण एक दूसरे को o बिन्दु पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

सम चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = △ABC का क्षेत्रफल + △ACD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ x AC x OB + $\frac{1}{2}$ x AC x OD (∵ OB तथा OD क्रमशः △ABC एवं △ADC की ऊँचाइयाँ हैं।)

$= \frac{1}{2}$ x AC x [OB + OD]

$= \frac{1}{2}$ x AC x BD [∵ OB + OD = BD]

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

> अत : सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्णों का गुणनफल

दूसरे शब्दों में समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

चूंकि समचतुर्भुज भी एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः समचतुर्भुज की भुजा तथा उसकी ऊँचाई के मान ज्ञात होने पर

> समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

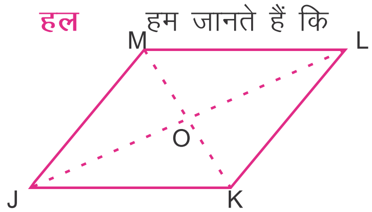
**उदाहरण 4** किसी समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 10 सेमी तथा 12 सेमी हैं। उसका क्षेत्रफल क्या होगा ?

**हल** ∵ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$ सेमी$^2$ उत्तर

**उदाहरण 5** चित्रानुसार एक समचतुर्भुज JKLM का क्षेत्रफल 140 वर्ग सेमी है यदि इसका विकर्ण KM = 14 सेमी हो तो OL की माप क्या होगी ?

**हल** हम जानते हैं कि




समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

दिया है– समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 140 वर्ग सेमी

$140 = \frac{1}{2} \times 14 \times JL$

$JL = \frac{140 \times 2}{14} = 20$ सेमी

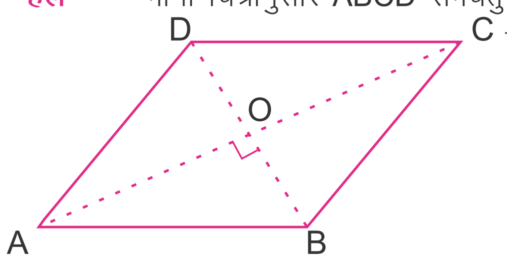
चूंकि समचतुर्भुज के विकर्ण प्रतिच्छेदन बिन्दु पर समद्विभाजित होते हैं। अतः

$OL = \frac{1}{2} \times JL$

$= \frac{1}{2} \times 20 = 10$ सेमी **उत्तर**

**उदाहरण 6** किसी समचतुर्भुजाकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 21600 वर्गमीटर है। रोहन इस खेल के मैदान में जब बड़े विकर्ण के अनुदिश चलता है तो उसे 240 मीटर चलना पड़ता है। इस मैदान की भुजाओं के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने मे तय दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल** माना चित्रानुसार ABCD समचतुर्भुजाकार खेल का मैदान है।




दिया है– मैदान का क्षेत्रफल = 21600 वर्गमीटर

तथा विकर्ण AC = 240 मीटर

हम जानते हैं कि–

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$21600 = \frac{1}{2} \times 240 \times BD$

$BD = \frac{21600 \times 2}{240} = 180$ मीटर

∵ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजित होते हैं।

अतः $AO = \frac{1}{2} AC = 120$ मीटर तथा $BO = \frac{1}{2} BD = 90$ मीटर

अब चूंकि $\triangle$AOB एक समकोण त्रिभुज है। बोधायन प्रमेय से $\triangle$AOB का विकर्ण AB

$AB = \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2}$

$= \sqrt{(120)^2 + (90)^2} = 150$ मीटर

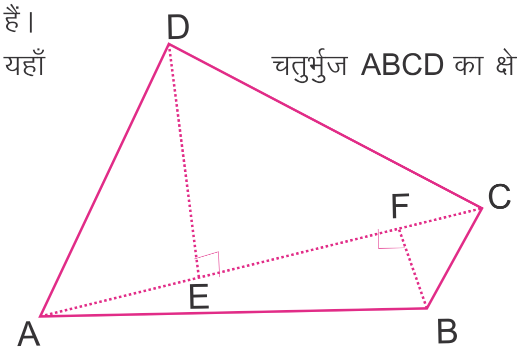
अर्थात समचतुर्भुजाकार मैदान की भुजा = 150 मीटर

अतः भुजाओं के अनुदिश मैदान का चक्कर पूरा लगाने में तय दूरी

= खेल मैदान का परिमाप = 4 x भुजा = 4 x 150 = 600 मीटर

## 14.4 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसका कोई एक विकर्ण खींचकर चतुर्भुज को दो त्रिभुजाकार भागों में विभक्त करते हैं तथा शेष दोनों शीर्षों से इस विकर्ण पर चित्रानुसार लम्ब डालते हैं।




यहाँ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = △ ABC का क्षेत्रफल +△ ADC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}(AC \times BF) + \frac{1}{2}(AC \times DE)$

$= \frac{1}{2} AC (BF + DE)$

$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

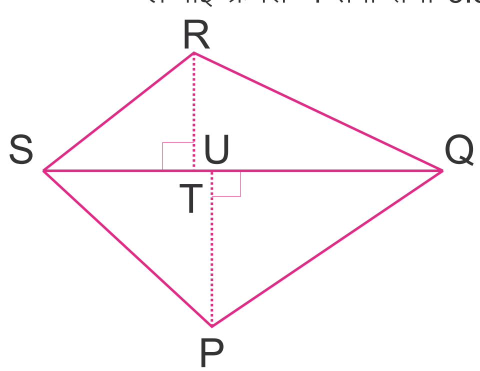
जहाँ d = विकर्ण AC की लम्बाई

$h_1$= शीर्ष लम्ब BF की लम्बाई

$h_2$= शीर्ष लम्ब DE की लम्बाई

> चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्ण x (विकर्ण पर शेष शीर्षों से डाले गए लम्बों का योग)

**उदाहरण 7** एकचतुर्भुज PQRS में विकर्ण SQ की लम्बाई 8 सेमी तथा शीर्षलम्ब RT तथा UP की लम्बाई क्रमशः 4 सेमी तथा 5.5 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




**हल** चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ x विकर्ण x (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

$= \frac{1}{2} \times 8 \times (4 + 5.5)$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 9.5$

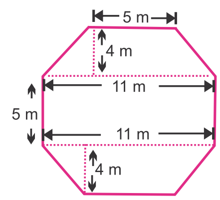
= 38 सेमी$^2$

### प्रश्नावली 14.1

1. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसकी दो समान्तर भुजाओं की माप 10 सेमी तथा 16 सेमी तथा उनके बीच की दूरी 8 सेमी है तो समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. किसी भवन की छत पर चित्रानुसार डिजाइन लगी है यदि सभी डिजाइन समान माप की हों तो सम्पूर्ण डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

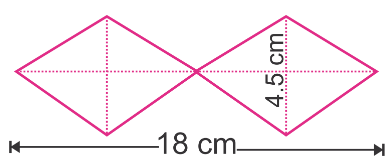
3. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $34cm^2$ है, और उसकी ऊँचाई 4cm है। समान्तर भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई 10cm है। दूसरी समान्तर भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4. किसी चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ चित्रानुसार अष्टभुज के आकार का है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




5. किसी समचतुर्भुजाकार प्लॉट के सम्मुख शीर्षों के मध्य की दूरियाँ क्रमशः 12.5 मीटर तथा 10.4 मीटर है। इस प्लाट को समतल कराने का व्यय ज्ञात कीजिए यदि प्रति वर्गमीटर समतल कराने का व्यय 180 रू. हो।

6. दिए गए समचतुर्भुजाकार टाइलों के युग्म का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




7. कल्याण का खेत चतुर्भुजाकार है। इस खेत का एक विकर्ण 220 मीटर है तथा इस विकर्ण पर शेष दोनों शीर्षों से डाले गए लम्बों की लम्बाईयाँ क्रमशः 80 मीटर एव 130 मीटर हो तो खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

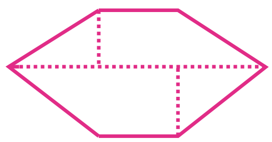
8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   - (i) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का................ होता है।
   - (ii) विषमबाहु चतुर्भुज के दोनों विकर्ण सदैव ................ माप के होते हैं।
   - (iii) सूत्र = $\frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई द्वारा.......................चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है।
   - (iv) वह चतुर्भुज जिसके दो असमान विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजित होते हैं, .................. कहलाता है।

## 14.5 बहुभुज का क्षेत्रफल (फील्ड बुक)

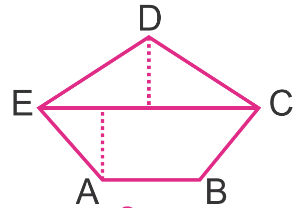
हमने अब तक विभिन्न समतल ज्यामितीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, समस्त प्रकार के चतुर्भुज

तथा वृत्त के क्षेत्रफल को ज्ञात करना सीखा है। इनमें से प्रत्येक आकृति के लिए उसका क्षेत्रफल निकालने का निश्चित सूत्र है किन्तु जब हमको पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज .....आदि बहुभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने हो तो क्या विधि अपनानी होगी ? आओ चर्चा करें।

दिए गए बहुभुज क्षेत्रों को देखिए। क्या इनके कुछ शीर्षों को मिलाने पर हमें त्रिभुजाकार अथवा चतुर्भुजाकार क्षेत्र प्राप्त हो रहे हैं ? क्या प्राप्त होने वाली ऐसी त्रिभुजाकार व चतुर्भुजाकार आकृतियों के क्षेत्रफलों का योगफल उस बहुभुज का क्षेत्रफल होगा ?

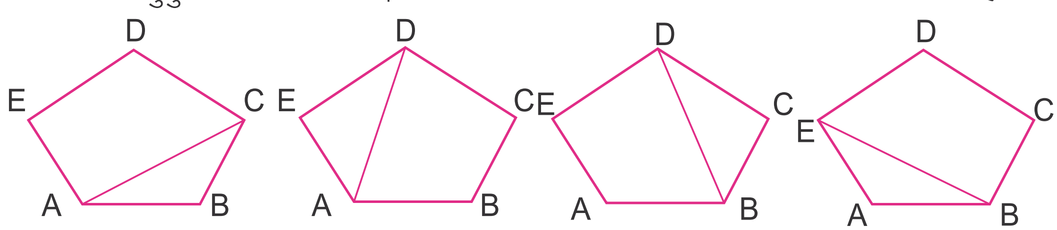


चित्र–1

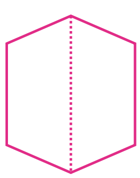



चित्र–2

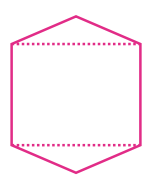
1. चित्र 2 में दिए गए पंचभुज ABCDE को देखिए। इसके शीर्षों E तथा C को मिलाने पर यह एक त्रिभुज ECD तथा एक समलम्ब चतुर्भुज ABCE में विभक्त हो जाता है। हम इन दोनों क्षेत्रों का अलग–अलग क्षेत्रफल सम्बन्धित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।
   अर्थात्
   बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल =△ ECD का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज ABCE का क्षेत्रफल
2. पंचभुज ABCDE में भिन्न–भिन्न शीर्ष युग्मों को मिलाएँ। इस प्रकार प्राप्त होने वाले त्रिभुजों व समलम्ब चतुर्भुजों पर विचार करें। क्या प्रत्येक प्रकार से प्राप्त क्षेत्रफलों का योग समान होगा ?




यही क्रिया षट्भुज के साथ भी दोहराएँ। कुछ संभावित विभाजनों को चित्र में देखकर चर्चा करें।



(दो चतुर्भुजों में विभाजन)

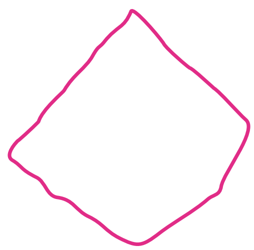


(दो त्रिभुजों तथा एक चतुर्भुज में विभाजन)

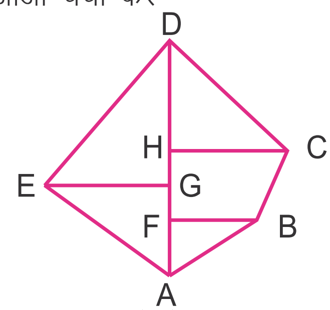
### 14.5.1 अनियमित बहुभुजों का क्षेत्रफल

आपने कई बार अपने आसपास कुछ ऐसे खेत, मैदान या अन्य भूमिक्षेत्र देखे होंगे जो निश्चित आकार के बहुभुजीय क्षेत्र नहीं होते ।

प्रायः पटवारी तथा इन्जीनियर अपने भूमि सर्वेक्षण के दौरान ऐसे आकारों का क्षेत्रफल मापने के लिए उन्हें छोटे–छोटे खण्डों में बाँट देते हैं। प्रत्येक खण्ड एक समतल ज्यामितीय आकृति होता है एवं सभी खण्डों के क्षेत्रफलों का योगफल उस सम्पूर्ण आकार का क्षेत्रफल होता है। अनियमित आकारों का क्षेत्रफल ज्ञात करने को क्षेत्रमिति (फील्ड बुक) कहते हैं। आओ चर्चा करें



अनियमित आकार



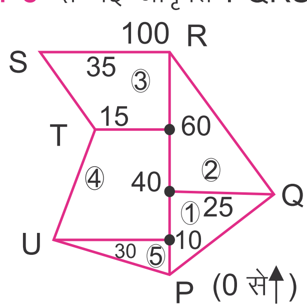

बहुभुजीय खण्डों में विभक्त फील्ड बुक

चित्र में दिए गए अनियमित आकार के भूमिक्षेत्र को देखिए। इस रूप में इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना जटिल कार्य है।

इसके लिए आकृति के लम्बाई के अनुदिश आधार रेखा खींची जाती है। आकृति के विभिन्न कोनों (शीर्षों)से आधार रेखा पर लम्ब डाले जाते हैं। (चित्र में देखिए) इस प्रकार हमें विभिन्न समतलीय आकृतियाँ प्राप्त होती हैं। आधार रेखा में A से विभिन्न बिन्दुओं यथा F, G, H तथा D की दूरियाँ पैमाने के आधार पर लिखी जाती हैं। इसी प्रकार लम्बवत दूरी क्रमशः FB, HC, EG आदि पैमाने से ही लिखी जाती है तो फिर इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना आसान हो जाता हैं।

सम्पूर्ण आकृति का क्षेत्रफल = △ABC का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज FBCH का क्षे. + △HCD का क्षे. + △ EGD का क्षे. + △AHE का क्षे.

**उदाहरण 8** दी गई आकृति PQRSTU का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




**हल** सम्पूर्ण आकृति PQRSTU को खण्डों में विभक्त करने पर कुल 5 आकृतियाँ प्राप्त होती है

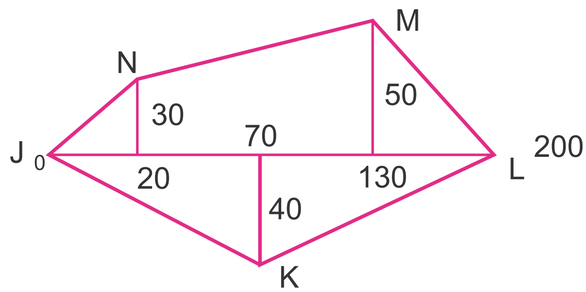
PQRSTU का कुल क्षेत्रफल = आकृति (1) का क्षे. + आकृति (2) का क्षे. + आकृति (3) का क्षे. + आकृति (4) का क्षे. + आकृति (5) का क्षे.

$= [\frac{1}{2} \times 40 \times 25] + [\frac{1}{2} \times 60 \times 25] + [\frac{1}{2} \times (15 + 35) \times 40] + [\frac{1}{2} \times (30 + 15) \times 50]$

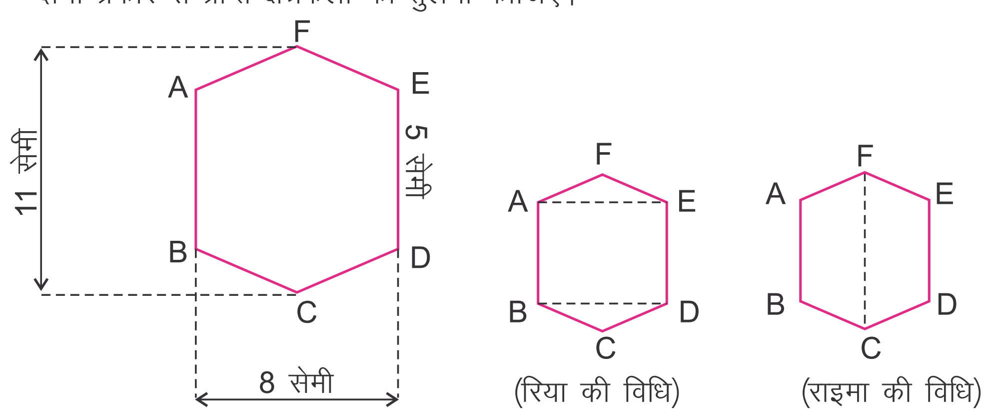
$+ [\frac{1}{2} \times 10 \times 30] = 500 + 750 + 1000 + 1125 + 150 = 3525$ वर्ग इकाई उत्तर

## प्रश्नावली 14.2

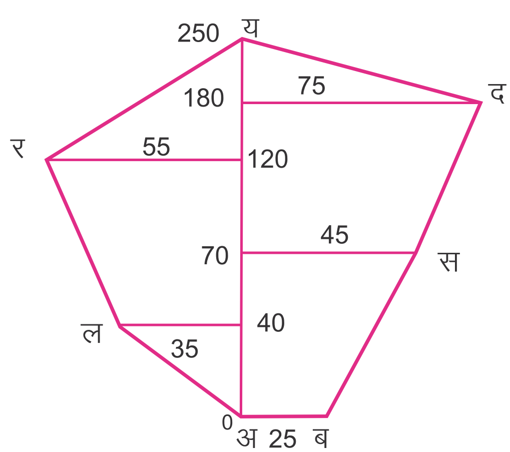
1. दी गई मापों (मीटर में) के आधार पर बहुभुज JKLMN का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




2. चित्रानुसार ABCDEF एक षट्भुज के आकार का क्षेत्र है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी है। रिया तथा राइमा इसे दो विभिन्न प्रकारों से विभाजित कर क्षेत्रफल ज्ञात करती हैं दोनों प्रकार से प्राप्त क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए।




3. रामलाल के खेत के प्रत्येक भाग की माप (मीटर में) दी गई हो तो 4 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से उसके खेत की जुताई कराने की लागत ज्ञात कीजिए।



## हमने सीखा

1. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x समान्तर भुजाओं का योग x ऊँचाई

2. समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

3. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्णों के गुणनफल

(आधार तथा ऊँचाई के मान दिए जाने पर क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई )

4. सामान्य चतुर्भुज (विषमबाहु) का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ x विकर्ण x(विकर्ण पर शेष शीर्षों से ड़ाले गए लम्बों का योग)

5. पंचभुज षट्भुज, सप्तभुज आदि बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन बहुभुजों को त्रिभुज, समस्त प्रकार के चतुर्भुज आदि आकृतियों में विभाजित करते हैं तथा इनके क्षेत्रफलों का योग ही उस बहुभुज का क्षेत्रफल होता है।