बहुपद

बहुपद क्या है ?

चर, अचर गुणांक और घात वाले बीजगणितीय व्यंजक (algebric expression) बहुपद कहलाते हैं |

जैसे - x^2, $2x^3$, $3y$, $2x + 5$, $ax^2 + bx$, $2x^2 - 7x + 3$ और $3x^3 + 4x - 5x + 9$ इत्यादि |

समान्यत: बहुपद (Polynomials) को p(x) से सूचित करते है |

जैसे - $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$ अथवा $p(x) = 3x$ आदि |

ये बहुपद नहीं होते है : -

(i) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात ऋणात्मक संख्या हो - जैसे - 1, -2, -4 या - 5 इत्यादि | $3x^{-2} + 5x$, $y^{-3} - y$, $6x^{-4}$ इत्यादि अन्य उदाहरण हैं |

(ii) वह पद जो किसी चर से विभाजित हो जैसे –

$\frac{1}{x}, \frac{2}{x+1}$ इत्यादि |

(iii) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात कोई भिन्नात्मक संख्या (fractional number) हो तो वह बहुपद नहीं होता है | जैसे –

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$$

अर्थात जिस व्यंजक में चर ऐसे घात वाले हो तो वह बहुपद नहीं कहलाता है |

पद के अनुसार बहुपद (Polynomials) के प्रकार :

(i) एकपदी बहुपद (Mononomials) : जब किसी व्यंजक में केवल एक ही पद हो तो उसे एकपदी बहुपद कहते है |

जैसे - $3x$, $3x^2$, $5xyz$, $10ab$, $2bc$, $4x^4y^3$, 10 और $3y$ इत्यादि |

(ii) द्विपदी बहुपद (Binomials) : जब किसी बीजीयव्यंजक में दो पद (+) या (-) के चिन्हों से जुड़े हो तो वे द्विपदी बहुपद कहलाते हैं |

जैसे - $3x + 5$, $4x - 7y$, $3x^2 + 5$, $7y^5 + 6x$, $9x + y$ इत्यादि |

(iii) त्रिपदी बहुपद (Trinomials) : जब किसी बीजीय व्यंजक में तीन पद (+) या (-) से जुड़े हो तो वह त्रिपदी बहुपद कहलाता है |

जैसे - $2x + 3y + 4$, $4y^2 + 3y - 7$, $3x^3 + 2x^2 + 7x$ और $2x^2 + 3x - 5$ इत्यादि |

बहुपद की घात (The power of polynomials) :

किसी बहुपद $p(x)$ के अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं | जैसे –

(i) $p(x) = 3x + 3$ में बहुपद की घात 1 है |

(ii) $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ में बहुपद की घात 2 है |

(iii) $p(x) = 3x^3 + 2x - 7$ में बहुपद की घात 3 है |

(iv) $p(x) = 7x^4 + 5x^3 + x - 8$ में बहुपद की घात 4 है |

(v) $p(x) = 10$ में बहुपद की घात 0 है क्योंकि चर पद नहीं है |

मुख्य-बिंदु और सूत्र :

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$ चर x में एक बहुपद कहलाता है।
2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$.
4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x – निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$
5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।
6. (*i*) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक $= 0$

   (*ii*) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक $=$ अचर पद
7. **बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध–**

   यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ के शून्यक हो, तो

   $\alpha + \beta =$ शून्यकों का योग $= -\dfrac{b}{a}$

   $\alpha\beta =$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$
8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद

   $p(x) = k\,[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल$]$

   जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$
9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।
10. **विभाजन एल्गोरिथ्म**–किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार है:

$p(x) = g(x).\ q(x) + r(x)$;

जबकि $g(x) \neq 0$ तथा $r(x) = 0$ या घातांक $r(x) <$ घातांक $g(x)$