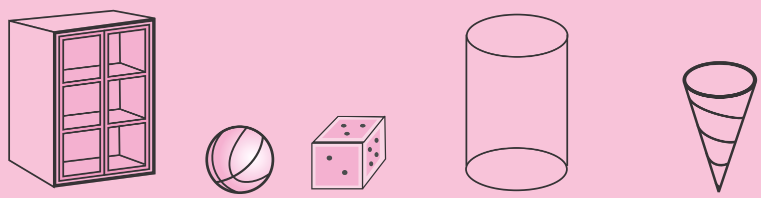
अध्याय 8

ठोस आकारों का चित्रण

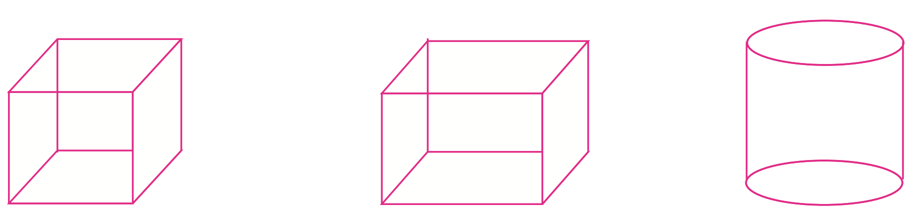
8.1 हमने पिछली कक्षा में विभिन्न ठोस आकारों घन, घनाभ, बेलन, गोला, शंकु आदि के बारे में पढ़ा है। नीचे कुछ वस्तुओं के चित्र दिए है प्रत्येक चित्र को ध्यानपूर्वक देखकर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



	अलमारी	गेंद	पासा	बेलनाकार ड्रम	आईसक्रीम कोन
1. आकार का नाम	–––––	–––––	–––––	–––––––––	–––––––––
2. कुल पृष्ठों की संख्या	–––––	–––––	–––––	–––––––––	–––––––––
3. सभी पृष्ठ समतल हैं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं
4. समतल पृष्ठ की आकृति	–––––	–––––	–––––	–––––	–––––

उक्त सारणी में ऐसे कौन कौन से आकार हैं जिनके सभी पृष्ठ समतल हैं?
आप पाएँगे कि घन, घनाभ के सभी पृष्ठ समतल हैं। ऐसे आकार जिनके सभी पृष्ठ समतल होते हैं, उन्हें बहुफलक कहते हैं। बहुफलक के सभी पृष्ठ बहुभुज होते हैं।

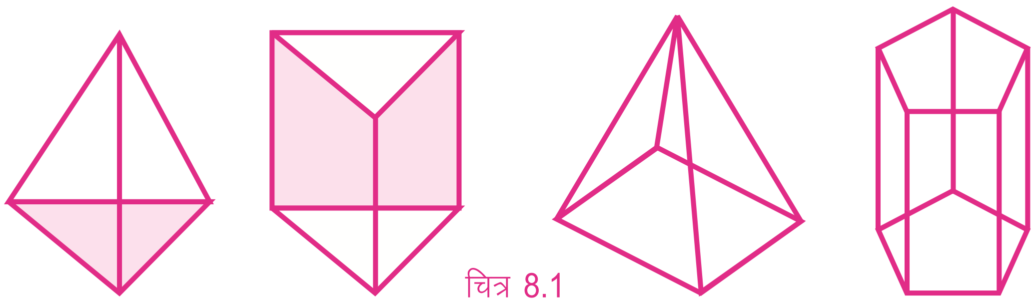
1. घन के सभी पृष्ठ किस आकृति के हैं? ––––––––––––––––––––––
2. घनाभ के सभी पृष्ठ किस आकृति के हैं? ––––––––––––––––––––––
3. बेलन के समतल पृष्ठ की आकृति क्या है? ––––––––––––––––––––



घन घनाभ बेलन

आप देखते हैं कि घन के सभी पृष्ठ वर्गाकार तथा घनाभ के सभी पृष्ठ आयताकार हैं

अब निम्न आकृतियों पर चर्चा करते हैं।

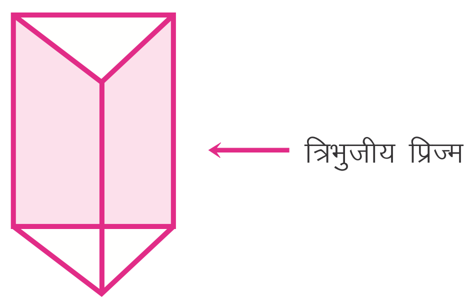


चित्र 8.1

उक्त आकृतियों में चार या चार से अधिक सपाट फलक है तथा ये सपाट फलक बहुभुज आकार के हैं। ये आकृतियाँ भी बहुफलक प्रिज्म तथा पिरामिड है। आइए इनके बारे में अध्ययन करते हैं।

8.2 प्रिज्म

ऐसे बहुफलक जिसका आधार तथा ऊपरी हिस्सा सर्वांगसम बहुभुज हो तथा अन्य फलक (पार्श्व फलक) समान्तर चतुर्भज (आयत या वर्ग) के आकार के हो, प्रिज्म कहलाते हैं।

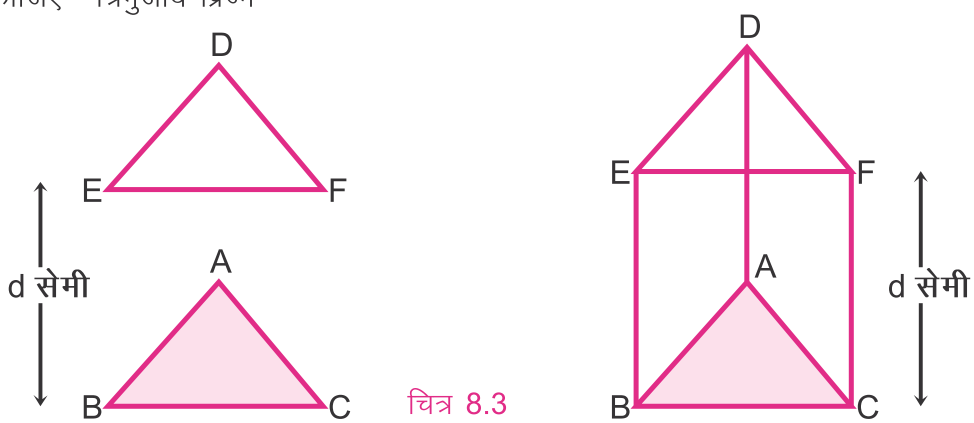


चित्र 8.2

8.2.1 त्रिभुजीय प्रिज्म की आकृति बनाना

त्रिभुजाकार गत्ते का टुकड़ा लेकर उसकी सहायता से कुछ दूरी पर दो त्रिभुज चित्रानुसार बनाइए। संगत शीर्षों के मिलाने पर जो अभीष्ट आकृति प्राप्त होती है, वह त्रिभुजीय प्रिज्म है।

प्रयास कीजिए– त्रिभुजीय प्रिज्म



चित्र 8.3

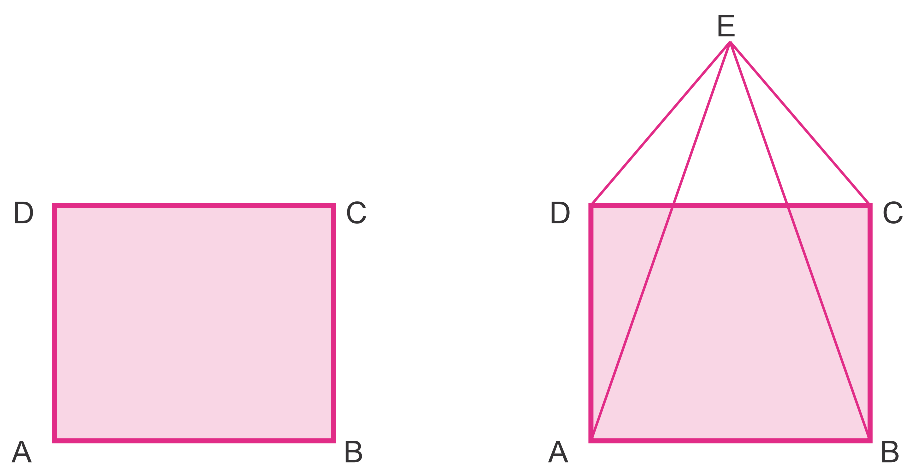
दिए गए त्रिभुजीय प्रिज्म में तीन आयताकार फलक क्रमशः ABED, ADFC, तथा BEFC व दो त्रिभुजाकार फलक क्रमशः ABC, DEF हैं। इस प्रकार त्रिभुजीय प्रिज्म के कुल पाँच फलक होते हैं। इस त्रिभुजीय प्रिज्म में 9 कोर (किनारे) क्रमशः AB, BC, CA, DE, EF, FD, BE, AD तथा CF व 6 शीर्ष क्रमशः A, B, C, D, E तथा F हैं।

8.3 पिरामिड (Pyramid)

ऐसा बहुफलक जिसका आधार एक बहुभुज हो तथा इसके सभी पार्श्व फलक त्रिभुजाकार होते हैं तथा एक ही शीर्ष पर मिलते हो पिरामिड होता है।

वर्गाकार आधार वाले पिरामिड की आकृति बनानाः– एक वर्ग ABCD बनाकर इसे छायांकित करते हैं इस वर्ग के ऊपर लगभग बीच में कुछ दूरी पर एक बिन्दु E लेकर उसे वर्ग के प्रत्येक शीर्ष से मिलाएँ।

इस प्रकार प्राप्त होने वाली आकृति एक प्रकार के पिरामिड की आकृति होगी।

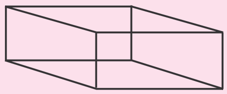
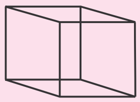
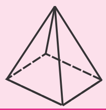
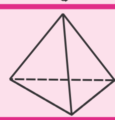
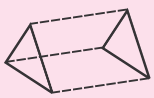


चित्र 8.4

इस पिरामिड में एक वर्गाकार फलक ABCD तथा चार त्रिभुजाकार फलक क्रमशः EAB, EBC, ECD, EDA हैं। इसी प्रकार 8 कोर (किनारे) क्रमशः AB,BC,CD,DA, EA, EB,EC व ED है एवं शीर्ष A, B, C, D व E हैं।

8.4 बहुफलकों के लिए आयलर सूत्र

इस सूत्र के अनुसार प्रत्येक बहुफलक के लिए उसके शीर्षों की संख्या V (vector) किनारों की संख्या E (Edge) तथा फलकों की संख्या F (Face) के मध्य सदैव एक निश्चित संबंध होता है। आइए सारणी से देखते हैं।

क्रम संख्या (1)	आकृति तथा उसका नाम (2)	शीर्षों की संख्या(V)(3)	फलकों की संख्या(F)(4)	किनारों की संख्या(E)(5)	V + F (6)	E + 2 (7)
1	 घनाभ	8	6	12	8 + 6	12 + 2
2	 घन	- -	- -	12	- - - -	- - - -
3	 चतुष्फलक	4	- -	- -	- - - -	- - - -
4	 पिरामिड	4	- -	- -	- - - -	- - - -
5	 प्रिज्म	- -	- -	- -	- - - -	- - - -

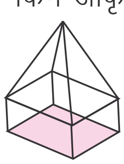
तालिका 8.1

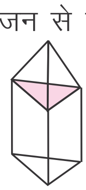
हम देखते है कि कॉलम 6 व 7 के मान समान हैं ? अतः V+F = E +2 होता है।

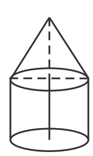
इस सम्बन्ध को आयलर नामक गणितज्ञ ने स्थापित किया था अतः उन्हीं के नाम पर इसे आयलर सूत्र कहते हैं।

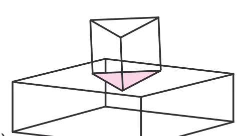
प्रश्नावली 8.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) पिरामिड का आधार एक बहुभुज तथा शेष फलक ———————— आकार के होते हैं। (त्रिभुज / समान्तर चतुर्भुज)
   (ii) प्रिज्म का आधार फलक तथा शीर्ष फलक परस्पर ——— होते हैं। (सर्वांगसम / समरूप)
   (iii) किसी बहुफलक में शीर्ष की संख्या 10 तथा फलकों की संख्या 7 है तो उसके किनारों की संख्या ————— हैं। (15 / 19)
   (iv) घन तथा घनाभ भी एक प्रकार के ————के उदाहरण हैं। (प्रिज्म / पिरामिड)
2. अपने परिवेश में कोई चार बहुफलकी ठोसों के नाम लिखिए तथा उनके फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्या लिखिए।
3. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुजाकार आधार लेकर एक त्रिभुजीय प्रिज्म का चित्र बनाइए।
4. नीचे दी गई संयोजित आकृतियों में से बहुफलकीय आकृतियाँ पहचानिये तथा यह भी बताइए कि ये किन–किन आकृतियों के संयोजन से बनी हैं ?


(i)


(ii)


(iii)

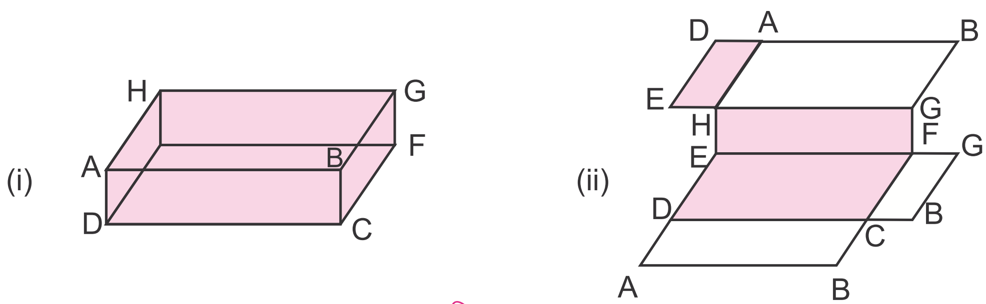

(iv)

8.5 त्रिविमीय आकारों का द्विविमीय निरूपण (जाल रूप में)

गत कक्षाओं में हमने विभिन्न ठोसों अर्थात त्रिविमीय आकारों के द्विविमीय निरूपण का अध्ययन किया है। सभी त्रिविमीय आकृतियों को खोलने (प्रसारित करने) पर इनके पृष्ठ (फलक) द्विविमीय आकृतियों के रूप में प्राप्त होते हैं। आइए कुछ ठोस आकारों को प्रसारित कर उनके सम्पूर्ण पृष्ठ को एक जाल रूप में देखते हैं।

8.5.1 घनाभ

एक घनाभ जिसके शीर्ष A,B,C,D,E,F,G,H हैं, के फलक ABCD, ABGH तथा BGFC दृश्य फलक हैं तथा छायांकित (रंगीन) फलक EFGH, EFCD तथा AHED पार्श्व फलक हैं। इस घनाभ को खोलने पर 6 आयताकार फलक (द्विविमीय आकृतियाँ) चित्रानुसार प्राप्त होती हैं।

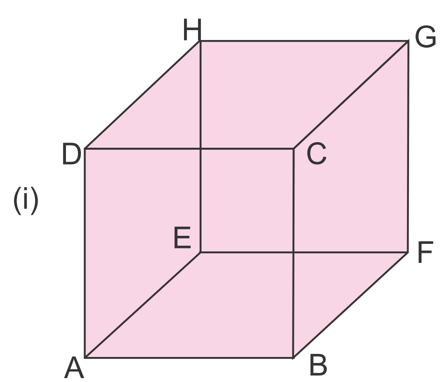


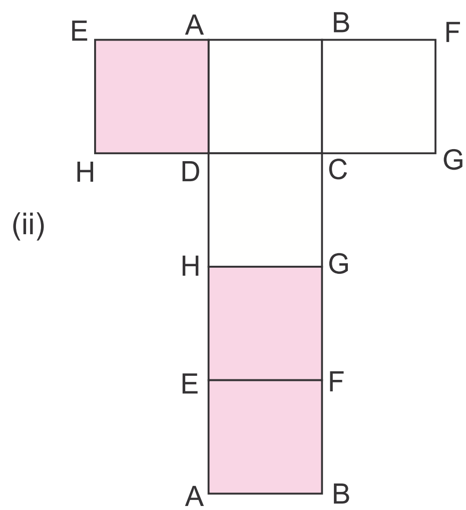
चित्र 8.5

क्या इस घनाभ का प्रसारित चित्र (जाल) अन्य प्रकार का भी हो सकता है। विचार करें।

8.5.2 घन

नीचे दिए गए घन के तीन दृश्य फलक ABCD, DCGH तथा BFGC हैं। जबकि फलक EFGH, ABFE तथा AEHD पार्श्व फलक हैं तथा छायांकित (रंगीन) भाग द्वारा प्रदर्शित है। इस घन को खोलने पर चित्रानुसार जाल प्राप्त होता है। जिसके सभी 6 फलक समान तथा वर्गाकार प्राप्त होते हैं।

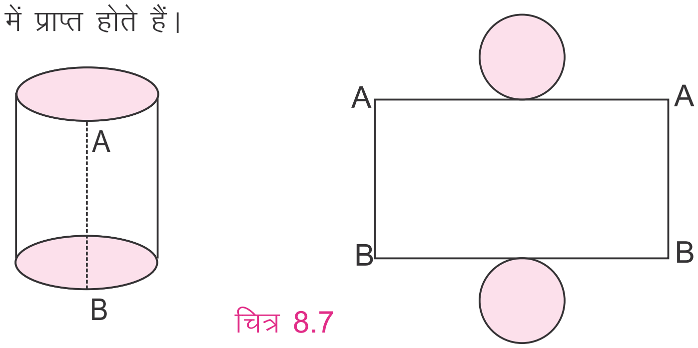




चित्र 8.6

8.5.3 बेलन

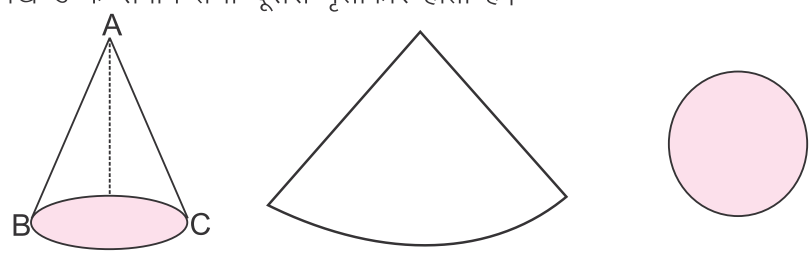
नीचे दिए गए ठोस लम्वृतीय बेलन को बिन्दु रेखा के सहारे खोलने पर इसका वक्राकार पृष्ठ चित्रानुसार एक आयत या वर्ग के रूप में प्राप्त होता है तथा बेलन के दोनों सिरे एक (तल तथा ढ़क्कन) वृताकार रूप में प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.7

8.5.4 शंकु

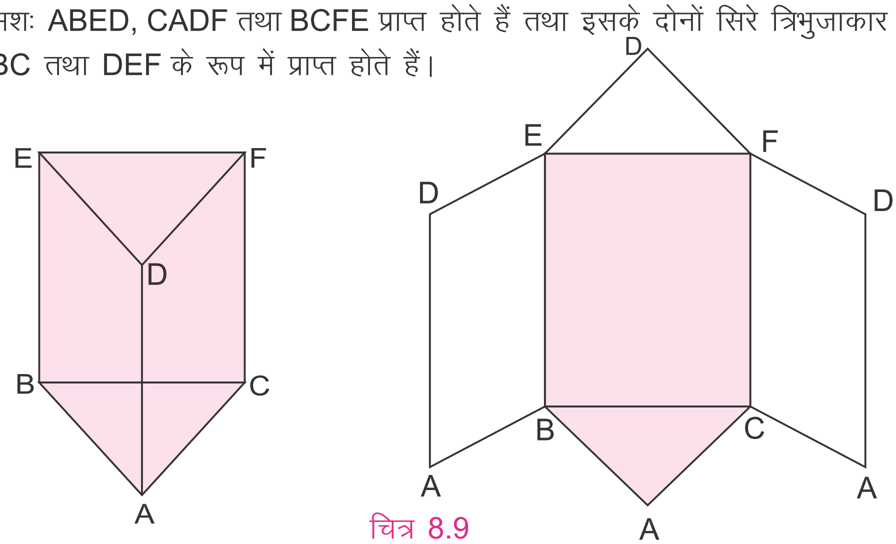
नीचे दिए गए शंकु के दो पृष्ठ है। जिनमें से एक पृष्ठ वक्राकार तथा दूसरा पृष्ठ वृत्ताकार है। इस शंकु को AB के सहारे काटने पर हमें दो द्विविमीय आकृतियाँ प्राप्त होती हैं। जिनमें से एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड के समान तथा दूसरी वृत्ताकार होती है।



चित्र 8.8

8.5.5 प्रिज्म

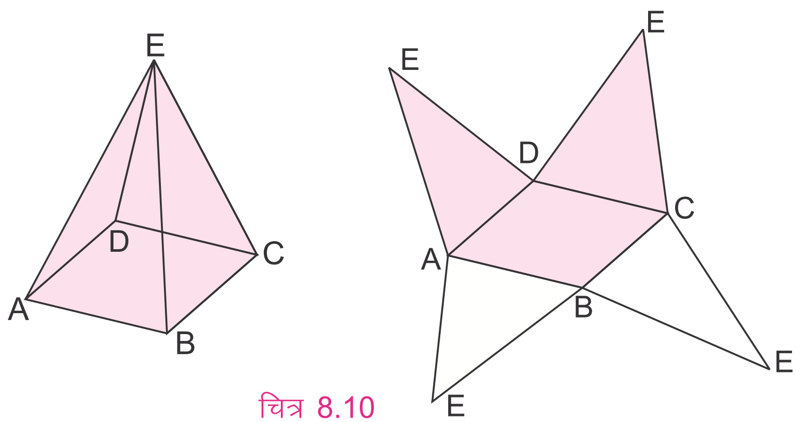
चित्रानुसार एक प्रिज्म जिसके शीर्ष A,B,C,D,E,F है, को खोलने पर उसके तीन आयताकार फलक क्रमशः ABED, CADF तथा BCFE प्राप्त होते हैं तथा इसके दोनों सिरे त्रिभुजाकार फलकों क्रमशः ABC तथा DEF के रूप में प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.9

8.5.6 पिरामिड

यहाँ एक वर्गाकार आधार वाला पिरामिड है जिसके दृश्य फलक ABE तथा BCE है तथा फलक ADE तथा CDE पार्श्व फलक व ABCD आधार फलक हैं।

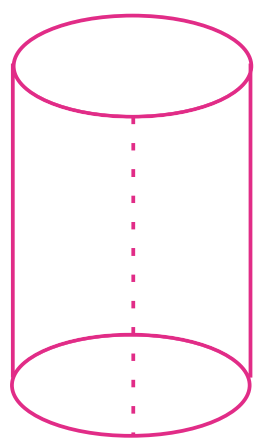


चित्र 8.10

उक्त पिरामिड को खोलने पर हमें चित्रानुसार द्विविमीय जाल प्राप्त होता है। इस जाल में एक फलक ABCD वर्गाकार आकृति का तथा 4 फलक क्रमश : ABE, BCE, CDE तथा DAE त्रिभुजाकार प्राप्त होते है।

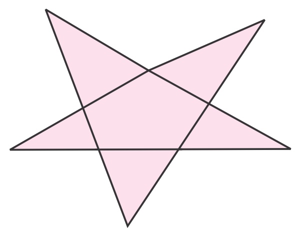
प्रश्नावली 8.2

1. एक घनाभ तथा घन के आकार के ठोस को खोलने पर बनने वाले जाल को दो अलग–अलग प्रकार से बनाइए (पुस्तक में दिए गए जालों के अतिरिक्त)
2. नीचे दिए गए एक खोखले लम्बवृत्तीय बेलन को बिन्दु रेखा के अनुदिश काटने पर प्राप्त द्विविमीय आकृतियों को दर्शाइए।

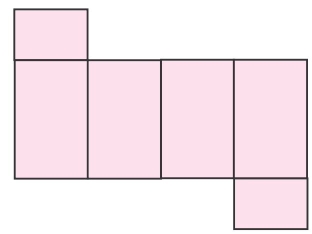


3. निम्न प्रसारित चित्रों को मोड़कर (पृष्ठों को मिलाकर) बनने वाली ठोस आकृति का चित्र बनाइए।

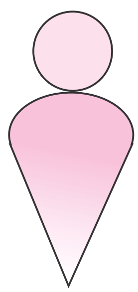
(i)



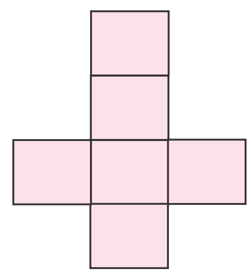
(ii)



(iii)



(iv)



हमने सीखा

1. बहुफलक – ऐसे ठोस जिनके सभी पृष्ठ समतल हो।
2. प्रिज्म – ऐसा बहुफलक जिसका आधार तथा ऊपरी हिस्सा सर्वांगसम बहुभुज हो तथा अन्य फलक समान्तर चतुर्भुज के आकार के हो प्रिज्म कहलाता है।
3. पिरामिड – ऐसा बहुफलक जिसका आधार एक बहुभुज हो तथा इसके सभी पार्श्व फलक त्रिभुजाकार होते हैं तथा एक ही शीर्ष पर मिलते हों।
4. बहुफलकों के लिए आयलर सूत्र –

$$V + F = E + 2$$

5. त्रिविमीय आकारों जैसे – घन, घनाभ, शंकु, बेलन, प्रिज्म एवं पिरामिड को द्विविमीय निरूपण जाल रूप में करना।