

वैदिक गणित

Ex 1.1

योग कीजिये। (शून्यान्त संख्या विधि)

प्रश्न 1.

83 78 73
65 84 70
74 68 54
98 32 89
49 30 75
56 54 01

हल:

83 78 73
0 65 84 70
0 74 68 54
0 98 32 89
49 30 75
0 56 54 01
4 28 49 62

संकेत-

1. $70 + 73 = 143$
अतः 70 से पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाते हैं।
2. शेष $43 + 54 = 37 + 6 + 54 = 37 + 60 = 97$
तथा $97 + 89 = 97 + 3 + 86 = 100 + 86 = 186$
अतः 89 के पूर्व अंक 2 पर एकाधिक चिह्न
3. शेष $86 + 75 = 86 + 14 + 61 = 100 + 61 = 161$
अतः 75 से पूर्व अंक 0 पर एकाधिक चिह्न
4. शेष $61 + 01 = 62$, शेष योग संक्रिया उपरोक्तानुसार।

प्रश्न 2.

32 97 36
46 57 28
62 39 99
55 43 21

हल:

32 97 36
46 57 28
0 62 39 99
55 43 21
1 97 37 84

संकेत-

1. $36 + 28 = 64$ (ii) $64 + 99 = 63 + 1 + 99 = 63 + 1(0) = 163$
अतः 99 से पूर्व अंक 9 पर एकाधिक चिह्न
2. शेष $63 + 21 = 84$
3. शेष योग संक्रियो उपरोक्तानुसार।

वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिये-

प्रश्न 3.

9 8 3 5 6
7 0 4 6 7
2 7 8 8 9

हल:

1. 6 में से 7 नहीं घटता अतः 7 के परममित्र 3 को 6 में जोड़ योग : = 9 लिखते हैं। नीचे तथा पूर्व वियोजक अंक 6 पर एकाधिक चिह्न लगाते हैं।
2. 5 में से 6 = 7 नहीं घटता अतः 7 के परममित्र अंक 3 को 5 में जोड़कर 8 नीचे लिखते हैं।
3. पूर्व वियोजक अंक 4 पर एकाधिक चिह्न लगाते हैं।
4. 3 में से 4 = 5 नहीं घटता अतः 5 के परममित्र अंक 5 को 3 में जोड़कर योग = 8 नीचे लिखते हैं तथा पूर्व वियोजक अंक 0 पर एकाधिक चिह्न लगाते हैं।
5. 8 में से 1 तथा 9 में से 7 घटाते हैं।

प्रश्न 4.

घं.	मि.	से.
31	26	25
18	58	57

हल:

घं.	मि.	से.
31	26	25
18	58	57
<hr/>		
12 घं. 27 मि. 28 से.		

संकेत

1. मापन इकाई 'समय' होने से स्तम्भ संख्या के आधार भिन्नभिन्न होंगे।
2. मिनट व सेकण्ड के स्तम्भ में दो आधार होंगे-
(क) दोनों के इकाई स्तम्भ आधार = 10
(ख) दोनों के दहाई स्तम्भ में आधार = 6
3. मिनट व सेकण्ड के दहाई स्तम्भ में परममित्र अंक निकालने का आधार = 6 रहेगा तथा शेष में आधार = 10 होंगे।
4. 5 में से 7 नहीं घटता है अतः 7 के परममित्र अंक 3 को 5 में जोड़ने पर 8 प्राप्त होगा। 7 के पास 5 पर एकाधिक चिह्न
5. 2 में से 5 = 6 नहीं घटता अतः 6 का परममित्र 0 है। अतः $2 + 0 = 2$. शेष इसी प्रकार करें।

गुणा कीजिये—

प्रश्न 5. $31 \times \frac{1}{6} \times 31\frac{5}{6}$ (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण)

अथवा

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का प्रयोग करते हुये $31 \times \frac{1}{6} \times 31\frac{5}{6}$ का मान ज्ञात (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल:

$$\begin{aligned} & 31 \times (31 + 1) / \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ & = 31 \times 32 / \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ & = 992 / \frac{5}{36} \\ & = 992 \frac{5}{36} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत

1. भिन्न योग $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$
2. शेष निखिलम् अंक समान = 31

प्रश्न 6. 103×197 (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण)

हल:

$$\begin{aligned} & 103 \times 197 \\ & 1 \times (1 + 1) / 03 \times 97 \\ & 1 \times 2 / 03 \times 97 \\ & 2 / 0291 \\ & 20291 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत

1. इकाई, दहाई वाले अंकों का योग $03 + 97 = 100$ तथा शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 1
2. दाहिने पक्ष में चार अंक।

प्रश्न 7. 54×56 (सूत्र निखिलम्)

हल:

$$\begin{aligned} & 54 \times 56 \\ & = 54 + 4 \\ & \times 56 + 6 \\ & \hline & = 5(54 + 6) / 4 \times 6 \text{ (दक्षिण पक्ष में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी)} \\ & 5 \times 60 / 24 \\ & 300 / 24 \\ & = 3024 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत-

1. आधार = 10
2. उपाधार = 10×5
3. उपाधार अंक = 5
4. विचलन + 4 + 6
5. दक्षिण अंक में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी।

प्रश्न 8. 108×112 (सूत्र निखिलम्)

हल:

$$\begin{aligned} &= 108 + 08 \\ &\times 112 + 12 \\ &= 1(108 + 12)/08 \times 12 \\ &= 1 \times 120 / 96 = 120 / 96 \\ &= 12096 \text{ उत्तर:} \end{aligned}$$

संकेत

1. आधार = 100, उपाधार = 100×1
2. उपाधार अंक = 1
3. विचलन = + 08, + 12
4. दक्षिण पक्ष में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी।।

प्रश्न 9. 137×9999 (सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण)

हल: 137×9999

$$\begin{aligned} &= 137 - 1/9999 - 136 \\ &= 136/9863 \\ &= 1369863 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत-गुणक अंक संख्या > गुण्य अंक संख्या

अतः गुण्य-1/ गुणक-वाम पक्ष

प्रश्न 10. 46×99 (सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण)

हल: वाम पक्ष = $46 - 1 = 45$
दक्षिण पक्ष = $99 - 45 = 54$
 $\therefore 46 \times 99 = 46 - 1 / 99 - 45$
 $= 45/54 = 4554$ उत्तर

संकेत

1. गुणक अंक संख्या = गुण्य अंक संख्या
2. गुणनफल = गुण्य - 1/ गुणक - वामपक्ष

प्रश्न 11. 362×143 (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक)

हल:

$$\begin{array}{r} 362 \\ \times 143 \\ \hline 38566 \\ 132 \\ \hline 51766 \end{array}$$

संकेत-प्रश्न में 3 स्तम्भ हैं अतः पाँच समूह होंगे।

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 3 & 6 & 3 & 6 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}$$

$$= 3 (12 + 6) (2 + 9 + 24)(18 + 8)$$

$$= 3 = 18 = 35 = 26$$

प्रश्न 12. 2413×3124 (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक)

हल:

$$\begin{array}{r} 2413 \\ \times 3124 \\ \hline 6416102 \\ 112211 \\ \hline 7538212 \end{array} \text{ उत्तर}$$

संकेत-प्रश्न में 4 स्तम्भ हैं अतः 7 समूह बनेंगे।

2	2	4	2	4	1	2	4	1	3	4	1	3	1	3	3
↑	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↑
3	3	1	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	2	4	4
= 6	= (2 + 12)	= (3 + 4 + 4)	= (9 + 8 + 8 + 1)	= (16 + 3 + 2)	= (4 + 6)	= 12									
= 6	= 14	= 11	= 26	= 21	= 10	= 12									

भाग दीजिए-

प्रश्न 13. $111034 \div 889$ (सूत्र निखिलम्)

हल:

	खण्ड			
प्रथम	द्वितीय	तृतीय		
889	1 1 1	0 3 4		
111	1 1	1		
	2	2 2		
		4 4 4		
	1 2 4	7 9 8		

संकेत-

1. पूरक संख्या = $1000 - 889 = 111$
2. भागफल = 124
3. शेषफल = 798

प्रश्न 14. $3994 \div 97$ (सूत्र निखिलम्)

हल:

	खण्ड		
प्रथम	द्वितीय	तृतीय	
9 7	3 9	9 4	
0 3	0	9	
		2 7	
	3 9	2 1 1	
	+ 2	-1 9 4	
	4 1	17	

संकेत-

1. पूरक संख्या = $100 - 97 = 03$
2. भागफल = 39, शेषफल = 211
3. शेषफल > भाजक अतः संशोधन आवश्यक संशोधित भाग = 41 तथा शेषफल = 17

प्रश्न 15. $2112 \div 97$ (सूत्र परावर्त्य)

हल: यह प्रश्न निखिलम विधि द्वारा हल किया गया है, परावर्त्य द्वारा हल के योग्य नहीं है।

प्रथम	द्वितीय	तृतीय
97	21	12
+ 03	0	6
<hr/>		03
	21	75

संकेत-

1. विचलन $100 - 97 = 03$, परावर्त्य अंक 0, 3
2. भागफल = 21
3. शेषफल = 75

प्रश्न 16. $13385 \div 131$ (सूत्र परावर्त्य)

हल:

प्रथम	द्वितीय	तृतीय
131	133	85
31	-3-1	-6-2
-3, -1	0	
<hr/>		23
	102	

संकेत-

1. विचलन 31, परावर्त्य अंक - 3, - 1
2. भागफल = 102
3. शेषफल = 23

प्रश्न 17. $592837 \div 119$ (सूत्र ध्वजांक)

हल:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 9 & 5 & 9 & 2 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & & 15 & 17 & 9 & & 10 \\ \hline & 4 & 9 & 8 & 1 & & 98 \end{array}$$

अतः भागफल = 4981 } उत्तर
शेषफल = 98 }

संकेत-

1. यहाँ पहले भजनफल अंक को 5 लिख सकते हैं किन्तु अवशेष इतना छोटा रहता है कि अगले पद में घटाना सम्भव नहीं होगा, अतः पहले 4 को भजनफल अंक लेते हैं।
2. संशोधित भाज्य = $152 - 36 = 116$ अतः $116 \div 11$ भागफल = 9, शेष = 17
3. संशोधित भाज्य = $178 - 81 = 97$ अतः $97 \div 11$. भागफल = 8, शेषफल = 9
4. संशोधित भाज्य = $93 - 72 = 21$. अतः $21 \div 11$ भागफल = 1 तथा शेषफल = 10
5. शेषफल $107 \div 9 = 98$

प्रश्न 18. $58764 \div 59$ (सूत्र ध्वजांक)

हल:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 9 & 5 & 8 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & & 13 & 11 & & 5 \\ \hline & 9 & 9 & 6 & & 54 - 54 = 0 \text{ अन्तिम शेषफल} \end{array}$$

अतः भागफल = 996 } उत्तर
शेषफल = 0 }

संकेत-

1. 5 में 5 का भाग 1 बार जा सकता है किन्तु अगले चरण सम्भव नहीं, अतः 58 में 5 को भाग देने पर भागफल 9 व शेषफल = 13 होंगे।
2. संशोधित भाज्य $137 - 81 = 56$ अतः $56 \div 5 = 11$, भागफल = 9, शेष = 13, इसी प्रकार शेष करें।

प्रश्न 19. $92358 \div 151$ (सूत्र ध्वजांक)

हल:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & 9 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 15 & & & 2 & 2 & 9 \\ \hline & 6 & 1 & 1 & & 97 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अतः भागफल} = 611 \\ \text{शेषफल} = 97 \end{array} \right\} \text{उत्तर}$$

संकेत-

1. भागफल = 6 तथा शेष = 2 जो 2, 3 के मध्य लिखते हैं।
2. संशोधित भाज्य = $23 - 6 = 17$
अतः $17 \div 15 = 1$ तथा शेषफल = 2
3. संशोधित भाज्य = $25 - 1 = 24$
अतः $24 \div 15 = 1$ तथा शेष 9, अतः $98 - 1 = 97$

प्रश्न 20. $12345 \div 91$ (सूत्र ध्वजांक)

हल:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & & & 3 & 5 & 6 \\ \hline & & 1 & 3 & 5 & 65 - 5 \\ & & & & & = 60 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अतः भागफल} = 135 \\ \text{तथा शेषफल} = 60 \end{array} \right\} \text{उत्तर}$$

संकेत-

1. भागफल = 1 तथा शेषफल = 3
2. संशोधित भाज्य = $33 - 1 = 32 \div 9 = 3$, शेषफल = 5
3. संशोधित भाज्य = $54 - 3 = 51 \div 9 = 5$ तथा शेष 6
4. नया भाज्य = 65 अन्तिम शेषफल = $65 - 5 \times 1 = 60$

Ex 1.2

उपसूत्र यावदूनम तावदूनी द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1. 93

$$\begin{aligned}\text{हल: } (93)^2 &= 93 - 07/07^2 \\ &= 86/49 = 8649 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{संकेत — आधार} &= 100 \\ \text{विचलन} &= 93 - 100 = -07 \\ \text{सूत्र— (संख्या)}^2 &= \text{संख्या} + \text{विचलन}/(\text{विचलन})^2\end{aligned}$$

प्रश्न 2. (106)

$$\begin{aligned}\text{हल: } (106)^2 &= 1(106 + 06)/06^2 \\ &= 1 \times 112/36 \\ &= 11236 \text{ उत्तर,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{संकेत-आधार} &= 100 \\ \text{उपाधार} &= 200 \\ \text{उपाधार} &= 2, \text{ विचलन} = 6 \\ \text{सूत्र-(संख्या)}^2 &= \text{उपाधार अंक (संख्या + विचलन)}/(\text{विचलन})^2\end{aligned}$$

प्रश्न 3. 211

$$\begin{aligned}\text{हल: } (211)^2 &= 2(211 + 11)/(11)^2 \\ &= 2 \times 222/121 \\ &= 444/21 = 44521 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{संकेत-} \\ \text{आधार} &= 100 \\ \text{उपाधार} &= 200 \\ \text{आधार अंक} &= 2, \text{ विचलन} = 11 \\ \text{सूत्र-(संख्या)} &= \text{उपाधार अंक (संख्या + विचलन)}/(\text{विचलन})\end{aligned}$$

प्रश्न 4. 405

हल: $(405)^2 = 4(405 + 05)/(05)^2$
 $= 4 \times 410/25$
 $= 164025$ उत्तर

संकेत-

आधार = 100

उपाधार = 400

उपाधार अंक = 4, विचलन = 05

सूत्र-(संख्या)² – उपाधार अंक (संख्या + विचलन)/(विचलन)²

उपसूत्र आनुरूप्येण द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. 16

हल: $(16)^2 =$

प्रथम खण्ड	द्वितीय	तृतीय
1	1×6	$(6)^2$
1	6	36
	6	
1	12	36
$= 256$ उत्तर		

संकेत-

1. तीन खण्ड बनाते हैं।
2. प्रथम में दहाई तथा तृतीय में इकाई के अंक वर्ग लिखते हैं।
3. द्वितीय खण्ड में इकाई व दहाई का गुणन लिखते हैं तथा उसके नीचे पुनः वही गुणनफल लिखते हैं।
4. योगफल संख्या का अभीष्ट वर्ग है। मध्य खण्ड व तृतीय खण्ड में 1 – 1 अंक ही लिखते हैं।

प्रश्न 6. 31

हल: $(31)^2 =$

$(3)^2$	1×3	$(1)^2$	संकेत—प्रश्न 5 के अनुसार
9	3	1	
	3		
9	6	1	उत्तर

प्रश्न 7. 24

हल:

	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	
$(24)^2 =$	$(2)^2$	2×4	$(4)^2$	संकेत—प्रश्न 5 के अनुसार
	4	8	16	
		8		
	4	16	16	
$(24)^2 =$	576	उत्तर		

प्रश्न 8. 56

हल:

$(56)^2 =$	$(5)^2$	5×6	$(6)^2$
	25	30	36
		+ 30	
	25	60	36
$(56)^2 =$	3136	उत्तर	

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा वर्ग ज्ञात करो।

प्रश्न 9. 45

हल:

$$\begin{aligned}(45)^2 &= 4 \times (4 + 1)/5^2 \\ &= 4 \times 5/25 \\ &= 20/25 \\ &= 2025 \text{ उत्तर} \\ \text{संकेत-}\end{aligned}$$

1. इसमें दहाई के अंक से एक अधिक अंक लेकर गुणा करते हैं।
2. इकाई के अंक का वर्ग कर इसके साथ लिख देते हैं।

प्रश्न 10. 85

$$\begin{aligned}\text{हल: } (85)^2 &= 8 \times (8 + 1)/5^2 \\ &= 72/25 \\ &= 7225 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 11. 115

$$\begin{aligned}\text{हल: } (115)^2 &= 11 \times 12 / (5)^2 \\ &= 132/25 \\ &= 13225 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 12. 125

$$\begin{aligned}\text{हल: } (125)^2 &= 12 \times 13 / 5^2 \\ &= 156/25 \\ &= 15625 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

सूत्र संकलन व्यवकलन द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 13. 23

$$\begin{aligned}\text{हल: } (23)^2 &= (23 + 3) (23 - 3) + 3^2 \text{ संकेत-इष्ट संख्या} = 3 \\ &= 26 \times 20 + 9 \\ &= 520 + 9 = 529 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 14. 38

$$\begin{aligned}\text{हल: } (38)^2 &= (38 + 2) (38 - 2) + 2^2 \\ &= 40 \times 36 + 4 \\ &= 1440 + 4 \\ &= 1444 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

संकेत-

1. इष्ट संख्या = 2
2. इष्ट संख्या का चयन इस प्रकार किया जाता है कि जोड़ने या घटाने पर शून्यान्त संख्या प्राप्त हो।

प्रश्न 15. (69)

$$\begin{aligned}\text{हल: } (69)^2 &= (69 + 1) \times (69 - 1) + (1)^2 \text{ संकेत-इष्ट संख्या} = 1 \\ &= 70 \times 68 + 1 \\ &= 4760 + 1 = 4761 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 16. 89

हल: $(89)^2 = (89+ 1) (89 - 1) + (1)^2$ संकेत-इष्ट संख्या = 1
= $90 \times 88 + 1$
= $7920 + 1 = 7921$ उत्तर

द्वन्द्व योग द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 17. 362

हल: 362 के पाँच अंक समूह बनेंगे
 $(362)^2 = 32/3 \times 6 \times 2/3 \times 2 \times 2 + 6/6 \times 2 \times 2/2^2$
= $9/36/48/24/4$
 $(362)^2 = 131044$ उत्तर

संकेत-

1. सर्वप्रथम वर्ग ज्ञात करने वाली संख्या के अंक समूह बनाते हैं। जैसे-3, 36, 362, 62, 2 इसके समूह.
2. इनको द्वन्द्व योग के अनुसार क्रम में लिखते हैं।
3. इकाई अंक की ओर से योग करते हैं। एक खण्ड में एक अंक रखते हैं। योगफल ही अभीष्ट संख्या का वर्ग होगा।

प्रश्न 18. 453

हल: $(453)^2 =$ अंक समूह = 4, 45, 453, 53, 3
इन्हें पाँच खण्डों में लिखने पर।
= $4^2/4 \times 5 \times 2/4 \times 3 \times 2 + 5/5 \times 3 \times 2/3^2$
= $16/40/49/30/9$ योग करने पर
= 205209 उत्तर

प्रश्न 19. 4312

हल: 4312 के सात अंक समूह निम्न प्रकार बनेंगे-
4, 43, 431, 4312, 312, 12, 2
 $(4312)^2 = (4)^2/4 \times 3 \times 2/4 \times 1 \times 2 + 3^2/4 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 2/3 \times 2 \times 2 + 1^2/1 \times 2 \times 2/2^2$
= $16/24/17/22/13/4/4$
 $(4312)^2 = 18593344$ उत्तर

प्रश्न 20. 2456

हल: (2456)² इसके सात अंक समूह निम्न प्रकार हैं

2, 24, 245, 2456, 456, 56, 6

$$\begin{aligned}(2456)^2 &= 22/2 \times 4 \times 2/2 \times 5 \times 2 + 4^2/2 \times 6 \times 2 + 4 \times 5 \\ &\times 2/4 \times 6 \times 2 + 5^2/5 \times 6 \times 2/6^2 \\ &= 4/16/36/64/73/60/36 \\ (2456)^2 &= 6031936\end{aligned}$$

सूत्र निखिलम् द्वारा घनफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 21. 14

हल: सूत्र-घनफल = संख्या + 2 x विचलन/3(विचलन)²/(विचलन)³

$$(14)^3 = 14 + 2(4)/3 \times (4)^2/4$$

$$= 14 + 8/48/64$$

$$= 2744 \text{ उत्तर}$$

$$\text{संकेत-आधार} = 10 \text{ तथा विचलन} = 14 - 10 = 4$$

प्रश्न 22. 97

हल: सूत्र-घनफल = संख्या + 2 x विचलन/3(विचलन)²/(विचलन)³

$$(97)^3 = 97 + 2(-3)/3 \times (-3)/(-3)^3$$

$$(97)^3 = 97 - 6/3 \times 9/-27$$

$$= 9126/100 - 27$$

$$= 912673 \text{ उत्तर}$$

$$\text{संकेत-यहाँ आधार} = 100 \text{ तथा विचलन} = -3 \text{ है।}$$

प्रश्न 23. 27

हल: (27)³ = (उपाधार अंक)² (संख्या + 2 x विचलन)/उपाधार अंक x 3 x (विचलन)/(विचलन)³

यहाँ उपाधार = 30, उपाधार अंक = 3, विचलन = -3

$$\text{अतः } (27)^3 = (3)^2 (27 + 2x - 3)/3 \times 3 \times (-3)^2/(-3)^3$$

$$= 189/81/-27$$

$$= 189/78/30 - 27$$

$$= 19683 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 24. 395

हल: $(395)^3 = 4^2(395 + (-5) \times 2)/4 \times 3 \times (-5)^2/(-5)^3$
 $= 16(395 - 10)/300/-125$
 $= 6160/298/200 - 125$
 $= 6160/298/75$
 $= 61629875$ **उत्तर**

संकेत—यहाँ आधार = 400, उपाधार अंक = 4, विचलन = - 5 मध्य व तृतीय खण्ड में 2 = 2 अंक होंगे।

उपसूत्र आनुरूप्येण द्वारा घनफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 25. 16

हल: 16 के घनफल के खण्ड

I	II	III	IV
1^3	$1^2 \times 6$	1×6^2	6^3
1	6	36	216
	+ 12	+ 72	
1	18	108	216

$(16)^3 = 4096$ **उत्तर**

संकेत

1. इसके लिए चार खण्ड बनेंगे।
2. बायीं ओर से प्रथम खण्ड में संख्या के दहाई अंक का घन तथा चतुर्थ खण्ड में संख्या के इकाई अंक का घन है।
3. दूसरे खण्ड में दहाई अंक का वर्ग x इकाई अंक का वर्ग है।
4. तीसरे खण्ड में दहाई अंक x इकाई अंक वर्ग है।
5. दूसरे व तीसरे खण्ड में प्राप्त गुणनफल का दुगुना उन्हीं खण्डों में और जोड़ते हैं।
6. द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ खण्ड में एक-एक अंक रहेगा। सबका योगफल ही अभीष्ट घनफल है।

प्रश्न 26. 33

हल: $(33)^3$

खण्ड	I	II	III	IV
	3^3	$3^2 \times 3$	3×3^2	3^3
	27	27	27	27
		+ 54	+ 54	
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	27	81	81	27

= 27/81/81/27

अतः $(33)^3 = 35937$ उत्तर

संकेत

1. इसके लिए चार खण्ड बनेंगे।
2. बायीं ओर से प्रथम खण्ड में संख्या के दहाई अंक का घन तथा चतुर्थ खण्ड में संख्या के इकाई अंक का घन है।
3. दूसरे खण्ड में दहाई अंक का वर्ग \times इकाई अंक का वर्ग है।
4. तीसरे खण्ड में दहाई अंक \times इकाई अंक वर्ग है।
5. दूसरे व तीसरे खण्ड में प्राप्त गुणनफल का दुगुना उन्हीं खण्डों में और जोड़ते हैं।
6. द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ खण्ड में एक-एक अंक रहेगा। सबका योगफल ही अभीष्ट घनफल है।

प्रश्न 27. 41

हल: $(41)^3$

खण्ड	I	II	III	IV
	$(4)^3$	$4^2 \times 1$	4×1^2	$(1)^3$
	64	16	4	1
		+ 32	+ 8	
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	64	48	12	1

= 64/48/12/1
= 68921

$(41)^3 = 68921$ उत्तर

प्रश्न 28. 52

हल: $(52)^3$

खण्ड	I	II	III	IV	
	$(5)^3$	$5^2 \times 2$	5×2^2	$(2)^3$	
	125	50	20	8	
		+ 100	+ 40		
	125	150	60	8	= $125/150/60/8$
					= 140608

$(52)^3 = 140608$ उत्तर

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा घनफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 29. 45

हल:

	I	II	III	IV
$(45)^3 =$	$4^2 \times 5$	$4^2 \times 5$	3×4	$5^2/5^3$
$(45)^3 =$	80	80	30	125
$(45)^3 =$	91125 उत्तर			

संकेत

1. आधार = 10, विचलन = $5 \times 3 - 10 = 5$
2. गुणन संक्रिया को चार खण्डों में लिखते हैं। बायें से प्रथम खण्ड = दहाई अंक का वर्ग \times उसको एकाधिक, द्वितीय खण्ड = दहाई अंक का वर्ग \times विचलन, तृतीय खण्ड = $3 \times$ दहाई अंक \times (इकाई अंक), चतुर्थ खण्ड = (इकाई अंक) जहाँ विचलन = इकाई अंक $\times 3 - 10$

प्रश्न 30. 73

हल:

	I	II	III	IV
$(73)^3 =$	$7^2 \times 8$	$7^2 \times -1$	3×7	$3^2/3^3$
$(73)^3 =$	392	- 49	189	27
	= $387/50 - 49/189/27$			
	= $387/1/189/27$			
$(73)^3 =$	389017 उत्तर			

संकेत-विचलन = $9-10 = -1$, आधार = 10

प्रश्न 31. 24

हल:

$$\begin{aligned} (24)^3 &= \overset{\text{I}}{2^2} \times \overset{\text{II}}{3/2^2} \times \overset{\text{III}}{2/3} \times \overset{\text{IV}}{2} \times 4^2/4^3 \\ &= 12/8/96/64 \\ (24)^3 &= 13824 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत-विचलने = $4 \times 3 - 10 = 10 = 2$, आधार = 10

प्रश्न 32. 106

हल:

$$\begin{aligned} (106)^3 &= \overset{\text{I}}{10^2} \times \overset{\text{II}}{11/10^2} \times \overset{\text{III}}{8/3} \times \overset{\text{IV}}{10} \times 6^2/6^3 \\ &= 1100/800/1080/216 \\ &= 1100/800/1080/216 \\ (106)^3 &= 1191016 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

संकेत-विचलन = $6 \times 3 - 10 = 8$

Ex 1.3

वैदिक विधियों द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 2116

हल: भाग विधि से—

$$\begin{array}{r|l} & 46 \\ \hline 4 & \underline{2116} \\ \times 4 & \underline{-16} \\ \hline 86 & 516 \\ \times 6 & \underline{-516} \\ \hline & \times \end{array}$$

अतः $\sqrt{2116} = 46$

प्रश्न 2. 4225 द्वन्द्व योगविधि द्वारा

हल:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 42 \quad 2 \quad 5 \\ \hline & 6 \quad 2 \\ \hline & 6 \quad 5.00 \end{array}$$

अतः $\sqrt{4225} = 65$ उत्तर

द्वन्द्व योग विधि-

1. संख्या में दो जोड़े हैं अतः वर्गमूल में 2 अंक होंगे।
2. प्रथम वर्गमूल अंक = 6, शेषफल $42 - 36 = 6$, इसे 2 से पूर्व लिखां नया भाज्य 62 तथा संशोधित भाज्य = 62 है अतः $62 : 12 = 5$ इसे 6 के आगे शेषफल = 2 जो 2 व 5 के मध्य लिखते हैं। नया भाज्य 25 तथा अन्तिम शेषफल = $25 - 25 = 0$

प्रश्न 3. 6889 (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 6 \quad 8 \quad 8 \quad 9 \\ \hline & 4 \quad 0 \\ \hline & 8 \quad 3 \end{array}$$

$\sqrt{6889} = 83$ उत्तर

प्रश्न 4. 59049

हल: भाग विधि से-

$$\begin{array}{r|l} & 2 \quad 4 \quad 3 \\ \hline 2 & 5 \quad 90 \quad 49 \\ \times 2 & -4 \\ \hline 4 \quad 4 & 190 \\ 4 & -176 \\ \hline 4 \quad 8 \quad 3 & 1449 \\ \times 3 & 1449 \\ \hline & \times \end{array}$$

अतः $\sqrt{59049} = 243$ उत्तर

प्रश्न 5. 125316

हल: द्वन्द्व योग विधि द्वारा-

	12	5 3 1 6
6		3 5 4 1
	3	54.00

संकेत-

1. संख्या के तीन जोड़े हैं अतः वर्गमूल के 3 अंक होंगे। प्रथम वर्गमूल अंक = 3, शेषफल = $12 - 9 = 3$
2. नया भाज्य 35, संशोधित भाज्य भी 35 अतः $35 \div 6 = 5$, शेषफल = 5
नया भाज्य = 53, संशोधित भाज्य $53 - 5^2 = 28 \div 6 = 4$, शेषफल 4, यहाँ अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है। नया भाज्य $41 - 2 \times 5 \times 4 = 1$
नया भाज्य = 16, अन्तिम शेषफल $16 - 4^2 = 0$ अतः

$\sqrt{125316} = 16$ उत्तर

प्रश्न 6. 16744

हल:

	16	9 7 4 4
8		0 1 0 0
	4	12.00

अंतः $[\sqrt{169744} = 412$ उत्तर

संकेत-

1. संख्या के तीन जोड़े हैं अतः वर्गमूल के 3 अंक होंगे। प्रथम वर्गमूल अंक = 3, शेषफल = $12 - 9 = 3$
2. नया भाज्य 35, संशोधित भाज्य भी 35 अतः $35 \div 6 = 5$, शेषफल = 5
3. नया भाज्य = 53, संशोधित भाज्य $53 - 5^2 = 28 \div 6 = 4$, शेषफल 4, यहाँ अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है। नया भाज्य $41 - 2 \times 5 \times 4 = 1$

प्रश्न 7. 1265625

हल: भाग विधि से—

	1 1.2 5
1	1 <u>26</u> <u>56</u> <u>25</u>
× 1	1
2 1	26
× 1	- 21
2 2 2	556
× 2	- 444
2 2 4 5	11225
× 5	- 11225
	×

अतः $\sqrt{1265625} = 1125$ उत्तर

प्रश्न 8. 1522756

हल: भाग विधि से—

	1 2 3 4
1	1 <u>52</u> <u>27</u> <u>56</u>
× 1	1
2 2	52
× 2	- 44
2 4 3	827
× 3	- 729
2 4 6 4	9856
× 4	9856
	×

अतः $\sqrt{1522756} = 1234$ उत्तर

दूसरी विधि—

	1	52 27 56
2		0 1 2 2
	1	2 3 4.000

संकेत-

1. वर्गमूल में 4 अंक, होंगे।
2. प्रथम वर्गमूल अंक = 1 शेषफल = 0 जिसे 5 से पूर्ण लिखा जायेगा।

3. $05 \div 2 = 2$ तथा शेष 1 अतः संशोधित भाज्य $12 \div 2^2 = 8$
4. $8 \div 2 = 4$ तथा शेषफल शून्य अतः $8 = 2 = 3$ लेकर शेषफल 2 प्राप्त करते हैं।
5. संशोधित भाज्य $22 - 12 = 10$ अतः $\sqrt{15 \ 22 \ 756} = 1234$ उत्तर

वैदिक विधियों द्वारा पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 9. 68921

हल: भाग विधि से-

क्रियापद ↓	41
$- 4^3$	068921
	-64
$- 3 \times 4^2 \times 1$	49
	-48
$- 3 \times 4 \times 1^2$	12
$\times 1^2$	-12
$- 1^3$	01
	- 01
	x

अतः 68921 का घनमूल = 41

संकेत-

1. अन्तिम समूह $68 - 4^3 = 4$
2. घनमूल अंक 4 ऊपर लिखा। नया भाज्य = 49
3. नये भाज्य में $3 \times 4^2 \times 1 = 48$ का भाग दिया।
4. भागफल अंक 1 ऊपर लिखा। $3 \times 4^2 \times 1$ घटाया। शेषफल = 1, नया भाज्य = 12
5. $12 - 3 \times 4 \times 1^2 = 12$, शेषफल = 0
6. नया भाज्य = $01 - 1^3 = 0$
अतः घनमूल = 41 उत्तर

प्रश्न 10. 636056

हल:

क्रियापद ↓	86
$- 8^3$	636056 -512
$- 3 \times 8^2 \times 6$	1240 -1152
$- 3 \times 8 \times 6^2$	885 -864
$- 6^3$	216 -216
	x

अतः 636056 का घनमूल = 86 उत्तर

प्रश्न 11. 314432

हल:

क्रियापद ↓	68
$- 6^3$	314432 -216
$- 3 \times 6^2 \times 8$	984 -864
$- 3 \times 6 \times 8^2$	1203 -1152
$- 8^3$	512 -512
	x

अतः 314432 का घनमूल = 68 उत्तर

प्रश्न 12. 493039



हल:

क्रियापद ↓	79
$- 7^3$	493039 -343
$- 3 \times 7^2 \times 9$	1500 -1323
$- 3 \times 7 \times 9^2$	1773 -1701
$- 9^3$	729 -729
	x

अतः 493039 का घनमूल = 79 उत्तर

प्रश्न 13. 8365427

हल:

क्रियापद ↓	203
$- 2^3$	8365427 -8
$- 3 \times 2^2 \times 0$	03 -0 (12 × 0 घटाया)
$- 3 \times 2 \times 0^2$	36 -0 (6 × 0 घटाया)
$- 0^3$	365 -0
$- 3 \times 20^2 \times 3$	3654 -3600 (1200 × 3 घटाया)
$- 3 \times 20 \times 3^2$	542 -540
$- 3^3$	27 -27
	x

अतः घनमूल = 203 उत्तर

प्रश्न 14. 1061208

हल:

क्रियापद ↓	102
$- 1^3$	001061208
	-1
$- 3 \times 1^2 \times 0$	0
	-0
$- 3 \times 1 \times 0^2$	06
	-00
$- 0^3$	61
	-00
$- 3 \times 10^2 \times 2$	612
	-600
$- 3 \times 10 \times 2^2$	120
	-120
$- 2^3$	8
	-8
	x

अतः 1061208 का घनमूल = 102 उत्तर

प्रश्न 15. 8489664

हल:

क्रियापद ↓	204
$- 2^3$	008489664
	-8
$- 3 \times 2^2 \times 0$	04
	-00
$- 3 \times 2 \times 0^2$	48
	-00
$- 0^3$	489
	-000
$- 3 \times 20^2 \times 4$	4896
	-4800
$- 3 \times 20 \times 4^2$	966
	-960
$- 4^3$	64
	-64
	x

अतः 8489664 का घनमूल = 204 उत्तर

प्रश्न 16. 200201625

हल:

क्रियापद ↓	585
$- 5^3$	200201625 -125
$- 3 \times 5^2 \times 8$	752 -600
$- 3 \times 5 \times 8^2$	1520 -960
$- 8^3$	5601 -512
$- 3 \times 58^2 \times 5$	50896 -50460
$- 3 \times 58 \times 5^2$	4362 -4350
$- 5^3$	125 -125
	x

अतः 200201625 का घनमूल = 585 उत्तर

प्रश्न 17. 258474853

हल:

क्रियापद ↓	637
$- 6^3$	258474853 -216
$- 3 \times 6^2 \times 3$	424 -324
$- 3 \times 6 \times 3^2$	1007 -162
$- 3^3$	8454 -27
$- 3 \times 63^2 \times 7$	84278 -83349
$- 3 \times 63 \times 7^2$	9295 -9261
$- 7^3$	343 -343
	x

अतः 258474853 का घनमूल = 637 उत्तर

प्रश्न 18. 22665187

हल:

क्रियापद ↓	283
$- 2^3$	022665187 -8
$- 3 \times 2^2 \times 8$	146 -96
$- 3 \times 2 \times 8^2$	506 -384
$- 8^3$	1225 -512
$- 3 \times 28^2 \times 3$	7131 -7056
$- 3 \times 28 \times 3^2$	758 -756
$- 3^3$	27 -27
	x

अतः घनमूल = 283 उत्तर

प्रश्न 19. 8615125

हल:

क्रियापद ↓	205
$- 2^3$	008615125 - 8
$- 3 \times 2^2 \times 0$	6 - 0
$- 3 \times 2 \times 0^2$	61 - 00
$- 0^3$	615 - 000
$- 3 \times 20^2 \times 5$	6151 - 6000
$- 3 \times 20 \times 5^2$	1512 - 1500
$- 5^3$	125 - 125
	x

अतः 8615125 का घनमूल = 205 उत्तर

प्रश्न 20. 660776311

हल:

क्रियापद ↓	871
$- 8^3$	660776311 -512
$- 3 \times 8^2 \times 7$	1487 -1344
$- 3 \times 8 \times 7^2$	1437 -1176
$- 7^3$	2616 -343
$- 3 \times 87^2 \times 1$	22733 -22707
$- 3 \times 87 \times 1^2$	261 -261
$- 1^3$	01 -1
	x

अतः घनमूल = 871 उत्तर

Ex 1.4

सूत्रे परावर्त्य योजयेत् द्वारा समीकरण का मौखिक हल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $13x - 14 = 9x + 10$

हल: $a = 13, b = -14, c = 9, d = 10$
हम जानते हैं।

यदि $ax + b = cx + d$ तो

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{d-b}{a-c} = \frac{10 - (-14)}{13-9} \\ &= \frac{24}{4} = 6 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 2. $3y + 4 = 5y - 4$

हल: $a = 3, b = 4, c = 5, d = -4$
हम जानते हैं।

यदि $ax + b = cx + d$ तो

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

$$\begin{aligned}\therefore y &= \frac{d-b}{a-c} = \frac{-4-4}{3-5} \\ &= \frac{-8}{-2} = 4 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 3. $\frac{2x+1}{3x+4} = \frac{1}{3}$

हल:

$$\frac{2x+1}{3x+4} = \frac{1}{3}$$

या $\frac{2x+1}{1} = \frac{3x+4}{3}$

यदि $\frac{ax+b}{p} = \frac{cx+d}{q}$ हो तो

$$x = \frac{dp-bq}{aq-cp}$$

अतः यहाँ $a = 2, b = 1, c = 3, d = 4, p = 1, q = 3$

$$\begin{aligned} x &= \frac{dp-bq}{aq-cp} = \frac{4 \times 1 - 1 \times 3}{2 \times 3 - 3 \times 1} \\ &= \frac{4-3}{6-3} = \frac{1}{3} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $\frac{5x-3}{2} = \frac{2x+1}{5}$

हल: यहाँ $a = 5, b = -3, c = 2, d = 1, 2 = 2, q = 5$

$$\begin{aligned} x &= \frac{dp-bq}{aq-cp} = \frac{1 \times 2 - (-3) \times 5}{5 \times 5 - 2 \times 2} \\ &= \frac{2+15}{25-4} = \frac{17}{21} \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 5. $(x+7)(x+9) = (x-8)(x-11)$

हल: $a = 7, b = 9, c = -8, d = -11$

यदि $(x+a)(x+b) = (x+c)(x+d)$ हो तो

$$x = \frac{cd-ab}{a+b-c-d}$$

$$x = \frac{cd-ab}{a+b-c-d} = \frac{-8 \times -11 - 7 \times 9}{7+9-(-8)-(-11)}$$

$$= \frac{88-63}{7+9+8+11} = \frac{88-63}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. $(x+5)(x+1) = (x+3)(x+2)$

हल: $a = 5, b = 1, c = 3, d = 2$

$$x = \frac{cd - ab}{a + b - c - d} = \frac{3 \times 2 - 5 \times 1}{5 + 1 - 3 - 2}$$
$$= \frac{6 - 5}{6 - 5} = 1 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 7. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 0$

हल: हम जानते हैं कि यदि

$$\frac{m}{n+a} + \frac{n}{n+b} = 0 \text{ हो तो}$$

$$x = -\frac{mb + na}{m + n}$$

यहाँ पर $m = 1, n = -2, a = -1, b = 1$

$$x = -\frac{1 \times 1 + (-2)(-1)}{1 - 2}$$

$$x = -\frac{1 + 2}{-1} = \frac{-3}{-1}$$

$$\boxed{x = 3} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 8. $\frac{5}{2x-1} - \frac{9}{3x-2} = 0$

हल:

$$\frac{5}{2x-1} - \frac{9}{3x-2} = 0$$

या $\frac{5/2}{x-1/2} + \frac{-9/3}{x-2/3} = 0$

हम जानते हैं कि यदि $\frac{m}{n+a} + \frac{n}{n+b} = 0$ हो तो

$$x = -\frac{mb + na}{m + n}$$

अतः $m = 5/2, n = -9/3, a = -1/2, b = -2/3$

$$x = -\frac{mb + na}{m + n} = -\frac{\frac{5}{2} \times \frac{-2}{3} + \left(-\frac{9}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} - \frac{9}{3}}$$

$$= -\frac{-\frac{5}{3} + \frac{9}{6}}{\frac{15-18}{6}} = -\frac{-\frac{10+9}{6}}{\frac{-3}{6}}$$

$$= -\frac{-1}{-3} = -\frac{1}{3} \text{ उत्तर}$$

सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये द्वारा समीकरण हल कीजिये।

प्रश्न 9. $(2x + 1) + (x + 3) = (5x + 4)$

हल: एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतंत्र पद समान हो तो चर राशि का मान शून्य होता है।

अतः यहाँ $1 + 3 = 4$ दोनों पक्षों में स्वतंत्र पद समान है।

अतः $x = 0$ होगा।

प्रश्न 10. $a(x - 1) + b(x - 1) = c(x - 1) + d(x - 1)$

हल: यहाँ $(x - 1)$ एक सर्वनिष्ठ खण्ड है।

अतः $(x - 1) = 0 \therefore x = 1$

प्रश्न 11. $(x + 1)(x + 9) = (x + 3)(x + 3)$

हल: यहाँ दोनों ओर स्वतंत्र पद 9 है जो समान है।

अतः $x = 0$ मान होगा।

प्रश्न 12 $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{x}{1}$

हल: प्रत्येक पद में x एक उभयनिष्ठ खण्ड है।

अतः $x = 0$

प्रश्न 13. $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-6} = 0$

हल: सूत्र तृतीय के अनुसार

यदि समीकरणों में दो भिन्नो के अंश परस्पर समान हों तो उनके हरों का योग शून्य रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

यहाँ दोनों भिन्नो के अंश परस्पर समान = 1

अतः सूत्रानुसार हरोँ का योग = $x + 4 + x - 6 = 0$
अतः $2x - 2 = 0$, $x = 2/2 = 1$

प्रश्न 14. $\frac{5}{3x+2} + \frac{5}{2x+8} = 0$

हल: अंश के दोनों अंक परस्पर समान = 5 है। अतः हरोँ का योग = $3x + 2 + 2x + 8 = 0$
या $5x + 10 = 0$
अतः $x = \frac{-10}{5} = -2$ उत्तर

प्रश्न 15. $\frac{2x+4}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x+4}$

हल: सूत्र चतुर्थ-यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरोँ का योग परस्पर समान हो अथवा दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हों तो किसी भी योग को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।
अतः दोनों पक्षों के अंशों का योग = $2x + 4 + 2x + 1 = 4x + 5$
दोनों पक्षों के हरोँ का योग = $2x + 1 + 2x + 4 = 4x + 5$
दोनों समुच्चय समान हैं अतः $4x + 5 = 0$
 $\therefore x = \frac{-5}{4}$

प्रश्न 16. $\frac{3x+2}{5x+7} = \frac{x+1}{3x-1}$

हल: सूत्र चतुर्थ के अनुसार दोनों पक्षों के अंशों का योग
= $3x + 2 + x + 1$
= $4x + 3$ (i)
तथा हरोँ का योग = $5x + 7 + 3x - 1 = 8x + 6$
= $2(4x + 3)$ (ii)
दोनों योगों को अनुपात = 1 : 2
अतः सूत्रानुसार किसी भी योग को शून्य समान रखने पर
 $4x + 3 = 0$
अतः $4x = -3$
 $x = -\frac{3}{4}$

प्रश्न 17. $\frac{5x+7}{2x+1} = \frac{x+1}{3x+5}$

हल: सूत्र पंचम-यदि समीकरण के एक पक्ष के अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो अथवा दोनों अन्तर एक निश्चित अनुपात में हों तो किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर चर राशि का मान ज्ञात होता है।

वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर

$$5x + 7 - 2x - 1 = 3x + 6 \dots(i)$$

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर

$$3x + 5 - 3x - 1 = 2x + 4 \dots(ii)$$

अन्तर क्रमांक (i) व अन्तर क्रमांक (ii) का अनुपात = 3 : 2

अतः किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर

$$2x + 4 = 0$$

$$\text{या, } 2x = -4$$

$$\text{अतः } x = \frac{-4}{2} = -2$$

प्रश्न 18. $\frac{3x+6}{6x+3} = \frac{5x+4}{2x+7}$

हल: वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तरे

$$6x + 3 - 3x - 6 = 3x - 3 \dots(i)$$

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तरे

$$5x + 4 - 2x - 7 = 3x - 3 \dots(ii)$$

दोनों अन्तर समान हैं अतः

$$3x - 3 = 0$$

$$\text{अतः } x = \frac{3}{3} = 1 \text{ उत्तर}$$

∴ उपरोक्त प्रश्न द्विघात समीकरण है।

∴ इसका दूसरा मूल भी ज्ञात करना है।

$$\text{अब दोनों पक्षों के अंशों का योग} = 3x + 6 + 5x + 4$$

$$= 8x + 10$$

$$\text{दोनों पक्षों के हरों का योग} = 6x + 3 + 2x + 7$$

$$= 8x + 10$$

∴ दोनों समान हैं

$$\text{अतः } 8x + 10 = 0$$

$$\text{या } 8x = -10$$

$$\text{या } x = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$$

$$\text{अतः } x = \frac{-5}{4} \text{ अथवा } x = 1$$

प्रश्न 19. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+7}$

हल: सूत्र षष्ठ-यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हों और पदों का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो तथा वाम पक्ष के हरों का योग दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

अतः यहाँ दोनों पक्षों के अंश समान हैं।

$$\text{वाम पक्ष के हरों का योग} = (x + 2) + x + 6 = 2x + 8$$

$$x + 1 + x + 7 = 2x + 8$$

$$\text{अतः } 2x + 8 = 0$$

$$\text{या } 2x = -8$$

$$\text{अतः } x = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{प्रश्न 20. } \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-8}$$

हल: दोनों पक्षों के अंश समान हैं। अतः

$$\text{वाम पक्ष के हरों का योग} = x - 4 + x - 6 = 2x - 10$$

$$\text{दक्षिण पक्ष के हरों का योग} = x - 2 + x - 8 = 2x - 10$$

$$\text{सूत्रानुसार } 2x - 10 = 0$$

$$\text{या } 2x = 10$$

$$\text{अतः } x = \frac{10}{2} = 5$$

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

बहुचयनात्मक

प्रश्न 1. 842 x 858 में सरलता से गुणनफल के लिए श्रेष्ठ सूत्र है।

(क) एकाधिकेन पूर्वेण

(ख) सूत्र निखिलम् आधार

(ग) एक न्यूनेन पूर्वेण

(घ) एकाधिकेन पूर्वेण तथा ऊर्ध्वतिर्यक

उत्तर: (घ) एकाधिकेन पूर्वेण तथा ऊर्ध्वतिर्यक

प्रश्न 2. 3564 की सामान्य संख्या है

(क) 2 4 3 6

(ख) 3 4 3 6

(ग) 3 4 4 6

(घ) 2 4 4 6

उत्तर: (क) 2 4 3 6

प्रश्न 3. 35 का मान है

(क) $3 \times \frac{4}{5} \times 5$

(ख) $4 \times \frac{3}{5} \times 5$

- (ग) $3 \times 3 \times 5 \times 5$
(घ) $3 \times 3/4 \times 4$

उत्तर: (क) $3 \times 4/5 \times 5$

प्रश्न 4. $17 + 7/7^2$ वर्ग है

- (क) 24 का
(ख) 19 का
(ग) 17 का
(घ) 15 को

उत्तर: (ग) 17 का

प्रश्न 5. 234 का द्वन्द्व योग है

- (क) $2 + 3 + 4$
(ख) $2 \times 2 \times 4 + 32$
(ग) $2 \times 3 \times 4$
(घ) $22 \times 2 \times 3 + 22$

उत्तर: (ख) $2 \times 2 \times 4 + 32$

प्रश्न 6. इष्ट संख्या विधि से 12 का वर्ग है

- (क) $(10 + 2)(10 - 2) + 2$
(ख) $(12 + 2)(12 - 2) + 22$
(ग) $(14 + 2)(14 - 2) + 22$
(घ) $(12 + 2)(12 + 2) + 2$

उत्तर: (ख) $(12 + 2)(12 - 2) + 22$

प्रश्न 7. विलोकनम् विधि द्वारा 42875 का घनमूल है

- (क) 45
(ख) 35
(ग) 25
(घ) 15

उत्तर: (ख) 35

प्रश्न 8. समीकरण $(x + 1)(x + 2) = (x - 3)(x - 4)$ में x का मान होगा-

- (क) शून्य
- (ख) - 1
- (ग) 1
- (घ) अनिश्चित

उत्तर: (ग) 1

प्रश्न 9. सूत्र 'शून्यं साम्य समुच्चये' द्वारा समीकरण $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-8}$ को हल करने पर x का मान आएगा

- (क) 10
- (ख) - 10
- (ग) 5
- (घ) - 5

उत्तर: (ग) 5

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. 688×612 को एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र द्वारा हल कीजिए।

हल: $688 \times 612 = 6 \times 7/88 \times 12 = 42/1056 = 421056$ उत्तर

प्रश्न 2. 95 का मान सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल: $95^2 = 9 \times 10/5 \times 5 = 9025$ उत्तर

प्रश्न 3. उपसूत्र यावदूनम द्वारा 32 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: $32^2 = 3(32 + 2)/2^2$
 $= 3 \times 34/4 = 1024$
आधार = 10, उपाधार = 10×3 , विचलन = + 2

प्रश्न 4. द्वन्द्व योग विधि द्वारा 27 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: 27 के खण्ड 2, 27 व 7 हैं अतः

$$27^2 = 2^2/2 \times 7 \times 2/7^2$$

$$= 4/28/49 = 729 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. इष्ट संख्या विधि द्वारा 39 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: $39 = (39 + 1)(39 - 1) + 1^2$ इष्ट संख्या = 1

$$= 40 \times 38 + 1 = 1521 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. समीकरण $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+5} = 0$ में x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: बीजीय सूत्र द्वारा $x = -\frac{20+6}{4+3} = \frac{26}{7}$ उत्तर

प्रश्न 7. समीकरण $12x + 3x = 4x + 5x$ को सरल कीजिए।

हल: x सर्वनिष्ठ है अतः $x = 0$

प्रश्न 8. समीकरण $3(x + 1) = 7(x + 1)$ को सरल कीजिए।

हल: $(x + 1)$ एक उभयनिष्ठ खण्ड है अतः $x + 1 = 0 \therefore x = -1$ उत्तर

प्रश्न 9. एकाधिकेन पूर्वेण विधि से 75 को वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: $75^2 = 7 \times 8/5 \times 5 = 5625$ उत्तर

प्रश्न 10. उपसूत्र आनुरूप्येण द्वारा 16 का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल: 16 के घनफल के खण्ड

I	II	III	IV
1^3	$1^2 \times 6$	1×6^2	6^3
	6	36	216
	+ 12	+ 72	
1	18	108	216

अतः $(16)^3 = 4096$

प्रश्न 11. सूत्र परावर्त्य योजयेत् द्वारा समीकरण $(x + 1)(x + 2) = (x - 3)(x - 4)$ को हल कीजिए।

हल: $a = 1, b = 2, c = -3, d = -4$

$$\begin{aligned}x &= \frac{cd - ab}{a + b - c - d} \\&= \frac{(-3)(-4) - (1)(2)}{1 + 2 - (-3) - (-4)} = \frac{12 - 2}{3 + 3 + 4} \\&= \frac{10}{10} = 1 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 12. सूत्र 'एकाधिकेन पूर्वेण' का प्रयोग करते हुए 588×512 का मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: $588 \times 512 = 5 \times 6 / 88 \times 12$
 $= 301056$ उत्तर

प्रश्न 13. हल कीजिए $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: वाम पक्ष के हरों का योग $= x - 1 + x - 4$
 $= 2x - 5$
दक्षिण पक्ष के हरों का योग $= x - 2 + x - 3$
 $= 2x - 3$
अतः सूत्रानुसार $2x - 3 = 0$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$ उत्तर

प्रश्न 14. हल कीजिये $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-9}$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: वाम पक्ष के हरों का योग $= x - 3 + x - 7 = 2x - 10$
दक्षिण पक्ष के हरों का योग $= 3 - 1 + x - 9 = 2 - 10$
सूत्रानुसार
 $2x - 10 = 0$
 $x = \frac{10}{2} = 5$ उत्तर

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. उपसूत्र आनुरूप्येण द्वारा 83 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r} 83^2 = 64 \quad 24 \quad 9 \\ \quad \quad \quad + 24 \\ \hline = 68 \quad 8 \quad 9 \end{array}$$

अतः $83^2 = 6889$ उत्तर

संकेत

1. उत्तर के लिए तीन खण्ड बनाइए।
2. प्रथम खण्ड में दहाई अंक का वर्ग = 64
3. तृतीय खण्ड में इकाई अंक का वर्ग = 9
4. मध्य खण्ड में दोनों अंकों का गुणनफल = $3 \times 8 = 24$
5. मध्य खण्ड में प्राप्त गुणनफल को फिर एक बार नीचे लिखिए।
6. योगफल ही संख्या का अभीष्ट वर्ग है। मध्य खण्ड और तृतीय खण्ड में एक-एक अंक ही लिखा जायेगा।

प्रश्न 2. उपसूत्र यावद्गुणनम द्वारा 225 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: $225^2 = 2(225 + 25)25^2$ आधार = 100
= $500/625$ उपाधार = 100×2
= 50625 उत्तर विचलन = +25

प्रश्न 3. इष्ट संख्या विधि द्वारा 247 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल: $247^2 = (247 + 3)(247 - 3) + 3^2$ इष्ट संख्या = 3
= $250 \times 244 + 9$
= $61000 + 9 = 61009$

प्रश्न 4. सूत्र निखलम् द्वारा 15, 98 का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल:

(i) घनफल = संख्या + (विचलन) $\times \frac{2}{3} \times$ (विचलन)² / (विचलन)³
 $15^3 = 15 + 2 \times 5 / 3 \times 5^2 / 5^3$
 $= 25 / 75 / 125 = 3375$

यहाँ (i) आधार = 10, विचलन = + 5

(ii) मध्य व तृतीय खण्ड में एक-एक अंक।

(ii) घनफल = संख्या + (विचलन) $\times \frac{2}{3} \times$ (विचलन)² / (विचलन)² जबकि विचलन = संख्या - आधार
अथवा उपाधार

$$\begin{aligned}(98)^3 &= 98 + (-02) \times \frac{2}{3} \times (-02) / (-02)^2 \\ &= 98 - \frac{4}{3} \times 4 / -08 \\ &= 94/12 / -08 \\ &= 94/11/100 - 08 \\ &= 941192 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

संकेत

1. आधार = 100, विचलन = -02
2. मध्ये व तृतीय खण्ड में दो-दो अंक
3. मध्य खण्ड का अंक 1 = आधार 100 तृतीय खण्ड में।

प्रश्न 5. उपसूत्र द्वारा 31 का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल:

खण्ड	I	II	III	IV
31^3	3^3	$3^2 \times 1$	3×1^2	1^3
	= 27	= 9	= 3	= 1
		+18	+6	
	= 27	= 27	= 9	= 1
	= 29791 उत्तर			

प्रश्न 6. समीकरण $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$ को सरल कीजिए।

हल: दोनों पक्षों में ऋणात्मक पदों का पक्षान्तरण करने पर

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

वाम पक्ष के हरों का योग = $x + 1 + x + 4 = 2x + 5$

दक्षिण पक्ष के हरों का योग = $x + 2 + x + 3 = 2x + 5$

सूत्रानुसार $2x + 5 = 0$

$\therefore x = \frac{-5}{2}$

या $x = -2\frac{1}{2}$ उत्तर

प्रश्न 7. समीकरण $\frac{2x+3}{2x+5} = \frac{2x+5}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल: दोनों पक्षों के अंशों का योग = $2x + 3 + 2x + 5$
 $= 4x + 8$
दोनों पक्षों के हरों का योग = $4x + 8$
दोनों समुच्चय समान हैं अतः सूत्रानुसार
 $4x + 8 = 0 \therefore x = -2$ उत्तर

प्रश्न 8. 'द्वन्द्व योग' विधि से 7225 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: वर्गमूल के अंक 2 लिखने पर

$$\begin{array}{r|l} 16 & 72 \quad 25 \\ & 8 \quad 2 \\ \hline & 8 \quad 5.2 \end{array}$$

अतः $\sqrt{7225} = 85$ उत्तर

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. द्वन्द्व योग विधि के द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या 389376 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 38 \quad 9376 \\ & 6 \quad 2511 \\ \hline & 6 \quad 24 \quad 00 \end{array}$$

संकेत-

1. दी गयी संख्या में तीन जोड़े हैं। अतः वर्गमूल में 3 अंक
2. प्रथम वर्गमूल अंक = 6
3. शेषफल = $38 - 6^2 = 2$ लिखा 9 से पूर्व
4. नया भाज्य = 29, संशोधित भाज्य भी = 29, भाजक = $6 \times 2 = 12$
5. $29 \div 12$, भागफल अंक = 2, लिखा नीचे 6 के आगे
6. शेषफल = 5, लिखा 9 व 3 के मध्य थोड़ा सा नीचे
7. नयी भाज्य संख्या = 53, संशोधित भाज्य = $53 - 22 = 49$
8. $49 \div 12$, भागफल अंक = 4, लिखा नीचे 2 के आगे
9. शेषफल = 1, लिखा 3 व 7 के मध्य थोड़ा-सा नीचे अब अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है क्योंकि वर्गमूल के तीन अंक आ चुके हैं।
10. नया भाज्य = 17, शेषफल = $17 - 2 \times 4 \times 2 = 1$ लिखा 7 व 6 के बीच
11. नया भाज्य = 16, अन्तिम शेषफल = $16 - 4^2 = 0$

∴ वर्गमूल = 624 उत्तर

प्रश्न 2. द्वन्द्व योग विधि से 41254929 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

	41	2	5	4	9	2	9
12		5	4	5	2	1	0
	6	4	23	0	0	0	

संकेत-

1. वर्गमूल में चार अंक
2. $41 - 6 = 5$ लिखा 2 से पूर्व
3. नया भाज्य = 52, संशोधित भाज्य भी = 52
4. $52 \div 12$ भागफल = 4, शेषफल = 4 लिखा 2 व 5 के मध्य
5. नया भाज्य = 45, संशोधित भाज्य = $45 - 4^2 = 29$
6. $29 \div 12$ भागफल = 2, शेषफल 5 लिखा 5 व 4 के मध्य
7. $38 \div 12$ भागफल = 3, शेषफल 2 लिखा 4 व 9 के मध्य
8. शेषफल $29 = 4 \times 3 \times 2 + 2^2 = 0$ लिखा 2 व 9 के मध्य (वर्गमूल के चार अंक प्राप्त हो चुके)
9. नया भाज्य 12 शेषफल $12 - 2 \times 3 \times 2 = 0$ लिखा 9 के पूर्व
10. नया भाज्य 9 अन्तिम शेषफल $09 - 3^2 = 0$

अतः वर्गमूल = 6423 उत्तर

प्रश्न 3. भाग विधि से पूर्णघन संख्या 849278123 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

↓ क्रिया पद	947	
	849278123	
-9^3	-729	
$-3 \times 9^3 \times 4$	1202	
	-972	
$-3 \times 9 \times 4^2$	2307	
	-432	
-4^3	18758	
	-64	
$-3 \times 94^2 \times 7$	186941	$343 - 7^3 = 0$
	-185556	
$-3 \times 94 \times 7^2$	13852	
	-13818	
-7^3	343	
	-343	
	x	

संकेत-

1. अन्तिम समूह $849 - 9^2 = 120$
2. घनमूल अंक 9 ऊपर लिखा। नया भाज्य = 1202
3. नये भाज्य में $3 \times 9^2 = 243$ का भाग दिया।
4. भागफल अंक = 4, ऊपर लिखा। $3 \times 9^2 \times 4$ घटाया। शेषफल = 230, नया भाज्य 2307
5. $2307 - 3 \times 9 \times 4^2 = 1875 =$ शेषफल
6. नया भाज्य $18758 - 43 = 18694$
7. 1 उतारा। नया भाज्य = 186941
8. $186941 \div 94^2$ अर्थात् 26508 का भाग 7 बार गया।
9. भागफल अंक = 7 ऊपर लिखा।
10. नये भाज्य 13852 में से $3 \times 94 \times 7^2$ घटाया। शेषफल = 34
11. पुनः नये भाज्य $343 - 7^3 = 0 \therefore$ घनमूल = 947