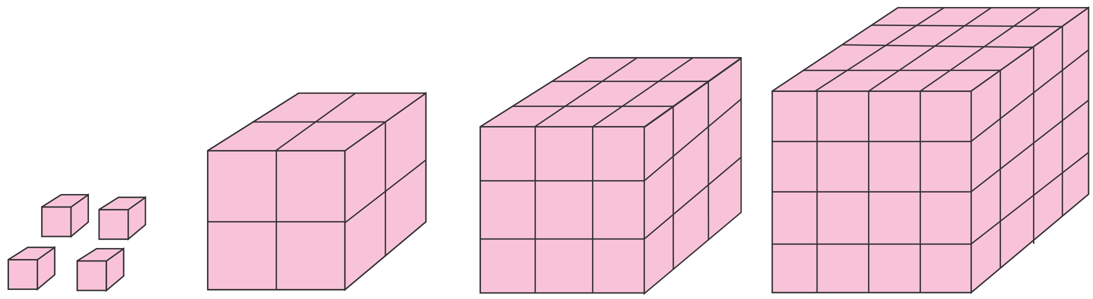
अध्याय 2

घन एवं घनमूल

2.1 घन एवं घनमूल

अपने गणित किट में से कुछ घन निकाल लीजिए इसे ध्यान से देखिए आप पाएँगें कि इसकी लम्बाई, चौडाई एवं ऊँचाई बराबर होती है। इन घनाकार ब्लॉक्स को आपस में जोड़कर/जमाकर बड़े घन भी बनाए जा सकते हैं। याद रहे कि उनकी लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई भी समान रहे।



आकृति 2.1

क्र. स.	बडे घन की एक भुजा में इकाई घन की संख्या	बड़े घन को बनाने में लगे इकाई घनों की संख्या
1.	1	1
2.	2	8
3.	3	27
4.	4	---------------
5.	5	----------------

तालिका 2.1

संख्याएँ 1, 8, 27 .... पर विचार कीजिए, ये पूर्ण घन संख्याएँ या घन संख्याएँ कहलाती है। क्या आप बता सकते हैं इनको ये नाम क्यों दिए गए हैं ? इनमें से प्रत्येक संख्या तब प्राप्त होती है, जब उसको उसी से तीन बार गुणा किया जाता है। हम देखते हैं कि

$$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

क्योंकि $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ है, इसलिए 125 एक घन संख्या है। 9 एक घन संख्या नहीं है क्योंकि $9 \neq 3 \times 3 \times 3$ है और ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं है जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 9 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $2 \times 2 \times 2 = 8$ और $3 \times 3 \times 3 = 27$ है। इससे यह स्पष्ट होता है कि 9 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है। नीचे 1 से 10 तक की संख्याओं के घन दिए गए हैं। **रिक्त स्थानों में आने वाली घन संख्याएँ भी ज्ञात कीजिए–**

संख्या	घन संख्याएँ
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 =$ -----
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 =$ -----
7	$7^3 = 7 \times 7 \times 7 =$ -----
8	$8^3 = 8 \times 8 \times 8 =$ -----
9	$9^3 = 9 \times 9 \times 9 =$ -----
10	$10^3 = 10 \times 10 \times 10 =$ -----

तालिका 2.2

हम जानते हैं कि $2^2 = 4$ जहाँ $4 = 2 \times 2$ अथवा $4 = 2 + 2$ । इसी प्रकार $2^3 = 8$ जहाँ $8 = 2 \times 2 \times 2$ होता है। क्या यह $(2 + 2 + 2)$ के बराबर होता है ?

2.1.1 सम एवं विषम संख्याओं की घन संख्या

यहाँ हम देखते हैं कि 1 से 1000 के मध्य केवल 10 घन संख्याएँ हैं। तालिका 2.2 में सम संख्याओं के घनों को देखिए एवं विषम संख्याओं के घनों को देखिए आप यह पाएँगे कि सम सख्याओं का घन सदैव सम संख्या एवं विषम संख्याओं का घन सदैव विषम संख्या प्राप्त होती है।

2.1.2 घन संख्याओं के इकाई का अंक

ऊपर दी गई सारणी में संख्याओं के घनों में इकाई के अंको पर ध्यान दीजिए। किन किन संख्याओं के घन में इकाई का अंक 1 है, किन संख्याओं के घन के इकाई में वही अंक है जो मूल संख्या में हैं। आप पाएँगे कि जब किसी संख्या की इकाई में 0,1,4,5,6 है तो घन संख्या के इकाई में भी वही अंक आता है।

करो और सीखो

1. नीचे दी गई संख्याओं की घन संख्याओं के इकाई का अंक बताइए ।
   (i) 1331 (ii) 4444 (iii) 159 (iv) 1005

2. संख्या 46 का घन सम होगा या विषम ?

2.2 घन संख्याओं से जुड़े कुछ पैटर्न

2.2.1 क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

विषम संख्याओं के योग के निम्न प्रतिरूप देखिए।

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

इस पैटर्न को देखते हुए बताएँ कि योग द्वारा 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी ?

करो और सीखो

• ऊपर दिए पैटर्न के अनुसार निम्न को विषम संख्याओं के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिए।
(i) 7^3 (ii) 8^3

2.2.2 घन एवं उनके अभाज्य गुणनखण्ड

कुछ संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों और उनके घनों के अभाज्य गुणनखण्डों पर विचार कीजिए।

संख्या	घन संख्या
4 = 2 x 2	4^3 = 64 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^3 x 2^3
6 = 2 x 3	6^3 = 216 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 = 2^3 x 3^3
10= 2 x 5	10^3 = 1000 = 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5 = 2^3 x 5^3
12= 2 x 2 x 3	12^3 = 1728 =................................

उक्त पैटर्न के आधार पर यह स्पष्ट है कि घन संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों में प्रत्येक गुणनखण्ड तीन–तीन बार आता है अर्थात गुणनखण्डों के तीन–तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।

उदाहरण 1 क्या 729 एक पूर्ण घन संख्या है ? विचार कीजिए।

हल 729 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$729 = \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

यहाँ आप देखते हैं कि अभाज्य गुणनखण्ड में तीन–तीन समान संख्याओं का समूह बनाया जा सकता है अतः 729 एक पूर्ण घन संख्या होगी।

उदाहरण 2 क्या 432 एक पूर्ण घन संख्या है ?

हल अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$$432 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

यहाँ तीन–तीन समान संख्याओं के समूह बनाने के पश्चात 2 शेष रह जाता है अतः यह एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 3 क्या 5400 एक पूर्ण घन संख्या है यदि नहीं तो ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या बताइए जिसे 5400 से गुणा करने पर पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाएगी।

हल 5400 का अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$$5400 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times 5 \times 5$$

5400 के अभाज्य गुणनखण्ड में 2 तथा 3 के तीन–तीन के समूह हैं परन्तु 5 के तीन का समूह पूरा नहीं हो रहा है अतः 5400 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

इसे पूर्ण घन बनाने के लिए 5 से गुणा करना होगा जिससे 5 के तीन–तीन का समूह पूर्ण हो जाएगा।

उदाहरण 4 क्या 1188 एक पूर्ण घन है ? यदि नहीं तो किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से 1188 को भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाए ?

हल $1188 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 11$

अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 11 तीन–तीन के समूह में नहीं आ रहे हैं। अतः 1188 एक पूर्ण घन नहीं है। 1188 के उपर्युक्त गुणनखण्ड में अभाज्य गुणनखण्ड 2 केवल दो बार आ रहा है और अभाज्य गुणनखण्ड 11 एक बार अतः हम 1188 को $2 \times 2 \times 11 = 44$ से भाग दें तो भागफल के अभाज्य गुणनखण्ड में 2 और 11 नहीं आएँगे। अतः वह सबसे छोटी संख्या 44 होगी जिससे 1188 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।

परिणामी पूर्ण घन = $1188 \div 44 = 27 = 3^3$

अर्थात् प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में 3–3 के समूह वाले गुणनखण्डों के अलावा जो गुणनखण्ड बचते हैं, उनके गुणनफल का भाग लगाने से पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

करो और सीखो

- जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन है ?

(i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900
(v) 125000 (vi) 36000 (viii) 21600 (viii)10000
(ix) 27000000 (x) 11000

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं है ?
   (i) 512 (ii) 243 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 2700

2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।
   (i) 108 (ii) 500 (iii) 5400 (iv) 10584

3. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नालिखित संख्याओं को भाग देने पर एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।
   (i) 24 (ii) 250 (iii) 192 (iv) 135

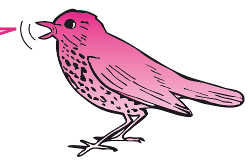
4. रेहान एक साबुन फेक्ट्री में काम करता है, वह घनाकार साबुन को जमाकर घन बनाकर खेल रहा है। बताइए यदि 216 साबुन जमाने हो तो बनने वाले घन की पहली पंक्ति में कितने साबुन होंगे ?

2.3 घनमूल

इस अध्याय के आरम्भ में हमने गणित किट के घनाकार ब्लॉक्स को जोड़कर बड़े घन बनाए थे।

पुनः इस क्रियाकलाप पर ध्यान दीजिए और बताइए कि 125 ब्लॉक्स से बने घन की एक भुजा में कितने ब्लॉक्स होंगें? भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए घन बनाकर देख सकते हैं परन्तु यही काम हम घनमूल ज्ञात करके भी कर सकते हैं ।

> जिस प्रकार 'वर्गमूल' ज्ञात करना वर्ग करने की प्रक्रिया की विपरीत प्रक्रिया है इसी प्रकार घनमूल ज्ञात करना घन ज्ञात करने कि प्रक्रिया की विपरीत प्रक्रिया है।



हम जानते है कि $2^3 = 8$ इसलिए हम कहते हैं कि 8 का घनमूल 2 है इसे $\sqrt[3]{8} = 2$ से लिखा जाता है घनमूल का संकेत $\sqrt[3]{\ }$ से दिया जाता है।

निम्न सारणी को देखकर विचार करें।

संख्या का घन	घनमूल	संख्या का घन	घनमूल
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

तालिका 2.3

2.3.1 किसी संख्या का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करना

संख्या 1728 का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करना।

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

1728 के अभाज्य गुणनखण्ड निम्नानुसार प्राप्त होते हैं।

$1728 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$

अब इस गुणनखण्ड में समान अंकों के तीन तीन के समूह बनाकर देखें–

$1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 3)^3$

दोनों पक्षों का घनमूल करने पर

अतः $\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

उदाहरण 5 संख्या 17576 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल 17576 के अभाज्य गुणनखण्ड

$17576 = 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 13 \times 13$

अतः $\sqrt[3]{17576} = 2 \times 13 = 26$

उदाहरण 6 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 9261 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल 9261 के अभाज्य गुणनखण्ड $= \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times \underbrace{7 \times 7 \times 7}$

अतः $\sqrt[3]{9261} = 3 \times 7 = 21$

2.3.2 किसी घन संख्या का घनमूल (अवलोकन विधि द्वारा)

यदि आपको यह ज्ञात है कि दी हुई संख्या एक घन संख्या है, तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

चरण 1 कोई घन संख्या मान लीजिए 175616 है तथा उसके सबसे दाईं ओर के अंक से प्रारम्भ करते हुए, तीन–तीन अंकों के समूह बनाइए।

175	616
दूसरा समूह	पहला समूह

हम किसी दी हुई घन संख्या का घनमूल एक चरणबद्ध प्रक्रिया द्वारा आकलित कर सकते है। यहाँ हमें तीन अंकों के दो समूह 616 और 175 प्राप्त हुए हैं।

चरण 2 प्रथम समूह 616 हमें घनमूल की इकाई का अंक देगा चुंकि 616 का अंतिम अंक 6 है, हम जानते हैं कि 6 किसी संख्या के इकाई के स्थान पर तभी आता है जब उसके घनमूल की इकाई का अंक 6 हो ($6^3 = 216$) ।

चरण 3 अब दूसरे समूह 175 पर विचार कीजिए।

संख्या 175, $5^3 = 125$ तथा $6^3 = 216$ के मध्य आता है

अर्थात् $5^3 < 175 < 6^3$

अतः दहाई का अंक होगा 5

इस प्रकार $\sqrt[3]{175616} = 56$

उदाहरण 7 संख्या 13824 का घनमूल आकलन दवारा ज्ञात कीजिए।

हल दी गई संख्या 13824 है।

चरण 1 दाईं ओर से आरम्भ करते हुए तीन–तीन अंकों के समूह बनाइए।

$\underline{13}\ \underline{824}$

चरण 2 पहला समूह 824 है तथा इसका इकाई का अंक 4 है जो कि केवल 4 इकाई वाले अंक के घन से ही प्राप्त होगा ($4^3 = 64$)

अतः इकाई का अंक 4 होगा।

चरण 3 दूसरा समूह 13 प्राप्त हुआ ।

$2^3 < 13 < 3^3$

अतः दहाई का अंक 2 प्राप्त हुआ

अतः दी गई संख्या का घनमूल 24 होगा।

$\sqrt[3]{13824} = 24$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न कथनों में सही/गलत बताइए।
   (i) प्रत्येक सम संख्या का घन सम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन संख्या दो शून्यों (00) पर समाप्त नहीं होती है।
   (iii) ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं है जो 8 पर समाप्त होता है।
   (iv) यदि किसी संख्या का वर्ग 5 पर समाप्त होता है तो उसका घन 25 पर समाप्त होता है।
   (v) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंक का ही होता है।
   (vi) दो अंकों वाली संख्या का घन 4 से 6 अंकों का होता है।
2. आकलन विधि एवं अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए तथा अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) 64	(ii) 343	(iii) 5832	(iv) 74088
(v) 3375	(vi) 10648	(vii) 46656	(viii) 91125

हमने सीखा

1. किसी संख्या की घन संख्या तब प्राप्त होती है, जब उस संख्या को उसी से तीन बार गुणा किया जाता है।
2. किसी संख्या की घात तीन उस संख्या के घन के बराबर होती है।
   जैसे–
   $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3. सम संख्याओं का घन सदैव सम संख्या तथा विषम संख्याओं का घन सदैव विषम संख्या होती है।
4. किसी संख्या के इकाई में 0, 1, 4, 5, 6 अंक होने पर उस संख्या के घन का इकाई अंक भी वही होता है।
5. अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक गुणनखण्ड तीन–तीन बार आता है, अर्थात् गुणनखण्डों के तीन–तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।
6. घनमूल ज्ञात करना, घन ज्ञात करने की प्रक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।
7. किसी घन संख्या का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।
8. बड़ी घन संख्याओं का घनमूल इकाई की तरफ से तीन–तीन के समूह बनाकर, अनुमान द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।