समरूपता

Ex 11.1

प्रश्न 1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए
(i) सभी वृत्त .... होते हैं।
(ii) सभी वर्ग .... होते हैं।
(iii) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं।
(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि
(a) .... (b) ....

हल: (i) समरूप
(ii) समरूप
(iii) समबाहु
(iv)
(a) उनके संगत कोण बराबर हों।
(b) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

प्रश्न 2. निम्न कथन में सत्य व असत्य बताइए

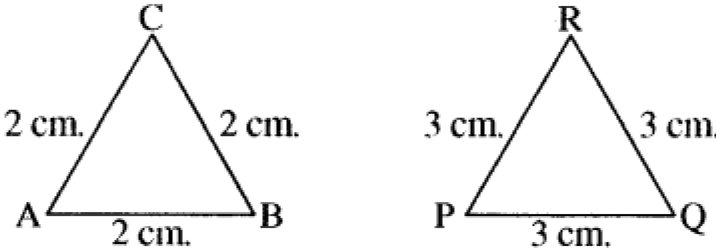
1. दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।
2. दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।
3. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।
4. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण बराबर हों।
5. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों।

हल:

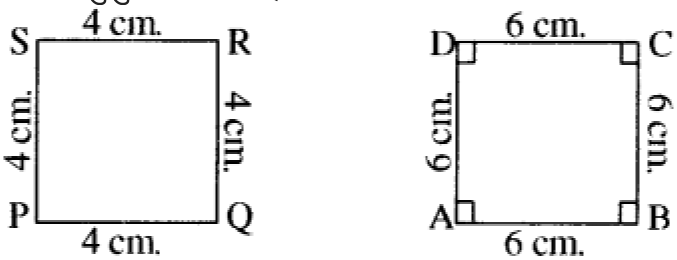
1. सत्य
2. असत्य
3. असत्य (क्योंकि केवल संगत भुजाओं का समानुपाती होना पर्याप्त नहीं है)
4. सत्य
5. असत्य।

प्रश्न 3. समरूप आकृतियों के कोई दो उदाहरण आकृति बनाकर दीजिए।

हल: दोनों त्रिभुज समरूप हैं, क्योंकि उनके संगत कोण बराबर हैं। तथा संगत भुजायें समानुपाती हैं।<



1. दोनों चतुर्भुज समरूप हैं क्योंकि उनके संगत कोण बराबर हैं तथा संगत भुजायें समानुपाती हैं।<



Ex 11.2

प्रश्न 1. △ABC की भुजाएँ AB व AC पर क्रमशः D व E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि DE || BC हो तो

(i) यदि AD = 6 सेमी., DB = 9 सेमी. और AE = 8 सेमी. हो तो || AC का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{13}$ और AC = 20.4 सेमी. हो तो EC का मान ज्ञात कीजिए।

(iii) $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{4}$ और AE = 6.3 सेमी. हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि AD = 4x – 3, AE = 8x – 7, BD = 3 – 1 और CE = 5x – 3 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: (i) △AIBC में DE || BC दिया गया है अतः

$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से)

या $\frac{6}{9} = \frac{8}{EC}$

∴ EC = 9 × 8 = 3 × 4 = 12 सेमी.

∴ AC = AE + EC

= 8 + 12

= 20 सेमी.

(ii) △ABC में DE || BC दिया गया है अतः

$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC-AE}}$

या, $\frac{4}{13} = \frac{AE}{20.4-AE}$

या, 13AE= 4 (20.4 – AE):

या, 13AE = 4 × 20.4 – 4AE

या, 13AE + 4 AE = 4 × 20.4

या, 17AE= 4 × 20.4

∴ $AE = \frac{4 \times 20.4}{17}$ = 4 × 1.2 = 4.8 सेमी.
∴ AE = 4.8 सेमी.
∴ EC = AC – AE
= 20.4 – 4.8 = 15.6 सेमी.

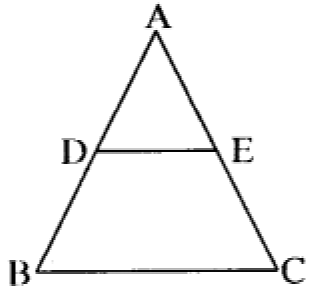
(iii) AABC में DE || BC दिया गया है अतः
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
या $\frac{7}{4} = \frac{6.3}{EC}$
17EC = 4 × 6.3
∴ $EC = \frac{4 \times 6.3}{7}$ = 4 × 9 = 3.6 सेमी.
∵ AC = AE + EC = 6.3 + 3.6 = 9.9 सेमी. उत्तर

(iv) AABC में DE || BC दिया गया है अतः
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से)
प्रश्नानुसार $\frac{4x-3}{3x-1} = \frac{8x-7}{5x-3}$
या (4 – 3) (5x – 3) = (3x – 1) (8Y – 7)
या 20 – 15 – 12x + 9 = 24 – 8x – 21 + 7
या 24 – 20 – 29x + 27x + 7 – 9 = 0
या 4 – 2x – 2 = 0
या 4 – 4x + 2 – 2 = 0
4x (x – 1) + 2 (x – 1) = 0
(x – 1) (4x + 2) = 0
∴ या तो x – 1 = 0
∴ x = 1
या 4x + 2 = 0
4x = – 2
$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
∴ $x = -\frac{1}{2}$

प्रश्न 2. △ABC की भुजाएँ AB एवं AC पर क्रमशः D व E दो बिन्दु स्थित हैं, निम्न प्रश्नों में दिये गये मानों के माध्यम से DE || BC होने एवं नहीं होने की जानकारी दीजिए।
(i) AB = 12 सेमी., AD = 8 सेमी., AE = 12 सेमी. और AC = 18 सेमी.
(ii) AB = 5.6 सेमी., AD = 1.4 सेमी., AC = 9.0 सेमी. तथा AE = 1.8 सेमी.
(iii) AD = 10.5 सेमी., BD = 4.5 सेमी., AC = 4.8 सेमी. तथा AE = 2.8 सेमी.
(iv) AD = 5.7 सेमी., BD = 9.5 सेमी., AE = 3.3 सेमी. तथा EC = 5.5 सेमी.

हल: (i) दिया है कि AABC की भुजाओं AB एवं AC पर क्रमश: D व E दो बिन्दु स्थित हैं अतः
AB = 12 सेमी., AD = 8 सेमी., AE = 12 सेमी. और AC = 18 सेमी.

हम जानते हैं कि
$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)



∵ BD="AB – AD = 12 – 8 = 4 सेमी.
तथा EC = AC – AE = 18 – 12 = 6 सेमी.
∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{8}{4} = 2$ सेमी. ....(1)
तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{12}{6} = 2$ सेमी. ....(2)
(1) व (2) से $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$
DE || BC
(आधारभूत आनुपातिको प्रमेय के विलोम से)

(ii) AB = 5.6 सेमी., AD = 1.4 सेमी., AC = 9.0 सेमी. तथा AE = 1.8 सेमी.
∵ BD = AB – AD = 5.6 – 1.4 = 4.2 सेमी.
तथा EC = AC – AE = 9.0 – 1.8 = 7.2 सेमी.
∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ सेमी. .....(3)
तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{7.2} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$ सेमी. .....(4)
∴ (3) व (4) से
$$\frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{EC}$$
∴ DE, BC के समान्तर नहीं है।

(iii) AD = 10.5 सेमी., BD = 4.5 सेमी., AC = 4.8 सेमी. तथा AE = 2.8 सेमी.
यहाँ EC = AC – AE = 4.8 – 2.8 = 2 सेमी.
अब $\frac{AD}{BD} = \frac{10.5}{4.5} = \frac{105}{45} = \frac{7}{3}$ सेमी. .....(5)
तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{2.8}{2} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$ सेमी. .....(6)
समीकरण (5) व (6) से
$$\frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{EC}$$
∴ DE, BC के समान्तर नहीं है।

(iv) AD = 5.7 सेमी., BD = 9.5 सेमी., AE = 3.3 सेमी., EC = 5.5 सेमी.

$\because \quad \frac{AD}{BD} = \frac{5.7}{9.5} = \frac{3}{5}$ सेमी. .....(7)

तथा $\quad \frac{AE}{EC} = \frac{3.3}{5.5} = \frac{3}{5}$ सेमी. .....(8)

समीकरण (7) व (8) से

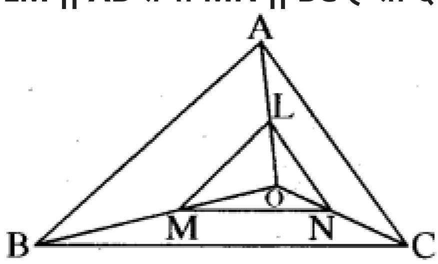
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से

⇒ DE || BC

⇒ DE भुजा BC के समान्तर है।

प्रश्न 3. दी गई आकृति में OA, OB और 0C पर क्रमशः L, M एवं N बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि LM || AB तथा MN || BC है तो दर्शाइए LN ॥ AC है।



हल: दिया है-

ΔABC में बिन्दु L, M एवं N क्रमशः OA, OB तथा OC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित हैं कि LM || AB तथा MN || BC.

सिद्ध करना है-

LN || AC

उपपत्ति-

ΔOAB में LM || AB (दिया है)

$\therefore \quad \frac{OL}{AL} = \frac{OM}{BM}$ (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से) .....(i)

पुनः ΔOBC में MN ॥ BC (दिया है)

$\therefore \quad \frac{OM}{BM} = \frac{ON}{CN}$ (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से) .....(ii)

(i) व (ii) से $\quad \frac{ON}{CN} = \frac{OL}{AL}$

∴ आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से

ΔOAC में LN ॥ AC है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. △ABC में AB व AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि BD = CE है। यदि ZB =∠C हो तो दर्शाइए DE || BC।

हल: △ABC में दिया है कि ∠B = ∠C

⇒ AC = AB

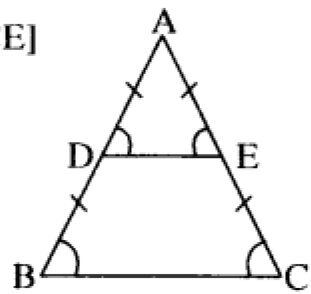
[∵ समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ भी समान होती हैं।]

⇒ AE + EC = AD + BC

⇒ AE + CE = AD + BD

⇒ AE + CE = AD + CE [∵ BD = CE]

⇒ AE = AD



अत: AD = AE तथा BD = CE

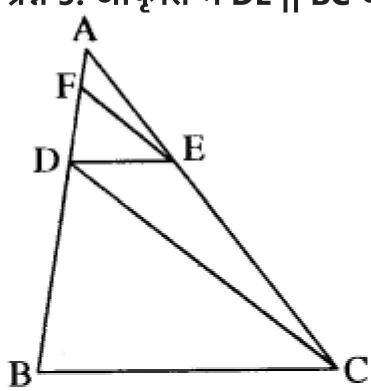
∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

⇒ $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

⇒ DE ∥ BC [आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय के विलोम से]

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 5. आकृति में DE || BC और CD || EF हो तो सिद्ध कीजिए AD^2 = AB × AF



हल: ΔABC में दिया है कि DE || BC हैं।

∴ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ .....(i)

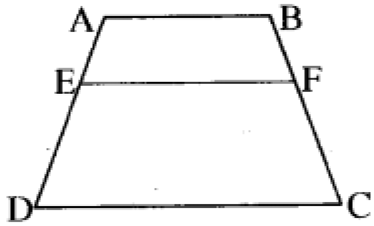
ΔADC में दिया है कि FE ∥ DC है।

∴ $\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AE}$ .....(ii)

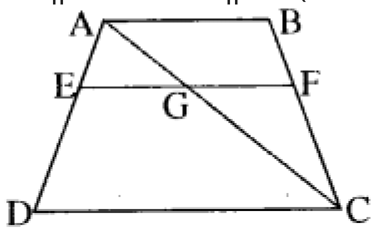
(i) व (ii) से $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}$

⇒ $AD^2 = AB \times AF$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. आकृति में यदि EF || DC || AB हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



हल: A और C को मिलाएँ जो EF को G पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति)।
AB || DC और EF || AB (दिया है)



इसलिए EF || DC (एक ही रेखा के समान्तर रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं) अब ΔADC में,
EG || DC (PTF EF || DC)
अतः $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (प्रमेय 6.1 के अनुसार) ....(i)
इसीप्रकार ΔCAB में

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

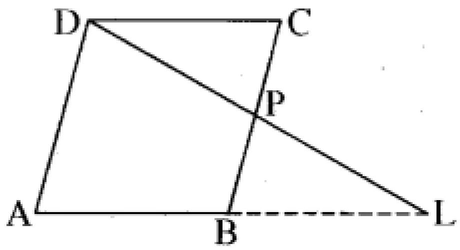
अर्थात् $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad .....(ii)$$

अत: (i) और (ii) से,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. ABCD पर समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी भुजा BC पर कोई बिन्दु P स्थित है। यदि DP एवं AB को आगे बढ़ाएँ तो वे L पर मिलते हैं। तो सिद्ध कीजिए
(i) $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$
(ii) $\frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$

हल: दिया है-
एक समान्तर चतुर्भुज ABCD है जिसकी भुजा BC पर बिन्दु P इस प्रकार है कि बढ़ी हुई DP भुजा AB को बिन्दु L पर काटती है।
सिद्ध करना है-
(i) $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$
(ii) $\frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$



उपपत्ति-

(i) स्पष्ट है कि AALD) में BP || AD है।

अतः आधारभूत Aअनुपातिकता प्रमेय से

$$\frac{BL}{AB} = \frac{PL}{DP}$$

$\Rightarrow \quad \frac{BL}{DC} = \frac{PL}{DP}$

[∵ ABCD एक ||gm है। अत: AB = DC]

$\Rightarrow \quad \frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$ [दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लेने पर]

(ii) हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$ [(i) से]

$\Rightarrow \quad \frac{PL}{DP} = \frac{BL}{DC}$ [दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लेने पर]

$\Rightarrow \quad \frac{PL}{DP} = \frac{BL}{AB}$ [∵ DC = AB]

$\Rightarrow \quad \frac{PL}{DP} + 1 = \frac{BL}{AB} + 1$ [दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर]

$\Rightarrow \quad \frac{PL + DP}{DP} = \frac{BL + AB}{AB}$

$\Rightarrow \quad \frac{DL}{DP} = \frac{AL}{AB}$

$\Rightarrow \quad \frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$ [∵ AB = DC] (**इतिसिद्धम्**)

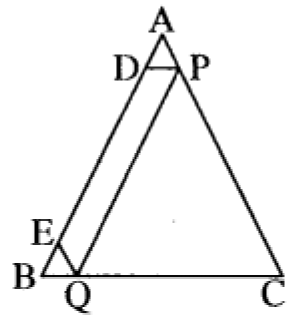
प्रश्न 8. AABC की भुजी AB पर D और E दो ऐसे बिन्दु स्थित हैं कि AD = BE हो। यदि DP || BC तथा EQ || AC हो तो सिद्ध कीजिए PQ || AB।

हल: ΔABC में दिया है कि DP || BC और EQ || AC

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PC}$ तथा $\frac{BE}{EA} = \frac{BQ}{QC}$

$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PC}$ और $\frac{AD}{DB} = \frac{BQ}{QC}$

$\begin{bmatrix} EA = ED + DA = ED + BE = BD \\ \therefore AD = BE \end{bmatrix}$

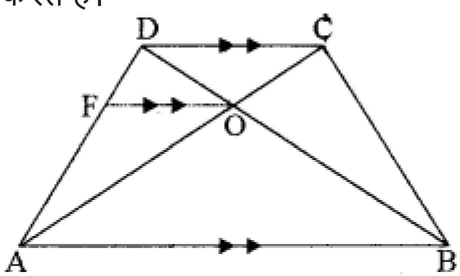


$\Rightarrow \quad \frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC}$

= बिन्दु P और Q त्रिभुज ABC की भुजाओं CA और CB को एक ही अनुपात में विभाजित करते हैं।
⇒ PO || AB.

प्रश्न 9. ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी AB || DC है तथा इसके विकर्ण o पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

हल: दिया है-
ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB || DC है। विकर्ण AC तथा BD परस्पर बिन्दु 0 पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है-
$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$
रचना-
O में से FO || DC || AB खींचिए।
उपपत्ति-

अब ΔDAB में,

$$FO \parallel AB \quad \text{(रचना से)}$$

$$\therefore \quad \frac{DF}{FA} = \frac{DO}{OB} \quad .....(i)$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से]

पुन: ΔDCA में,

$$FO \parallel DC \quad \text{(रचना से)}$$

$$\frac{DF}{FA} = \frac{CO}{OA} \quad .....(ii)$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से]

(i) और (ii) से,

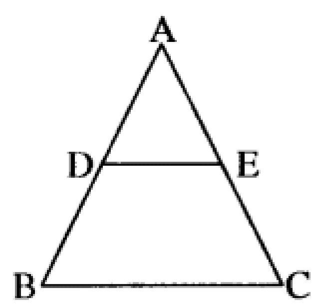
$$\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$$

या

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad \text{(इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 10. यदि D और E क्रमशः AB और AC, त्रिभुज ABC की भुजाओं पर स्थित ऐसे बिन्दु हैं कि BD = CE हो तो सिद्ध कीजिए AABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल: त्रिभुज ABC में,



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB}+1 = \frac{AE}{CE}+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+CE}{CE}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BD} \quad (\because BD = CE)$$

$$\Rightarrow \quad AB = AC$$

अत: त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु है।

Ex 11.3

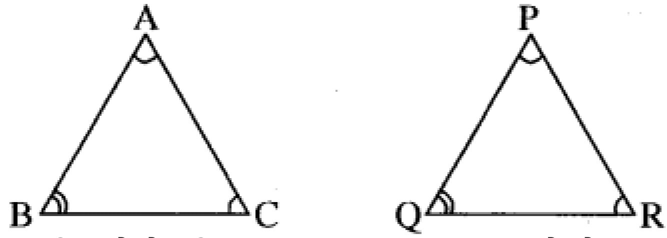
प्रश्न 1. दो त्रिभुज ABC और PQR में 28 और BF दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होना चाहिए, ताकि ये दोनों A समरूप हो सकें। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

हल: दिए गए दोनों त्रिभुजों ∆ABC तथा ∆PQR में यह दिया गया है कि

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

या

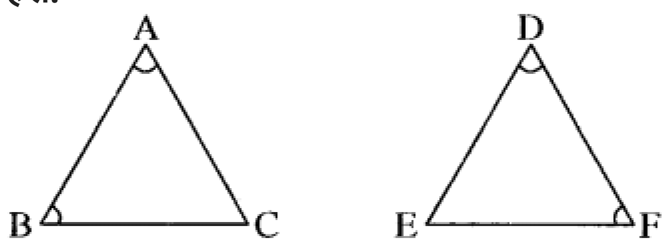
$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$



इन त्रिभुजों में यदि ∠A = ∠P तथा ∠C =∠R हो तो ∠B = ∠Q स्वतः ही हो जायेंगे तो दो त्रिभुज समान कोणिक हो जायेंगे तथा ये दोनों ∆ABC व ∆POR समरूप हो जायेंगे।

प्रश्न 2. त्रिभुजों ABC एवं DEF में, 2A =∠D, ∠B = ∠F हो तो क्या ∆ABC ~ ∆DEF है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल:



चित्र के अनुसार ∆ABC ~ ∆DEF नहीं है क्योंकि दिए गए कोणों के क्रम में ∠A = ∠D तो ठीक है लेकिन ∠B ≠ ∠F अतः दिए गए कोणों के क्रम के अनुसार ∆ABC ~ ∆DFE होना चाहिए।

प्रश्न 3. यदि ∆ABC ~ ∆FDE हो तो क्या जा सकता है ? उत्तर को कारण सहित लिखिए।

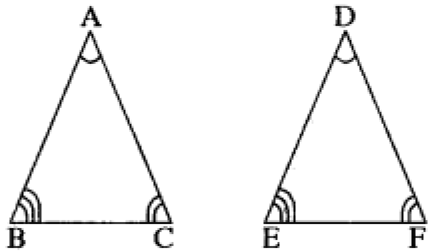
हल: प्रश्न में दिया गया है कि ∆ABC ~ ∆FDE लेकिन इसके आधार पर $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ नहीं लिखा जा सकता है। दिए गए अनुसार वास्तव में शीर्षों के क्रम में यह अनुपात $\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EF}$ होना चाहिए।

प्रश्न 4. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के क्रमशः समानुपाती एवं बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? कारण सहित उत्तरे लिखिए।

हल: प्रश्न में दिया गया कथन सत्य नहीं है क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएँ और उनके अन्तर्गत बने कोण समान होने पर ही दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।

प्रश्न 5. समानकोणिक त्रिभुजों से क्या तात्पर्य है? इनमें परस्पर क्या सम्बन्ध हो सकता है?

हल: यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों तो वे दोनों त्रिभुज समानकोणिक त्रिभुज कहलाते हैं।



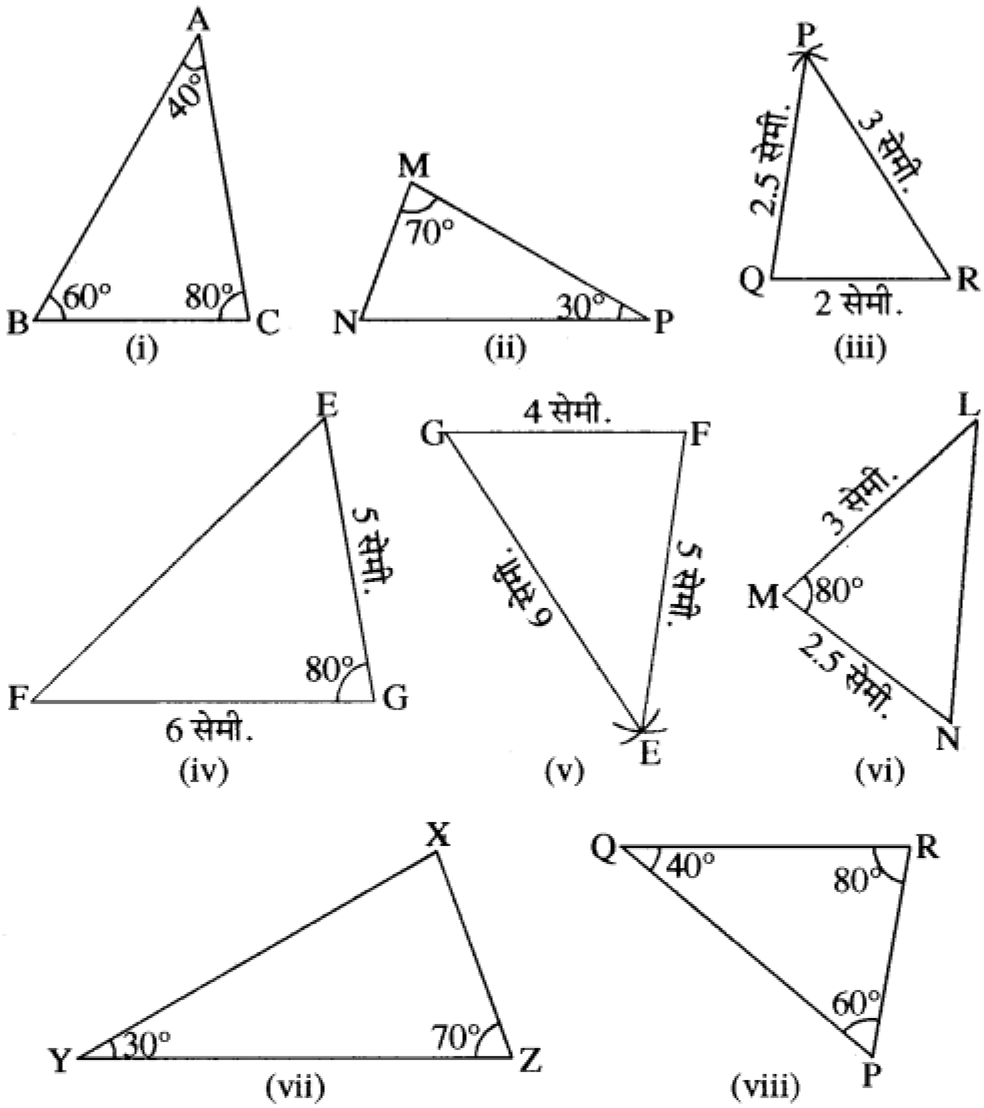
ΔABC व ΔDEF में,

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$$

तथा $\angle C = \angle F$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$

प्रश्न 6. निम्न दिए गए त्रिभुजों की आकृतियों में से समरूप त्रिभुज युग्मों का चयन कीजिए और उन्हें समरूप होने की सांकेतिक भाषा में लिखिए।



हल:

(a) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (i) व (viii) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ लिखा जा सकता है क्योंकि यहाँ

$$\angle A = \angle Q = 40^\circ$$
$$\angle B = \angle P = 60^\circ$$
$$\angle C = \angle R = 80^\circ$$
$$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta QPR$$

(b) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (ii) व (vii) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta MPN \sim \Delta ZYX$ लिखा जा सकता है क्योंकि यहाँ

$$\angle M = \angle Z = 70^\circ$$
$$\angle P = \angle Y = 30^\circ$$
$$\therefore \quad \Delta MPN \sim \Delta ZYX$$

(c) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (iii) व (v) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में $\Delta PQR \sim \Delta EFG$ लिखा जा सकता है क्योंकि

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{2.5}{5.0} = \frac{1}{2}, \frac{QR}{GF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

तथा $$\frac{PR}{GE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अतः $$\frac{PQ}{EF} = \frac{QR}{GF} = \frac{PR}{GE}$$

$\therefore$ ΔPQR व ΔEFG समरूप हैं।

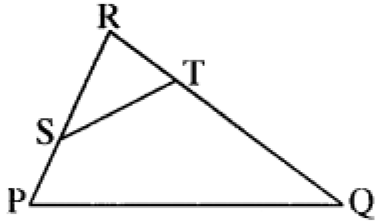
(d) दी गई आकृतियों में से समरूप त्रिभुज (iv) व (vi) हैं तथा इन्हें सांकेतिक भाषा में

$$\Delta MLN \sim \Delta EFG$$

लिखा जा सकता है। क्योंकि

$$\angle E = \angle M = 80^\circ$$
$$\frac{ML}{EF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{MN}{EG} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{ML}{EF} = \frac{MN}{EG}$$
$$\therefore \quad \Delta MLN \sim \Delta EFG$$

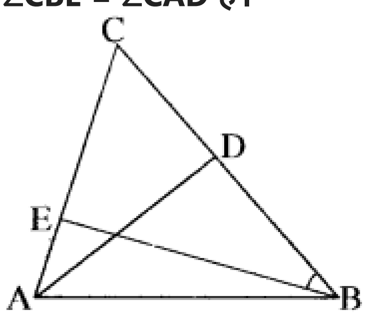
प्रश्न 7. आकृति में ∆PRQ ~ ∆TRS हो तो बताइए इस समरूप त्रिभुज युग्म में कौन-कौनसे कोण परस्पर समान होने चाहिए?



हल: प्रश्न में दिए अनुसार ∆PQR ~ ∆TRS है। इन दोनों समरूप त्रिभुजों में ∠RPQ = ∠RTS तथा ∠RQP = ∠RST होने चाहिए।

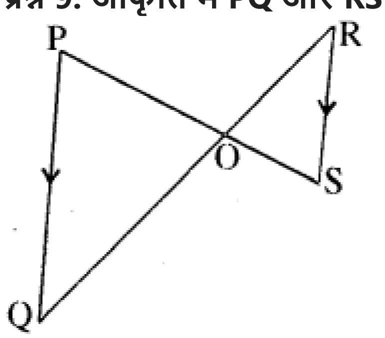
∠R = ∠R	(उभयनिष्ठ कोण)
∠P = ∠T	संगत कोण
∠Q = ∠S	संगत कोण

प्रश्न 8. आपको आकृति में स्थित उन दो त्रिभुजों का चयन करना है जो परस्पर समरूप हैं। यदि ∠CBE = ∠CAD है।



हल: प्रश्न में दी गई शर्त के अनुसार,
∵ ∠CBE = ∠CAD
∴ वे ऐसे समरूप त्रिभुज ADC तथा त्रिभुज BEC होंगे अर्थात्
∆ADC ~ ∆BEC.

प्रश्न 9. आकृति में PQ और RS समान्तर हैं, तो सिद्ध कीजिए ∆POQ ~ ∆SORI



(माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

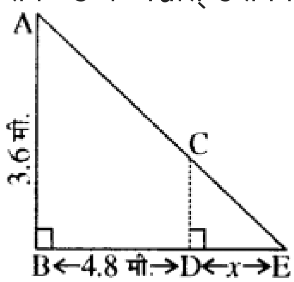
हल:

	PQ ∥ RS	(दिया है)
अत:	$\angle P = \angle S$	(एकान्तर कोण)
और	$\angle Q = \angle R$	(एकान्तर कोण)
साथ ही	$\angle POQ = \angle SOR$	(शीर्षाभिमुख कोण)
इसलिये	$\Delta POQ \sim \Delta SOR$	(AAA समरूपता कसौटी)

(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्भे के आधार से परे 1.2 मीटर/सेकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सेकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?

हल: माना AB एक बल्ब लगा खम्भा है। तथा एक लड़की है जो 1.2 मी./से. की चाल से चल रही है तथा 4 सेकण्ड के पश्चात् उसकी स्थिति CD पर है तथा DE उसकी छाया है।



माना

DE = x मीटर

BD = 1.2 मीटर x 4

4.8 मीटर

अब ΔABE तथा ΔCDE में,

$\angle B = \angle D = 90°$

[क्योंकि खम्भा व लड़की दोनों जमीन पर ऊर्ध्वाधर हैं ।] $\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण)

इसलिये AA समरूपता से

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

अतएव $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

$\Rightarrow \quad \frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left[\because 90 \text{ सेमी.} = \frac{90}{100} \text{ मीटर} = 0.9 \text{ मीटर}\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{4.8+x}{x} = \frac{4}{1}$

$\Rightarrow \quad 4.8 + x = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x - x = 4.8$

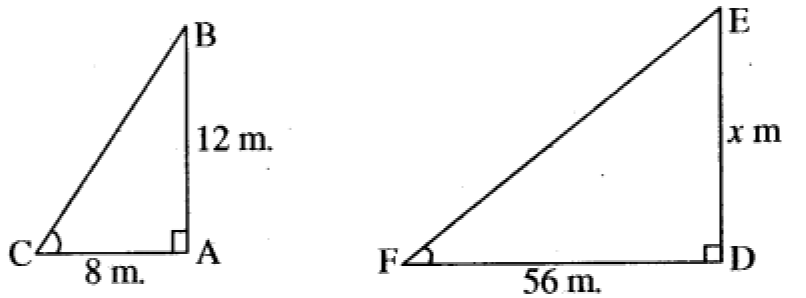
$\Rightarrow \quad 3x = 4.8$

$\therefore \quad x = \frac{4.8}{3} = 1.6$ मीटर

∴ 4 सेकण्ड के बाद लड़की की छाया 1.6 मीटर होगी।

प्रश्न 11. 12 मीटर लम्बाई वाली ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 8 मीटर है, उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: पहले चित्रानुसार माना AB एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ है तथा AC उसकी परछाईं है। पुनः दूसरे चित्रानुसार DE एक मीनार है और DF उसकी परछाईं है।



प्रश्नानुसार AB = 12 m., AC = 8 m तथा DF = 40 m

माना DE = x m., अब ΔABC और ΔDEF में

$\angle A = \angle D = 90°$ तथा $\angle C = \angle F$ (उन्नयन कोण सूर्य का)

अतः समरूपता की AA कसौटी से

$\Rightarrow \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

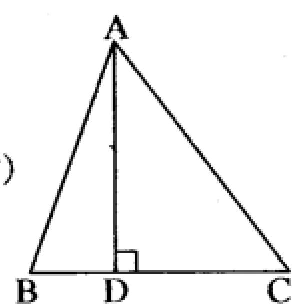
$\Rightarrow \quad \frac{12}{x} = \frac{8}{56} \quad \Rightarrow x = \frac{12 \times 56}{8}$

$\therefore \quad x = 84 \text{ m}$

अतः मीनार की ऊँचाई 84 m है।

प्रश्न 12. किसी ΔABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा BD पर लम्ब डालने पर $AD^2 = BD \times DC$ प्राप्त होता है, तो सिद्ध कीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल: त्रिभुज BDA तथा ΔADC में



$\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$

$\Rightarrow \quad AD^2 = BD \times DC$ (दिया है)

तथा $\quad \angle BDA = \angle ADC$

(प्रत्येक कोण समकोण)

अतः समरूपता की SAS कसौटी से

$\Delta BDA \sim \Delta ADC$

$\Rightarrow \quad \angle ABD = \angle CAD$ और $\angle BAD = \angle ACD$

$\Rightarrow \quad \angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle BAD$

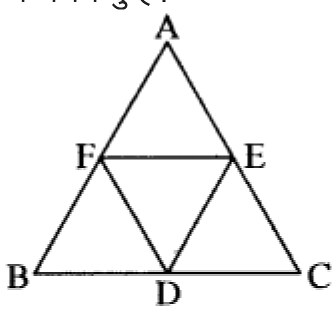
$\Rightarrow \quad \angle B + \angle C = \angle A$

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 2\angle A$ (दोनों पक्षों में $\angle A$ जोड़ने पर)

⇒ 2∠A = 180°
⇒ ∠A = 90°
⇒ ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। (इतिसिद्धम्)

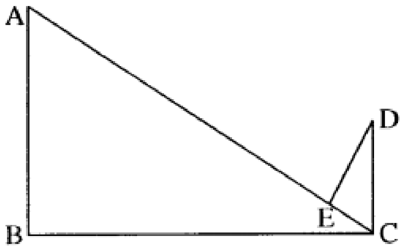
प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर बनने वाले चारों त्रिभुज अपने मूल त्रिभुज के समरूप होते ।

हल: दिया है–
एक ΔABC है जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। DE, EF और FD को मिलाने पर हमें निम्न चार त्रिभुज प्राप्त होते हैं|
ΔAFE, ΔFED, ΔEDC तथा ΔDEF
उपपत्ति-
हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की। दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसकी आधी होती है। स्पष्ट है कि AABC में E और F क्रमशः भुजाओं। AC और AB के मध्य-बिन्दु हैं।



∴ FE || BC
⇒ ∠AFE =∠B (संगत कोण)
अतः ΔAFE और ΔABC में
∠AFE = ∠B
तथा∠A =∠A
∴ ΔAFE ~ ΔABC (समरूपता की AA कसौटी से)
इसी प्रकार चूँकि DE || AB और DF || CA है। अतः ΔEDC ~ ΔABC और ΔFBD ~ ΔABC होगा। अब हमें यह सिद्ध करना है कि ΔDEF भी ΔABC के समरूप होगा। चूँकि E और F क्रमशः भुजाओं AC और AB के मध्य बिन्दु हैं।
∴ $FE = \frac{1}{2}BC$
इसी प्रकार DE = $\frac{1}{2}$ AB तथा DF = $\frac{1}{2}$ AC
अतः $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$
⇒ ΔDEF और ΔABC की भुजाएँ समानुपाती हैं।
⇒ ΔDEF ~ ΔABC
अतः ΔAFE, ΔFBD, ΔEDC और ΔDEF प्रत्येक ΔABC के समरूप है। (इतिसिद्धम्)

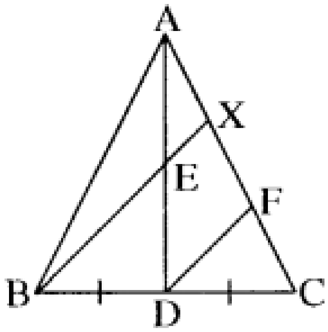
प्रश्न 14. आकृति दर्शाए अनुसार यदि AB ⊥ BC, DC ⊥ BC और DE ⊥ AC हो तो सिद्ध कीजिए ΔCED ~ ΔABC



हल: दिया है
AB ⊥ BC
DC ⊥ BC एवं
DE ⊥ AC
सिद्ध करना है-
ΔCED ~ ΔABC.
उपपत्ति-
ΔABC में
∠BAC +∠BCA = 90° ....(1)
∠BCA + ∠ECD = 90° ....(2) (DC ⊥ BC)
समीकरण (1) व (2) से,
∠BAC = ∠ECD ....(3)
ΔCED व ΔABC में
∠CED = ∠ABC (प्रत्येक 90°)
∠ECD = ∠BAC (समीकरण 3 से)
∴ ΔCED ~ ΔABC (कोण-कोण सर्वांगसमता से)

प्रश्न 15. ΔABC की भुजा BC के मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए $\frac{EX}{BE} = \frac{1}{2}$ है।

हल: दिया है-
बिन्दु D, BC का मध्य बिन्दु है तथा E, AD का मध्य बिन्दु है।



सिद्ध करना है-
$\frac{EX}{BE} = \frac{1}{3}$
रचना-
बिन्दु D से, DF || BX.
उपपत्ति-
ΔAEX एवं ΔADF में,
∠EAX = ∠DAF (उभयनिष्ठ)
∠AXE = ∠AFD (सम्पूरक कोण)

$\therefore \quad \Delta AEX \sim \Delta ADF$ (कोण-कोण सर्वांगसमता)

$$\frac{EX}{DF} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{EX}{DF} = \frac{AE}{2AE} \Rightarrow 2EX = DF \quad .....(1)$$

इसी प्रकार, $\Delta CDF \sim \Delta CBX$ (कोण-कोण सर्वांगसमता)

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DF}{BX}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{DF}{BE+EX}$$

$\Rightarrow \quad BE + EX = 2DF$

$\Rightarrow \quad BE + EX = 2\,(2\,EX)$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow \quad BE + EX = 4EX$

$\Rightarrow \quad BE = 3EX$

$\therefore \quad \frac{EX}{BE} = \frac{1}{3}$ **इतिसिद्धम्**

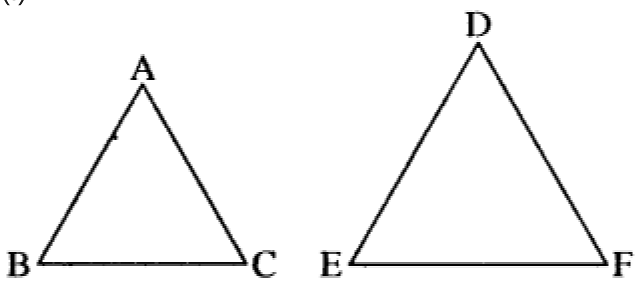
Ex 11.4

प्रश्न 1. निम्न के उत्तर सत्य एवं असत्य में देना है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए (यदि सम्भव हो)

(i) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं को अनुपात 4 : 9 है तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है।
(ii) दो त्रिभजों क्रमशः ABC व DEF में यदि
$\frac{\Delta ABC \text{ के क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ के क्षेत्रफल}} =$
$\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{9}{4}$ है तो ΔABC = ADEF होगा।
(iii) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।
(iv) ΔABC एवं ΔAXY समरूप हों और उनके क्षेत्रफलों का मान समान हो तो XY एवं BC सम्पाती भुजाएँ हो सकती हैं।

हल:

(i)



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \quad \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\therefore \quad \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

दिया गया कथन असत्य है। **उत्तर**

(ii) $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

संगत भुजाओं का अनुपात 3 : 2 है जबकि सर्वांगसमता के लिये यह अनुपात 1: 1 होता है।

अतः कथन असत्य है।

(iii) यह दिया गया कथन भी असत्य है क्योंकि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के समानुपाती नहीं अपितु बराबर होता है।

(iv) $\Delta ABC \sim \Delta AXY$ समरूप है।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta AXY \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{(BC)^2}{(XY)^2} = \frac{(AC)^2}{(AY)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{(BC)^2}{(XY)^2} = \frac{(AC)^2}{(AY)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(AB)^2}{(AX)^2} = \frac{1}{1} \text{ या } \frac{AB}{AX} = \frac{1}{1}$$

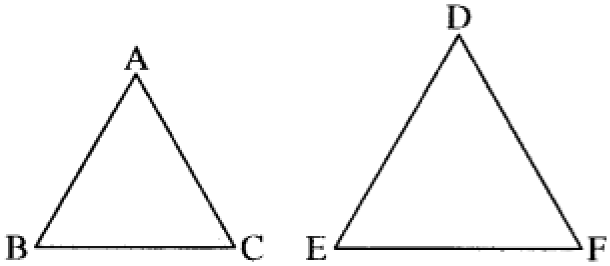
या $\quad AB = AX$

इसी प्रकार BC = XY और AC = AY

अतः कथन सत्य है।

प्रश्न 2. यदि ΔABC ~ ΔDEF और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. हैं यदि EF = 15.4 सेमी. हो तो BC ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC ~ ΔDEE, ΔABC का क्षेत्रफल = 64 cm और ADEF का क्षेत्रफल = 121 cm^2 और EF = 15.4 cm^2 है।



ΔABC ~ ΔDEF

$$\therefore \quad \frac{ar\,(\Delta ABC)}{ar\,(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

[∵ हम जानते हैं कि यदि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।]

या, $$\frac{64}{121} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

या, $$\left(\frac{8}{11}\right)^2 = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

या, $$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

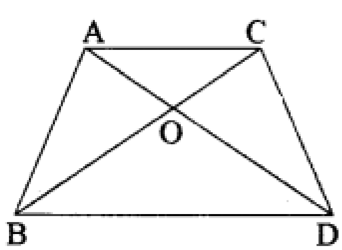
$$\therefore \quad BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$BC = 8 \times 1.4$$

$$BC = 11.2 \text{ cm.}$$

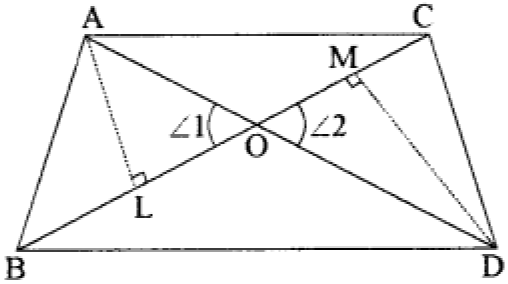
प्रश्न 3. एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं। यदि AD व BC परस्पर O पर प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$$



हल: दिया है-

ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर स्थित बने हुए दो त्रिभुज हैं। AD, BC को 0 पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है-

$\frac{ar(\text{ABC})}{ar(\text{DBC})} = \frac{\text{AO}}{\text{DO}}$

रचना-

AL ⊥ BC, DM ⊥ BC खींचिए।

उपपत्ति-

ΔALO और ΔDMO में,

$\angle 1 = \angle 2$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle L = \angle M$ (प्रत्येक $90°$)

∴ $\Delta ALO \sim \Delta DMO$ [AA समरूपता कसौटी]

∴ $\frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO}$ .... (i)

[∵ यदि दो त्रिभुज सपरूप हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।]

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times BC \times DM}$$

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AL}{DM}$$

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO} \quad \left[\because \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO}\right]$$

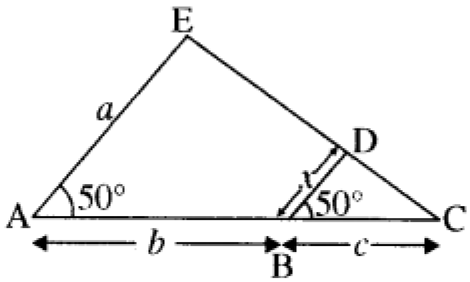
(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. निम्न प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए

(i) ΔABC में DE || BC एवं AD: DB = 2: 3 हो तो ΔADE एवं ΔABC के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

(ii) रेखाखण्ड AB के बिन्दु A व B पर PB और QA लम्ब है। यदि P व Q, AB के दोनों ओर स्थित हों और P व Q को मिलाने पर वह AB को O पर प्रतिच्छेद करे तथा PO= 5 सेमी., QO = 7 सेमी., ΔPOB का क्षेत्रफल 150 सेमी. हो तो ΔQOA का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(iii) आकृति में x का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए।

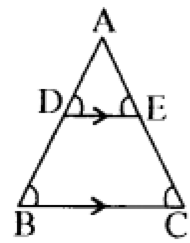


हल:

हल—(i) ΔABC में

$$BC \parallel DE \text{ तथा}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \text{ (दिया है)}$$



ΔABC व ΔDEA में

$$\angle B = \angle D$$

$$\angle C = \angle E$$

A–A समरूपता कसौटी से

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \text{ दिया है}$$

$$\therefore \quad \frac{DB}{AD} = \frac{3}{2}$$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{DB + AD}{AD} = \frac{3+2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AD} = \frac{5}{2} \quad \quad ....(1)$$

इसलिये

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

[त्रिभुज समरूप हो तो उन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनकी भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है ।]

$$\frac{ar(\triangle ADE)}{ar(\triangle ABC)} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$\therefore \quad ar(\Delta ADE) : ar(\Delta ABC)$

$= 4 : 25$ उत्तर

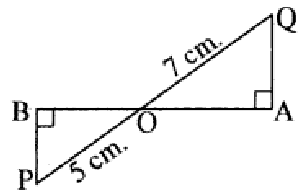
(ii) ΔQAO और ΔPBO में

$\angle QAO = \angle PBO = 90°$

तथा $\angle QOA = \angle POB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: समरूपता की कसौटी से

$\Delta QAO \sim \Delta PBO$



$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta QAO)}{ar(\Delta PBO)} = \frac{QO^2}{PO^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta QAO)}{150} = \frac{7^2}{5^2}$$

$$\Rightarrow ar(\Delta QAO) = \frac{150 \times 49}{25} = 294$$ वर्ग सेमी. उत्तर

(iii) ΔCBD व ΔCAE में

$\angle CBD = \angle CAE = 50°$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

अत: समरूपता की AA कसौटी से

$\Delta CBD \sim \Delta CAE$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AE}$$

(समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$$\Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ac}{b+c}$$ उत्तर

प्रश्न 5. ΔABC में ∠B = 90° हो एवं BD कर्ण AC पर लम्बे हो तो सिद्ध कीजिए ΔADB ~ ΔBDC

हल: दिया है-

एक समकोण त्रिभुज ABC है जिसमें ∠ABC = 90° है तथा BD ⊥ AC है।

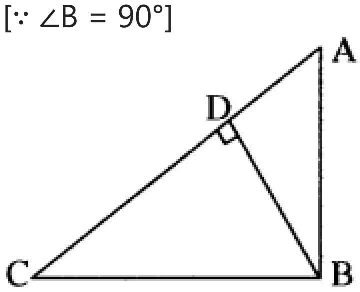
सिद्ध करना है-

ΔADB ~ ΔBDC

उपपत्ति-

स्पष्ट है कि ∠ABD + ∠DBC = 90°

[∵ ∠B = 90°]



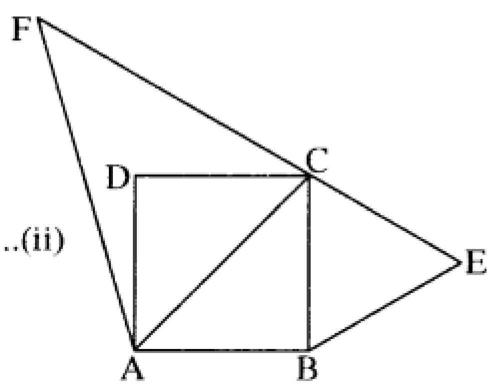
तथ ∠C + ∠DBC + ∠BDC = 180°
(त्रिभुज BCD में कोण योग गुणधर्म से)
⇒ ∠C + ∠DBC + 90°= 180°
⇒ ∠C + ∠DBC = 90°
परन्तु ∠ABD + ∠DBC = 90°
∴ ∠ABD + ∠DBC = 2C + ∠DBC
⇒ ∠DBC + 2C = ∠ABD + ∠DBC
⇒ ∠ABD = ∠C ......(i)
अतः ΔADB और ABDC में।
∠ADB = ∠BDC = 90° (प्रत्येक कोण 90° के बराबर)
अतः समरूपता की कसौटी से
ΔADB ~ ΔBDC (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल: दिया है-
एक वर्ग ΔBCD है जिसकी भुजा BC पर समबाहु त्रिभुज BCE तथा विकर्ण AC पर समबाहु त्रिभुज ACF बनाया गया है।
सिद्ध करना है-
$ar(\Delta BC\mathbf{E}) = \frac{1}{2}ar(\Delta ACF)$
उपपत्ति-
चूँकि ΔBCE और ΔACF दोनों ही समबाहु त्रिभुज हैं।
∴ ΔBCE ~ ΔACF [∵ दोनों त्रिभुजों का प्रत्येक कोण 60° है अतः दोनों त्रिभुज समानकोणीय हैं।]

$$\Rightarrow \quad \frac{ar(\Delta BCE)}{ar(\Delta ACF)} = \frac{BC^2}{AC^2} \qquad .....(i)$$

स्पष्ट है कि वर्ग ABCD में



$$AC = \sqrt{2}\,BC$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \qquad .....(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{ar(\Delta BCE)}{ar(\Delta ACF)} = \frac{1}{2}$$

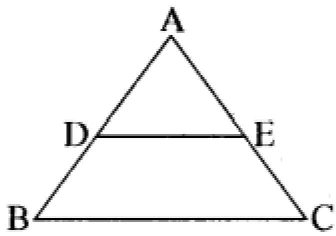
$$\Rightarrow \quad ar(\Delta BCE) = \frac{1}{2}ar(\Delta ACF)$$

(इतिसिद्धम्)

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 11

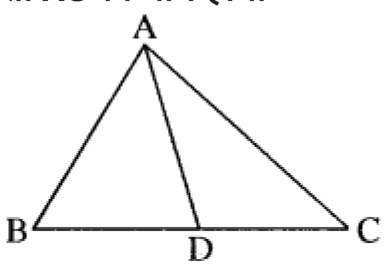
प्रश्न 1. आकृति में DE || BC हो, AD = 4 सेमी., DB = 6 सेमी. एवं AE = 5 सेमी. हो, तो EC का मान होगा



(क) 6.5 सेमी.
(ख) 7.0 सेमी.
(ग) 7.5 सेमी.
(घ) 8.0 सेमी

उत्तर: (ग) 7.5 सेमी.

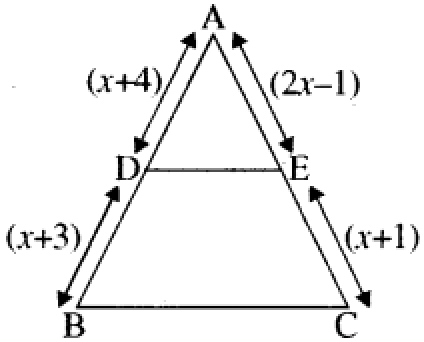
प्रश्न 2. आकृति में AD, कोण A का समद्विभाजक, AB = 6 सेमी., BD = 8 सेमी., DC = 6 सेमी. हो, तो AC का मान होगा



(क) 4.0 सेमी.
(ख) 4.5 सेमी.
(ग) 5 सेमी.
(घ) 5.5 सेमी.

उत्तर: (ख) 4.5 सेमी.

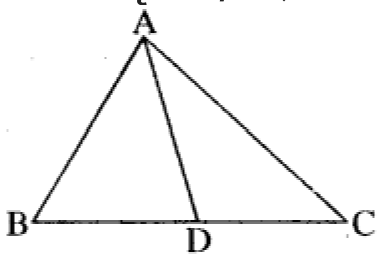
प्रश्न 3. आकृति में, यदि DE || BC हो, तो x को मान होगा



(क) $\sqrt{5}$
(ख) $\sqrt{6}$
(ग) $\sqrt{3}$
(घ) $\sqrt{7}$

उत्तर: (घ) $\sqrt{7}$

प्रश्न 4. आकृति में, यदि AB = 3.4 सेमी., BD = 4 सेमी., BC = 10 सेमी. हो, तो AC का मान होगा



(क) 5.1 सेमी.
(ग) 6 सेमी.
(ख) 3.4 सेमी.
(घ) 5.3 सेमी.

उत्तर: (क) 5.1 सेमी.

प्रश्न 5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 25 सेमी. एवं 36 सेमी. हैं, यदि छोटे त्रिभुज की माध्यिका 10 सेमी. हो तो बड़े त्रिभुज की संगत माध्यिका होगी
(क) 12 सेमी.
(ख) 15 सेमी.
(ग) 10 सेमी.
(घ) 18 सेमी.

उत्तर: (क) 12 सेमी.

प्रश्न 6. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB || CD है एवं इसके विकर्ण O बिन्दु पर मिलते हैं। यदि AB = 6 सेमी. एवं DC = 3 सेमी. हो, तो ΔAOB के क्षेत्रफल एवं ACOD के क्षेत्रफल का अनुपाते होगा
(क) 4:1
(ख) 1: 2
(ग) 2 : 1
(घ) 1 : 4

उत्तर: (क) 4:1

प्रश्न 7. यदि ΔABC एवं ΔDEF में ∠A = 50°, ∠B = 70°, ∠C = 60°, ∠D = 60°, ∠E = 70° एवं ∠F = 50° हो तो निम्नलिखित में सही है
(क) ΔABC ~ ΔDEF
(ख) ΔABC ~ ΔEDF
(ग) ΔABC ~ ΔDFE.
(घ) ΔABC ~ ΔFED

उत्तर: (घ) AABC ~ AFED

प्रश्न 8. यदि ΔABC ~ ΔDEF हो एवं AB = 10 सेमी., DE = 8 सेमी. हो, तो ΔABC का क्षेत्रफल ΔDEF का क्षेत्रफल होगा
(क) 25 : 16
(ख) 16 : 25
(ग) 4 : 5
(घ) 5 : 4

उत्तर: (क) 25 : 16

प्रश्न 9. ΔABC की भुजाओं AB एवं AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि DE || BC है एवं AD = 8 सेमी., AB = 12 सेमी. तथा AE = 12 सेमी. हो, तो CE का माप होगा
(क) 6 सेमी.
(ख) 18 सेमी.
(ग) 9 सेमी.
(घ) 15 सेमी.

उत्तर: (क) 6 सेमी.

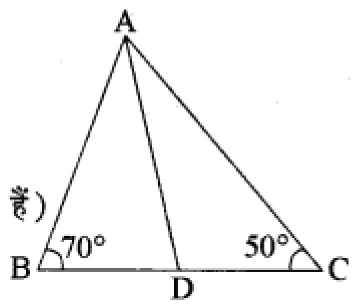
प्रश्न 10. एक 12 सेमी. लम्बी ऊर्ध्वाधर छड़ की जमीन पर छाया की लम्बाई 8 सेमी. लम्बी है। यदि इसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 40 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी
(क) 60 मीटर
(ख) 60 सेमी.
(ग) 40 सेमी.
(घ) 80 सेमी.

उत्तर: (क) 60 मीटर

प्रश्न 11. ΔABC में यदि D, BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ हो, एवं ∠B = 70°, ∠C = 50° हो, तो ∠BAD ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-
ΔABC जिसमें D. BC पर बिन्दु इस प्रकार है कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ तथा ∠B = 70° व 20 = 50°

ज्ञात करना है—∠BAD



उपपत्ति—यहाँ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ (दिया है)

अत: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ (लिख सकते हैं)

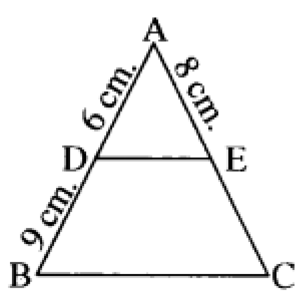
∵ $\Delta ABD \sim \Delta ADC$

$\angle A = [180 - (70 + 50)] = 60°$

अत: $\angle BAD = \frac{1}{2}, \angle A = \frac{60}{2} = 30°$

प्रश्न 12. यदि ΔABC में DE || BC हो, एवं AD = 6 सेमी., DB = 9 सेमी. और AE = 8 सेमी. हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में दिया है कि DE || BC



∴ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

⇒ $\frac{6}{9} = \frac{8}{EC}$

⇒ $EC = \frac{9 \times 8}{6} = 12$ सेमी.

∵ $AC = AE + EC = 8 + 12 = 20$ सेमी. **उत्तर**

प्रश्न 13. यदि △ABC में 2A का समद्विभाजक AD हो एवं AB = 8 सेमी., BD = 5 सेमी. एवं DC = 4 सेमी. हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

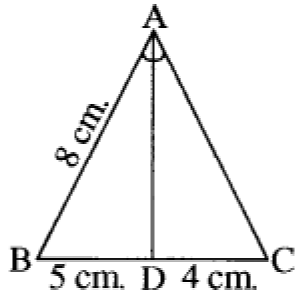
हल: △ABC में

AD, शीर्ष कोण A का समद्विभाजक है।

$\therefore \quad \angle BAD = \angle CAD$

इसलिए आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



यहाँ AB = 8 सेमी., BD = 5 सेमी.

तथा DC = 4 सेमी.

मान रखने पर

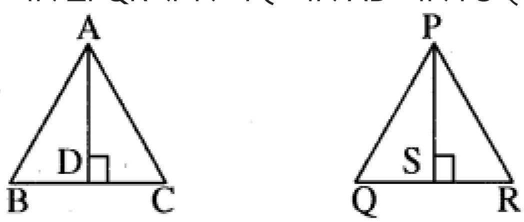
$$\frac{5}{4} = \frac{8}{AC}$$

$$\Rightarrow \quad AC = \frac{8 \times 4}{5} = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 14. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाइयों का अनुपात 4:9 हो, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बीच अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

माना △ABC और △PQR समरूप हैं और AD और PS इनकी संगत ऊँचाई है।



$$\therefore \quad \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{(AD)^2}{(PS)^2} = \frac{(4)^2}{(9)^2} = \frac{16}{81}$$

इसलिये त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = 16 : 81

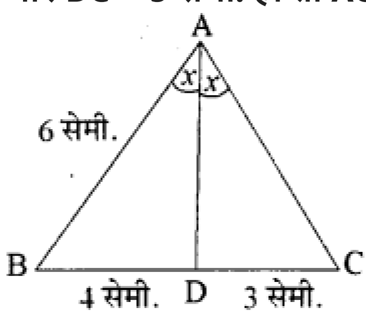
अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. दो सरल रेखाएँ जो एक ही रेखा के लम्बवत् हों, परस्पर कहलाती हैं
(A) लम्ब रेखाएँ।
(B) समान्तर रेखाएँ
(C) समद्विभाजित रेखाएँ
(D) समान रेखाएँ

उत्तर: (B) समान्तर रेखाएँ

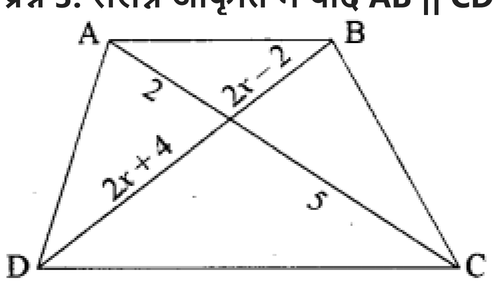
प्रश्न 2. दी गई आकृति में AD, ∠A का अन्तः समद्विभाजक है। यदि AB = 6 सेमी., BD = 4 सेमी. और DC = 3 सेमी. हो तो AC का मान है



(A) 3 सेमी.
(B) 4 सेमी.
(C) 4.5 सेमी.
(D) 5 सेमी.

उत्तर: (C) 4.5 सेमी.

प्रश्न 3. संलग्न आकृति में यदि AB || CD हो तो × का मान है



(A) 1
(B) 2

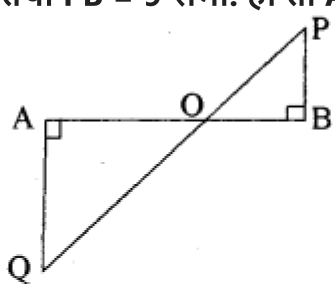
(C) 3
(D) 4

उत्तर: (C) 3

प्रश्न 4. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाइयों का अनुपात 9 : 16 हो तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा
(A) 81 : 256
(B) 81 : 156
(C) 16 : 9
(D) 3 : 4

उत्तर: (A) 81 : 256

प्रश्न 5. दी गई आकृति में QA और PB, AB पर लम्बवत् हैं। यदि AO = 10 सेमी., BO = 6 सेमी. तथा PB = 9 सेमी. हो तो AQ की लम्बाई है



(A) 12 सेमी.
(B) 15 सेमी.
(C) 18 सेमी.
(D) 21 सेमी.

उत्तर: (B) 15 सेमी.

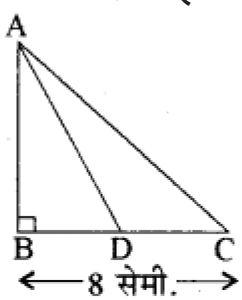
प्रश्न 6. △ABC ~ △DEF है, यदि ∠A = 40°, ∠E = 80° है तो ∠C का मान है
(A) 70°
(B) 60°
(C) 50°
(D) 40°

उत्तर: (B) 60°

प्रश्न 7. यदि AABC में D भुजा BC को मध्य बिन्दु हो और $AB^2 + AC^2 = x (BD^2 + AD^2)$ तो x का मान होगा
(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) शून्य

उत्तर: (B) 2

प्रश्न 8. चित्र में ABC एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है जहाँ ∠B = 90° है। यदि BC = 8 सेमी. है तो AD की लम्बाई क्या होगी? जहाँ D, BC का मध्य बिन्दु है



(A) 20 सेमी.
(B) $\sqrt{20}$ सेमी.
(C) $2\sqrt{20}$ सेमी.
(D) $4\sqrt{20}$ सेमी.

उत्तर: (C) $2\sqrt{20}$ सेमी.

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

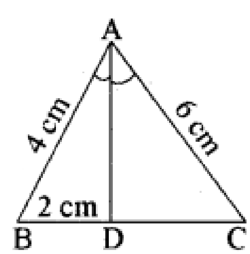
प्रश्न 1. ΔABC में AD कोण BAC का समद्विभाजक है। यदि AB = 4 cm, AC = 6 cm, BD = 2 cm है तो BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल: आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

या $$DC = \frac{BD \times AC}{AB}$$

मान रखने पर



$$= \frac{6 \times 2}{4} = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore \quad BC = BD + DC$$

$$= 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

प्रश्न 2. किसी त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण कैसे होते हैं?

उत्तर: बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

प्रश्न 3. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 5 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: ∵ समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर है, अतः त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में अनुपात
$= (4 : 5)^2$
$= 16 : 25$

प्रश्न 4. बौधायन प्रमेय का कथन लिखिए।

उत्तर: बौधायन प्रमेय-किसी आयत के विकर्ण से बने वर्ग का क्षेत्रफल इसकी दोनों आसन्न भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

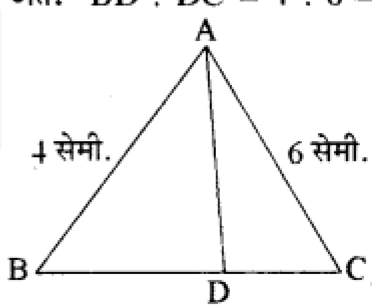
प्रश्न 5. दी गई आकृति में AD, ∠A का अन्त:समद्विभाजक है। यदि AB = 4 सेमी., AC = 6 सेमी. है तो BD: DC लिखिए।

हल:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

अत: $\frac{4}{6} = \frac{BD}{DC}$

अत: $BD : DC = 4 : 6 = 2 : 3$



प्रश्न 6. यदि ΔABC ~ ΔDEF, AB = 5 सेमी., DE = 3 सेमी. तथा AABC का क्षेत्रफल = 50 सेमी. है, तो ΔDEF का क्षेत्रफल लिखिए।

हल:

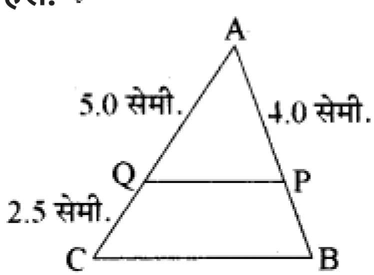
$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2}$$

$$= \frac{50}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{25}{9}$$

$$= \Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{50 \times 9}{25} = 18 \text{ सेमी.}^2$$

प्रश्न 7. संलग्न आकृति में BC || PQ यदि AP = 4 सेमी., AQ= 5 सेमी. तथा QC = 2.5 सेमी. तो PB का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$



$= \frac{5}{2.5} = \frac{4}{PB}$

अतः $PB = \frac{4}{2} = 2$ सेमी.

प्रश्न 8. उपर्युक्त प्रश्न के चित्र में यदि AB = 7 सेमी., AP = 5 सेमी. तथा AC = 10.5 सेमी. तो AQ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AB}{AP}$$

$$= \frac{10.5}{AQ} = \frac{7}{5}$$

अतः $AQ = \frac{10.5 \times 5}{7} = 7.5$ सेमी.

प्रश्न 9. दो समरूप त्रिभुज ABC तथा PQR के परिमाप क्रमशः 36 सेमी. तथा 24 सेमी. हैं। यदि PQ = 10 सेमी. हो तो AB ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24}$$

$$= \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

अतः $AB = 15$ सेमी.

प्रश्न 10. यदि दो त्रिभुज ABC और XYZ में $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{ZX}$ ता ΔABC के कोण A का मान त्रिभुज XYZ के किस कोण के बराबर होगा?

उत्तर: ∠X के समान।

प्रश्न 11. यदि ΔABC एवं ΔDEF $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ आपस में कैसे त्रिभुज होंगे?

उत्तर: समरूप त्रिभुज।

प्रश्न 12. दो त्रिभुजों के समरूप होने की दो दशाएँ बताइए।

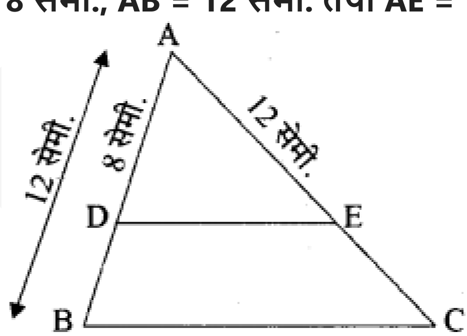
उत्तर: दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि

- उनके संगत कोण समान हों
- उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

प्रश्न 13. SSS नियम लिखिए।

उत्तर: SSS नियम-यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, तो वे दोनों समरूप होते हैं।

प्रश्न 14. ΔABC की भुजाओं AB और AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि DE || BC यदि AD = 8 सेमी., AB = 12 सेमी. तथा AE = 12 सेमी. हो तो CE का माप लिखिए।



हल: आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से

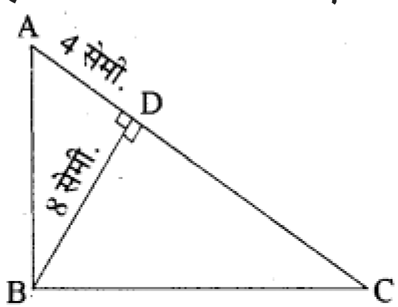
$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

यहाँ AD = 8 सेमी., BD = (12 – 8) = 4 सेमी. तथा AE = 12 सेमी. है। अतः मान रखने पर

$\frac{8}{4} = \frac{12}{CE}$

$CE = \frac{12}{8} \times 4 = 6$ सेमी.

प्रश्न 15. दी गई आकृति में ∠ABC = 90° तथा BD 1 AC है। यदि BD = 8 सेमी. तथा AD = 4 सेमी. हो तो CD को माप लिखिए।



हल: ΔABD व ΔBDC में

ΔABD व ΔBDC में

$\angle BDC = \angle BDA$ (प्रत्येक 90°)

$\angle DBC = \angle BAD$

अत: $\Delta ABD \sim \Delta BDC$

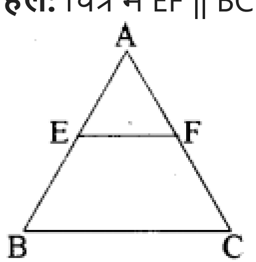
$\because \quad \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD}$

$\frac{4}{8} = \frac{8}{CD}$ या $4CD = 64$

अत: $CD = \frac{64}{4} = 16$ सेमी. उत्त

प्रश्न 16. चित्र में EF || BC, यदि AE: BE = 4:1 और CF = 1.5 सेमी. हो, तो AF की लम्बाई क्या होगी?

हल: चित्र में EF || BC



$\therefore \quad \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$

$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{AF}{1.5}$

$\Rightarrow AF = 4 \times 1.5$

6.0 सेमी.

प्रश्न 17. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 16 : 81 है तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: ∵ समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।
अतः इनकी भुजाओं का अनुपात

$= \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$

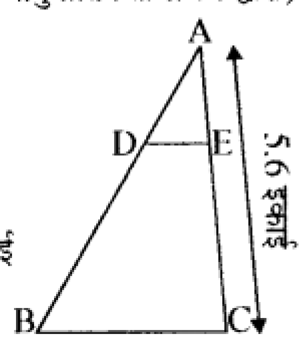
अतः इनकी भुजाओं का अनुपात = 4 : 9

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. △ABC में DE || BC है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ है। यदि AC = 5.6 इकाई हो तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: △ABC में DE || BC दिया हुआ है।

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा)



या $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{(AC - AE)}$

या $\frac{3}{5} = \frac{AE}{5.6 - AE}$

$\because \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ एवं AC = 5.6 इकाई

या $3(5.6 - AE) = 5AE$

या $16.8 - 3AE = 5AE$

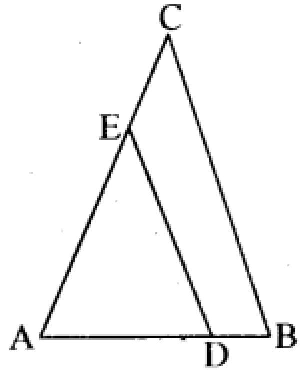
या $5AE + 3AE = 16.8$

या $8AE = 16.8$

या $AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ इकाई उत्तर

प्रश्न 2. दी गई आकृति में DE || BC है यदि AD = r, DB = r – 2, AE = r + 2 और EC = r-1 हो तो r का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में DE || BC अतः



$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

या $x(x-1) = (x+2)(x-2)$

या $x^2 - x = x^2 - 4$

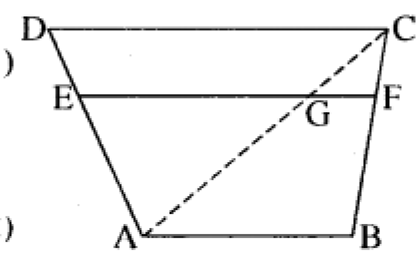
या $x = 4$

प्रश्न 3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB || DC है। AD व BC पर क्रमशः E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF || AB है। सिद्ध कीजिए
$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

हल: A व C को मिलाइए। इस प्रकार AC, EI के बिन्दु G से गुजरता
∴ AB || DC और EF || AB (दिया हुआ है)
∴ EF || DC (एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं ।)
ΔADC में EG || DC (यहाँ EF || DNC और E(G, EF का ही भाग है।)

अत: $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{AG}{CG} = \frac{AE}{ED}$ .....(1)

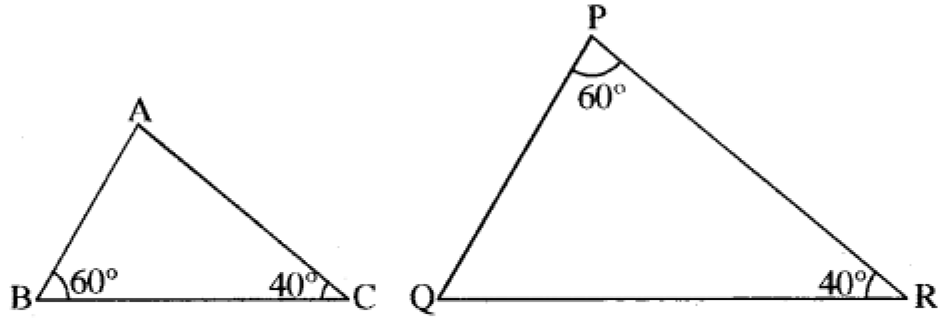


इसी प्रकार ΔCAB में $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

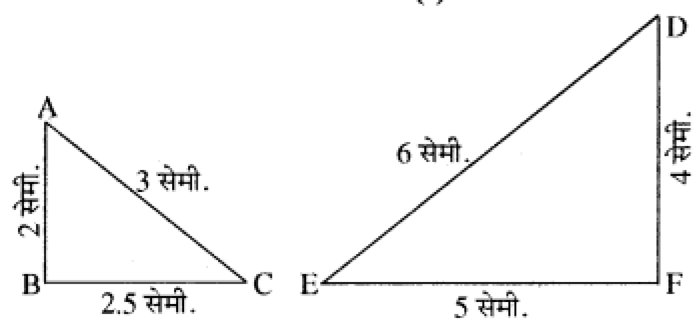
या $\frac{AG}{CG} = \frac{BF}{CF}$ .....(2)

अत: (1) और (2) से $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ **इतिसिद्धम्**

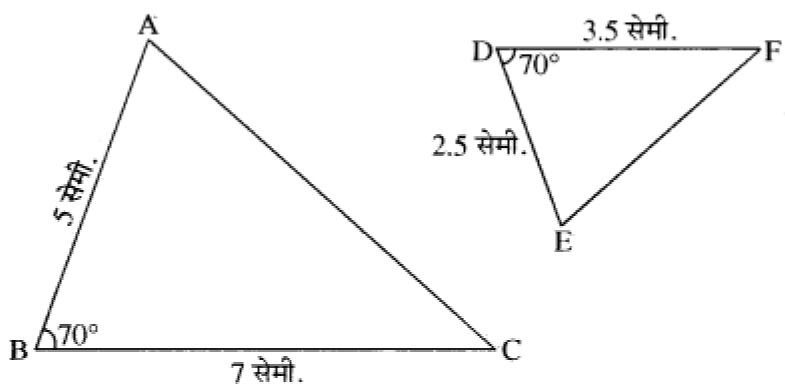
प्रश्न 4. आकृति में दर्शाए गए त्रिभुजों के युग्मों में कौन-कौनसे युग्म समरूप हैं? समरूपता के नियम लिखते हुए सांकेतिक रूप से लिखकर व्यक्त करें।



(i)



(ii)



(iii)

हल:

(i) ΔBCA ~ ΔPQR

चूंकि ∠B = ∠P = 60°, ∠C = ∠R = 40

अतः ∠A = 180 – (60 + 40) = ∠Q = 80°

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा ABCA ~ APRQ होगा।

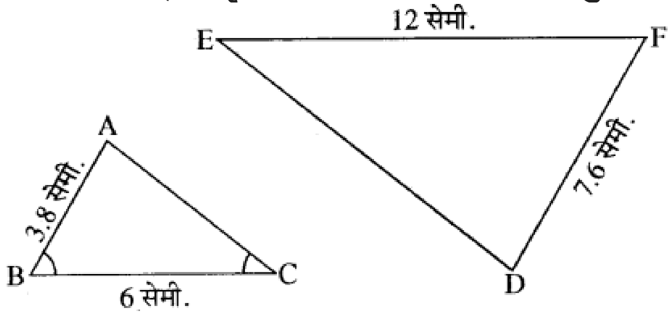
(ii) ΔABC व ADEF में

$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$

अतः SSS समरूपता प्रमेय से ΔABC ~ ΔDEF

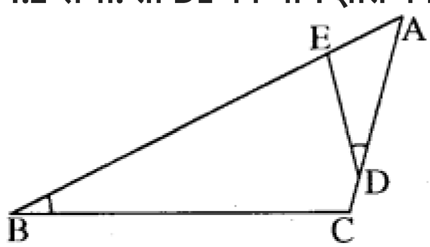
(iii) ΔABC व ΔDEF में
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = 2$ एवं ∠ABC = 70° = ∠EDF
अतः SAS समरूपता प्रमेय से ΔABC ~ ΔEDF

प्रश्न 5. दी गई आकृति में AABC व ADEF की तुलना कर ∠D, ∠E एवं ∠F का मान ज्ञात कीजिए।



हल:
ΔABC एवं ΔDEF में $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$
अत: SSS समरूपता प्रमेय से।
ΔABC ~ ΔDEF
⇒ ∠A = ∠D, ∠B = ∠F C ∠C = ∠E
⇒ ∠F = 60° उत्तर ∠E = 40°
⇒ ∠D = 180 – (60 + 40) = 80°

प्रश्न 6. आकृति में ∠ADE =∠B और AD = 3.8 सेमी., AE = 3.6 सेमी., BE = 2.1 सेमी. और BC = 4.2 सेमी. तो DE का मान ज्ञात कीजिए।



हल: ΔADE एवं ΔABC में
∠ADE एवं = ∠B (दिया हुआ) ∠A = ∠A (उभयनिष्ट)

⇒ $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

या $\frac{AD}{AE+EB} = \frac{DE}{BC}$

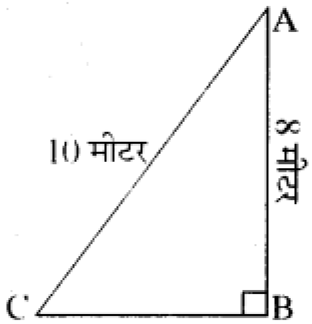
⇒ $\frac{3.8}{3.6+2.1} = \frac{DE}{4.2}$

या $DE = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = \frac{15.96}{5.7}$

या DE = 2.8 सेमी. **उत्तर**

प्रश्न 7. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी को एक दीवार पर टिकाने से वह भूमिं से 8 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति के अनुसार ∆ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका ∠B = 90° है।
अत: बौधायन प्रमेय से



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

या $BC^2 = AC^2 - AB^2$

या $BC^2 = 10^2 - 8^2$

या $BC^2 = 100 - 64$

या $BC^2 = 36$

या $BC = \sqrt{36} = 6$ मीटर

प्रश्न 8. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी./घण्टे की चाल से उड़ता है। उसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी./घण्टे की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी?

हल: प्रथम हवाई जहाज की उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल × समय = 1000 × $\frac{3}{2}$ = 1500 किमी.
दूसरे हवाई जहाज की पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद हवाई अड्डे से दूरी

= चाल × समय = $1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी.

आकृतिनुसार $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बौधायन प्रमेय)

$AB^2 = 1500^2 + 1800^2$

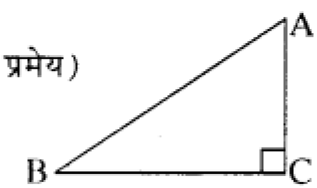
$= 2250000 + 3240000$

$= 5490000$

$AB = \sqrt{5490000}$

$= \sqrt{900 \times 61}$

$= 30\sqrt{61}$ किमी. उत्तर



प्रश्न 9. यदि ∆ABC ~ ∆DEF है जिनमें AB = 2.2 सेमी. और DE = 3.3 सेमी. हो तो ∆ABC और ∆DEF के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनकी संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात उनके क्षेत्रफलों के बराबर होता है।

अत: $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(2.2)^2}{3.3^2} = \left(\frac{22}{33}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

प्रश्न 10. दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग सेमी. एवं 49 वर्ग सेमी. है।

हल: हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपातों के बराबर होता है।

अत: $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{36}{49}$

या $\frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$

प्रश्न 11. यदि ΔABC ~ ΔPQR हो, AABC का क्षेत्रफल = 16 सेमी. एवं ΔPQR का क्षेत्रफल 9 सेमी. तथा AB = 2.1 सेमी. हो तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल:

$\because \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$

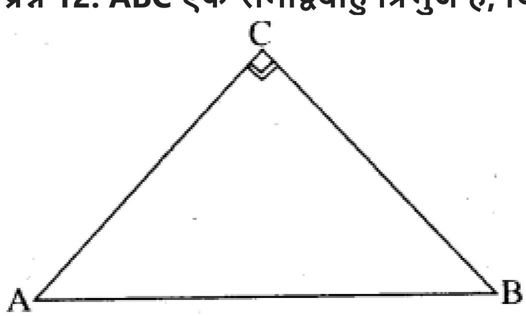
$\Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{(2.1)^2}{PQ^2}$

दोनों ओर वर्गमूल लेने पर

$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2.1}{PQ}$

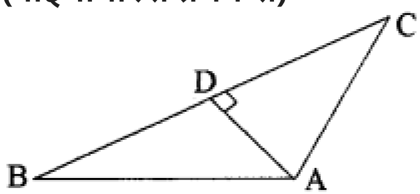
$\Rightarrow PQ = \frac{2.1 \times 3}{4} = \frac{6.3}{4} = 1.575$ सेमी.

प्रश्न 12. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए AB = 2AC है।



हल:
ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें
$\angle C = 90°$, AC.= BC (दिया हुआ) ....(1)
समकोण त्रिभुज में बौधायन प्रमेय से
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
या $AB^2 = AC^2 + AC^2$ [समी. 1 से]
या $AB^2 = 2AC^2$ **इतिसिद्धम्**

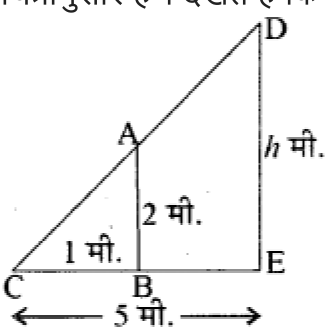
प्रश्न 13. दी गयी आकृति में, $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिये कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है। (पाइथागोरस प्रमेय से)



हल:
ΔADC से
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad .....(1)$$
(पाइथागोरस प्रमेय से)
ΔADB से
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad .....(2)$$
(पाइथागोरस प्रमेय से)
समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर
$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$
या $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 14. एक समतल जमीन पर 2 मी. लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मी. है। उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मी. हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि मीनार की ऊँचाई h मी. है।
चित्रानुसार हम देखते हैं कि ΔABC तथा ΔDEC समरूप हैं अर्थात्।



$$\Delta ABC \sim \Delta DEC$$

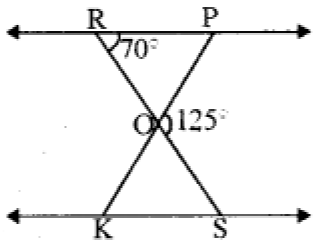
अतः $$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{2}{h} = \frac{1}{5}$$

या $$h = 5 \times 2 = 10 \text{ मी.}$$

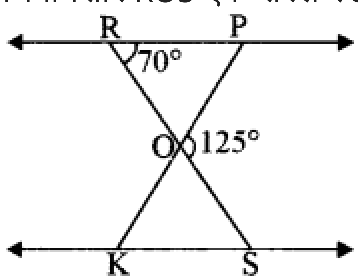
अतः मीनार की ऊँचाई = 10 मी.

प्रश्न 15. आकृति में ∠OKS व ∠ROP का मान ज्ञात कीजिए, यदि ΔOPR ~ ΔOSK तथा ∠POS = 125° और ∠PRO = 70° है।



हल: प्रश्नानुसार ∠POS = 125° तथा ∠PRO = 70°

चित्रानसार ROS एक सरल रेखा है।



∴ ∠ROP + ∠POS = 180°

या ∠ROP + 125° = 180°

या ∠ROP = 180° – 125°

=55°

जब ∠ROP = 55° तो ∠KOS भी 55° का होगा क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण या सम्मुख कोण हैं।

ΔOPR ~ ΔOSK ∴ ∠R = ∠S = 70°

अतः ΔROP में ∠R +20+ ∠P = 180°

70° + 55° + ∠P = 180°

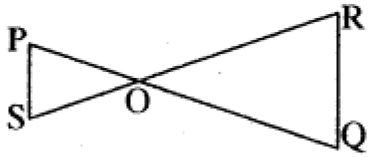
∠ P = 180° – 70° – 55° 4

∠ P = 55०

∠ P = ∠K = 55°

अतः ∠OKS = 55° तथा ∠ROP = 55°

प्रश्न 16. दी गई आकृति में यदि OP. OQ = OR . OS तो दर्शाइए ∠OPS = ∠ORQ a ∠OQR = ∠OSP. (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: ΔPOS व ΔQOR में OP. OQ = OR . OS दिया हुआ है।

$\frac{OP}{OS} = \frac{OR}{OQ}$ ....(1)

तथा ∠POS = ∠ROQ (शीर्षाभिमुख कोण) ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

ΔPOS ~ ΔROQ

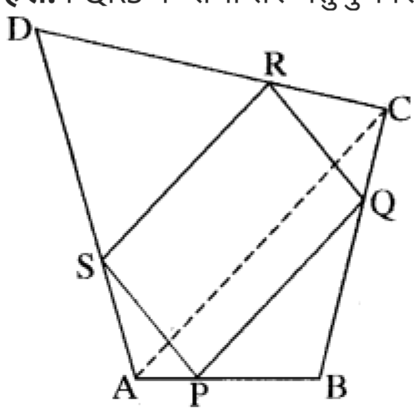
इसलिये P =∠R एवं ∠S = ∠Q (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

अतः ∠OPS = ∠ORQ वे ∠OOR = ∠OSP इतिसिद्धम्

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. ΔBCD एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD और DA पर क्रमशः P, Q, R एवं s बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि ये चतुर्भुज के शीर्ष A व C के सापेक्ष इन्हें समत्रिभाजित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल: PQRS के समान्तर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए हमें PQ ॥ SR एवं QR || PS सिद्ध करना होगा।



दिया हुआ है-

P, Q, R और S बिन्दु क्रमश: AB, BC, CD और DA पर इस प्रकार स्थित हैं कि

BP = 2PA, BQ = 2QC, DR = 2RC और DS = 2SA

रचना-

A को C से मिलाया

ΔADC में $\frac{DS}{SA} = \frac{2SA}{SA} = 2$

एवं $\frac{DR}{RC} = \frac{2RC}{RC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow$ $\frac{DS}{SA} = \frac{DR}{RC} \Rightarrow SR \parallel AC$ .....(1)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा)

$\frac{BP}{PA} = \frac{2PA}{PA} = 2$

ΔABC में

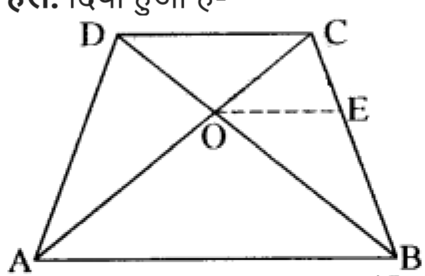
और $\frac{BQ}{QC} = \frac{2QC}{QC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow$ $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel AC$ .....(2)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) (1) व (2) से SR || AC तथा PQ || AC ⇒ SR || PQ इसी प्रकार BD को मिलाकर हम उपर्युक्तानुसार QR || PS सिद्ध कर सकते हैं। अर्थात् PORS एक समान्तर चतुर्भुज है

प्रश्न 2. एक चतुर्भुज ΔBCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध कीजिए कि ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

हल: दिया हुआ है-



चतुर्भुज में आकृति के अनुसार $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

सिद्ध करना है-

ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, इसके लिए हमें AB || CD सिद्ध करना होगा।

रचना-

O से OE || AB रेखा खींची।

उपपत्ति— $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ (दिया हुआ है)

या $\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}$ .....(1)

ΔABC में $OE \parallel AB$

$\therefore$ $\frac{CO}{OA}=\frac{CE}{EB}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{OA}{CO}=\frac{EB}{CE}$ .....(2)

(1) व (2) से $\frac{BO}{OD}=\frac{EB}{CE}$

या $\frac{BO}{OD}=\frac{BE}{EC}$

$\Rightarrow$ $OE \parallel CD$ .....(3)

(ΔBCD में आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से)

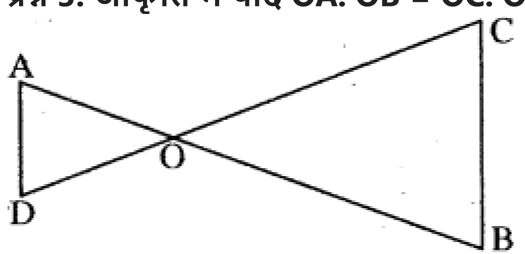
$\because$ $OE \parallel AB$ (रचना से) .....(4)

(3) व (4) से

$AB \parallel CD$

अर्थात् ABCD एक समलम्ब चतुरभुज है

प्रश्न 3. आकृति में यदि OA. OB = OC. OD है तो दर्शाइए ∠A = ∠C व ∠B =∠D



हल: ΔAOD व ΔBOC में OA. OB = OC. OD दिया हुआ है।

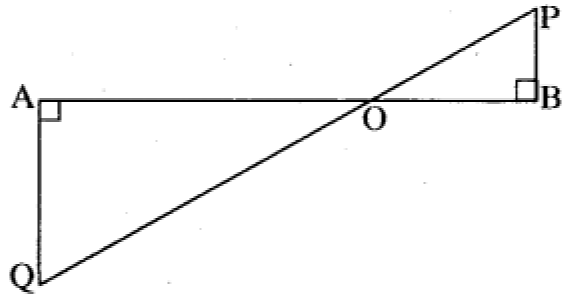
अतः $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}$ ....(1)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) ....(2)

(1) व (2) से $\Delta AOD \sim \Delta COB$

इसलिए $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण) इतिसिद्धम्

प्रश्न 4. आकृति में QA तथा PB, AB पर लम्ब है यदि AB = 16 सेमी., OQ= $5\sqrt{3}$ सेमी. और OP = $5\sqrt{13}$ सेमी. है तो AO एवं BO के मान ज्ञात कीजिए।



हल:
ΔAOO एवं ΔBOP में ∠OAQ = ∠OBP (प्रत्येक 90°)
∠AOQ = ∠BOP (शीर्षाभिमुख कोण)
अतः AA समरूपती प्रमेय द्वारा

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP} \quad .....(1)$$

परन्तु $AB = AO + BO = 16$ सेमी.
माना कि $AO = x$ तो $BO = 16 - x$.

अतः $\frac{x}{16-x} = \frac{OQ}{OP}$ [(1) से]

या $\frac{x}{16-x} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}$

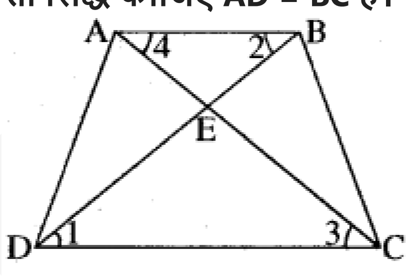
या $3x = 80 - 5x$

या $8x = 80$

या $x = 10$ सेमी. $\Rightarrow AO = 10$ सेमी.

एवं $BO = 16 - 10 = 6$ सेमी.

प्रश्न 5. आकृति में ΔBCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसकी AB ॥ DC है। यदि ΔAED ~ ΔBEC हो तो सिद्ध कीजिए AD = BC है।



हल: ΔEDC एवं ΔEBA में
∠1 = ∠2 एवं ∠3 = ∠4 (एकान्तर कोण)
तथा ∠DEC = ∠AEB (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: AAA समरूपता प्रमेय द्वारा
$\Delta EDC \sim \Delta EBA$

अत: $\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$

या $\frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA}$ ......(1)

चूँकि $\Delta AED \sim \Delta BEC$

अत: $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC}$ .....(2)

(1) व (2) से $\frac{EB}{EA} = \frac{AE}{BE}$

या $(BE)^2 = (AE)^2$

या $BE = AE$

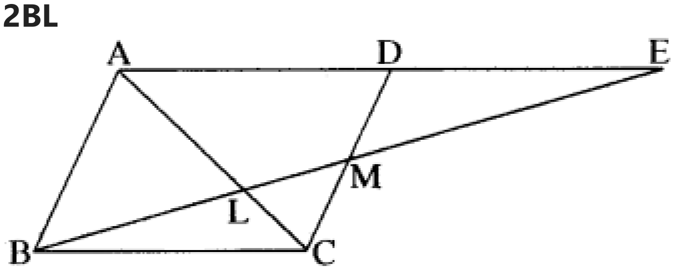
(2) में BE = AE रखने पर

$\frac{AE}{AE} = \frac{AD}{BC}$

या $\frac{AD}{BC} = 1$

या $AD = BC$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 6. समान्तर चतुर्भुज ΔBCD की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढ़ावें तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए EL = 2BL



हल: ΔBMC व ΔEMD में
MC = MD (M, CD का मध्य बिन्दु है)
∠CMB =∠DME (शीर्षाभिमुख कोण)
∠MCB = ∠MDE (एकान्तर कोण)
अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा।
ΔBMC = ΔEMD
अतः BC = ED परन्तु AD = BC [ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है].
और AE = AD + DE
या AE = BC + BC
या, AE = 2BC ....(1)

AAEL व ACBL में

∠ALE=∠CLB (शीर्षाभिमुख कोण)

4EAL = ∠BCL (एकान्तर कोण)

अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

ΔAEL ~ ΔACB

$$\Rightarrow \quad \frac{EL}{BL} = \frac{AE}{CB}$$

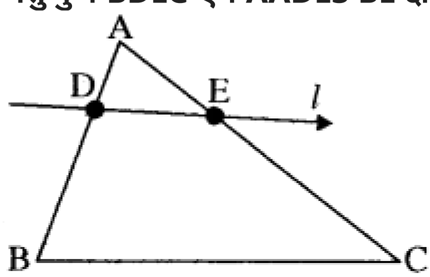
$$\Rightarrow \quad \frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC} \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{EL}{BL} = 2$$

$$\Rightarrow \quad EL = 2BL$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 7. आकृति में AABC में एक रेखा। जो BC के समान्तर है, AB और AC को क्रमशः D व E पर काटती हुई LE इस प्रकार निकलती हैं कि AD: DB = 1 : 2 हो जाता है, तो इस प्रकार बने समलम्ब चतुर्भुज BDEC एवं AADES BL क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि /|| BC

अतः $\angle ADE = \angle B$ एवं $\angle AED = \angle D$ (संगत कोण)

अतः ΔADE व ΔABC में

$\angle ADE = \angle B$

एवं $\angle AED = \angle C$

$\Rightarrow$ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (AA समरूपता प्रमेय)

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD^2}{AB^2} \qquad .....(1)$$

परन्तु $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AD+DB} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = \frac{AD}{AB} \qquad .....(2)$$

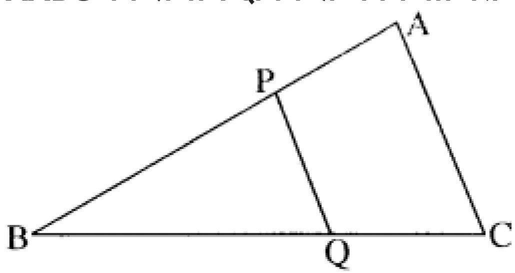
(1) व (2) से $\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल = 9 × ΔADE का क्षेत्रफल .....(3)

किन्तु समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल ΔADE का क्षेत्रफल
⇒ समीकरण (3) से समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल = 9 × ΔADE का क्षेत्रफल – ΔADE का क्षेत्रफल
⇒ समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल = 8 × ΔADE का क्षेत्रफल

या $\dfrac{\text{समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{ADE का क्षेत्रफल}} = \dfrac{8}{1}$

प्रश्न 8. आकृति के अनुसार एक त्रिभुज ABC की भुजा AC के समान्तर रेखाखण्ड PQ उसकी भुजा AB और AC को इस प्रकार विभाजित करती है कि $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो तो सिद्ध कीजिए। रेखाखण्ड PQ, AABC को समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।



हल: दिया हुआ है–
∴ PQ || AC दिया हुआ है।
अतः ∠A = ∠BPQ (संगत कोण)
एवं 2C = ∠BQP (संगत कोण) एवं $\frac{\text{BP}}{\text{BA}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
अतः ΔBAC ~ ΔBPQ (AA समरूपता प्रमेय से)
सिद्ध करना है-
ΔBPQ का क्षेत्रफल = समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल या समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\Delta BAC$ का क्षेत्रफल = ΔBPQ का क्षेत्रफल (दिया हुआ है)
अर्थात् ΔBPO का क्षेत्रफल = ΔBAC का क्षेत्रफल भी सिद्ध करेंगे तो प्रश्न हल हो जाएगा।
उपपत्ति-
चूँकि ΔBAC ~ ΔBPQ
या ΔBPQ ~ ΔBAC

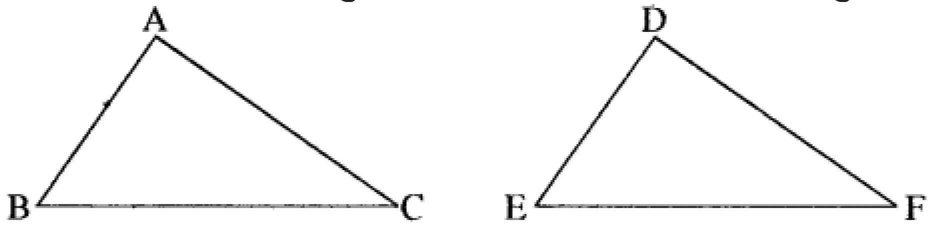
अतः $\dfrac{\Delta\text{BPQ का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{BAC का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\text{BP}^2}{\text{BA}^2}$

या $\dfrac{\Delta\text{BPQ का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{BAC का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1^2}{\sqrt{2}^2}$

या $\dfrac{\Delta\text{BPQ का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{BAC का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1}{2}$

या 2ΔBPQ का क्षेत्रफल = ΔBAC का क्षेत्रफल **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 9. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



हल: दिया हुआ है

ΔABC ~ ΔDEF एवं ΔABC का क्षेत्रफल = ΔDEF का क्षेत्रफल

सिद्ध करना है-

ΔABC = ΔDEF

उपपत्ति-

∵ ΔABC ~ ΔDEF

ΔABC एवं ΔDEF समानकोणिक त्रिभुज हैं।

एवं $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{EF^2}$

या $1 = \frac{BC^2}{EF^2}$ (दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है, दिया हुआ है)

या $BC^2 = EF^2$ या $BC = EF$ .....(1)

⇒ ΔABC व ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

$BC = EF$ [(1) से]

$\angle C = \angle F$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

अत: ASA सर्वांगसम प्रमेय से

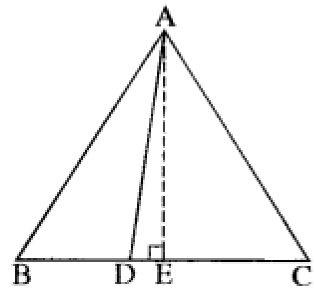
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रश्न 10. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D। इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है, तो सिद्ध कीजिए $9AD^2 = 7AB^2$ है। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: ∴ ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है और A से BC पर AE लम्ब डाला है।

अतः किसी भी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उसका समद्विभाजन करता है।

अतः $BE = EC = \frac{1}{2}BC$ [रचना से]



तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ [दिया हुआ है]

एवं $AB = BC = CA$ [दिया हुआ है]

समकोण ΔABE में $AB^2 = AE^2 + BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}BC\right]$

या $AE^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

या $AE^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$ .....(1)

समकोण ΔADE में

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - (BE - BD)^2$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC\right)^2$

$\left[\because BE = \frac{1}{2}BC \text{ एवं } BD = \frac{1}{3}BC\right]$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$

या $AE^2 = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$ .....(2)

(1) व (2) से $\frac{4AB^2 - BC^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

या $\frac{4AB^2 - AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$ $[\because AB = BC = CA]$

या $\frac{3AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

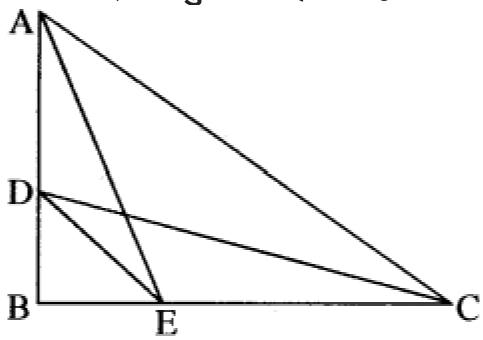
या $27AB^2 = 36AD^2 - AB^2$

या $28AB^2 = 36AD^2$

या $7AB^2 = 9AD^2$

अर्थात् $9AD^2 = 7AB^2$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 11. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका $\angle B$ समकोण है। माना कि D और E क्रमशः AB एवं BC पर दो बिन्दु स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: ΔABE समकोण त्रिभुज है तथ $\angle B = 90^0$

$\therefore \quad AE^2 = AB^2 + BE^2$ .....(1)

पुनः ΔDBC समकोण त्रिभुज है और $\angle B = 90°$

$CD^2 = BD^2 + BC^2$ .....(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2)$ .....(3)

इसी प्रकार समकोण ΔABC एवं समकोण ΔDBE में

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ एवं $DE^2 = BE^2 + BD^2$ .....(4)

(3) व (4) से

$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल: दिया है-

एक त्रिभुज ABC है जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$

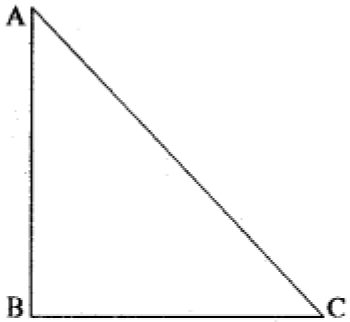
सिद्ध करना है-

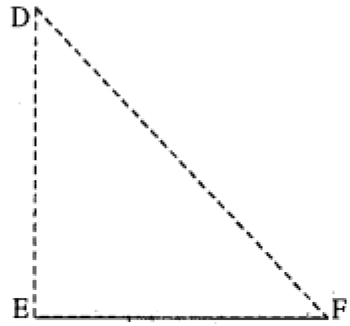
$\angle ABC = 90°$

रचना-

एक अन्य त्रिभुज DEF इस प्रकार बनाया कि DE = AB, EF = BC

$\angle E = 90°$





उपपत्ति-

यह सिद्ध करने के लिए कि ∠ABC = 90° है, हमें केवल यह सिद्ध करना होगा कि ΔABC ~ ΔDEF है।

∴ ΔDEF एक समकोण त्रिभुज है जिसमें ∠DEF समकोण है। अतः पाइथागोरस प्रमेय से

$DF^2 = DE^2 + EF^2$

⇒ $DF^2 = AB^2 + BC^2$

[∵ DE = AB तथा EF = BC (रचना से)]

⇒ $DF^2 = AC^2$ [∵ दिया है कि $AB^2 + BC^2 = AC^2$]

⇒ DF = AC ....(i)

अत: ΔABC और ΔDEF में

AB = DE (रचना से)

BC = EF (रचना से)

तथा AC = DF [(i) से]

अत: सर्वांगसमता की SSS कसौटी से

ΔABC ≅ ΔDEF

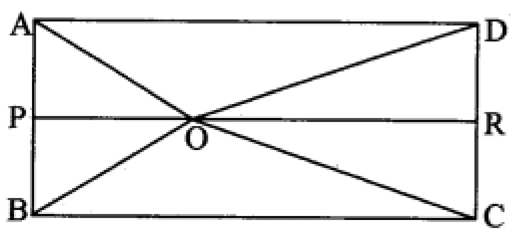
⇒ ∠B = ∠E

[∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होते हैं।]

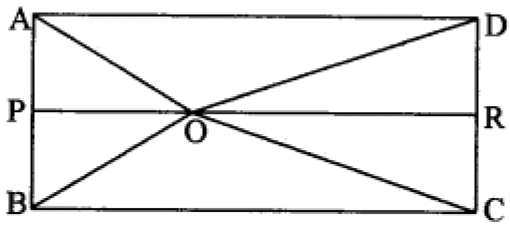
⇒ ∠B = ∠E = 90° [∵ ∠E = 90° (रचना से)]

अत: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। **(इतिसिद्धम्)**

प्रश्न 13. आयत ΔBCD के अन्दर स्थित O कोई बिन्दु है, सिद्ध कीजिए
$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$

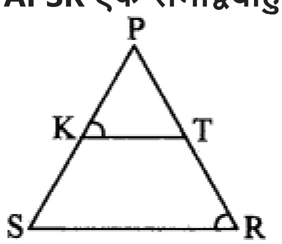


हल: आयत ΔBCD के AN अन्दर एक बिन्दु O स्थित है जिससे गुजरती हुई BC के समान्तर रेखा PL भुजाओं AB और DC को क्रमशः P और B पर काटती है।

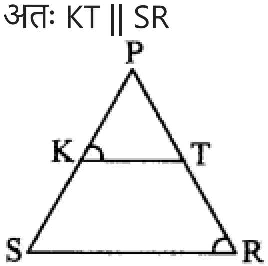


समकोण त्रिभुजों OPB और ORD में पाइथागोरस प्रमेय से
$OB^2 = OP^2 + PB^2$ और $OD^2 = OR^2 + DR^2$
इन दोनों को जोड़ने पर
$= OB^2 + OD^2 = Op^2 + PB^2 + OR^2 + DR^2$
$= OB^2 + OD^2 = (OP^2 + OR^2) + (PB^2 + DR^2)$ ....(i)
पुनः 'समकोण त्रिभुजों ORC तथा OPA में पाइथागोरस प्रमेय से
$OC^2 = OR^2 + RC^2$ तथा $OA^2 = OP^2 + PA^2$
इन दोनों को जोड़ने पर
$\Rightarrow \quad OC^2 + OA^2 = OR^2 + RC^2 + OP^2 + PA^2$
$\Rightarrow \quad OC^2 + OA^2 = OR^2 + OP^2 + RC^2 + PA^2$
$\Rightarrow \quad OC^2 + OA^2 = OR^2 + OP^2 + PB^2 + DR^2$
[$\because$ RC = PB तथा PA = DR]
$\Rightarrow \quad OC^2 + OA^2 = (OR^2 + OP^2) + (PB^2 + DR^2)$ .....(ii)
(i) व (ii) से
$OB^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2$
$\Rightarrow \quad OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. निम्न में से दी गई आकृति में $\frac{PK}{KS} = \frac{PT}{TR}$ हैं तथा ∠PKT = ∠PRS है। सिद्ध कीजिए कि APSR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



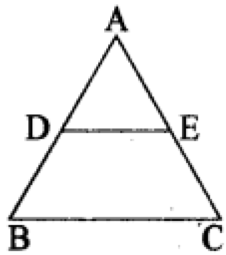
हल: प्रश्नानुसार दिया गया है $\frac{PK}{KS} = \frac{PT}{TR}$
अतः KT || SR



: ∠PKT = ∠PSR (संगत कोण) ....(i)

साथ ही यह दिया हुआ है कि
∠PKT = ∠PRS …………………(ii)
अतः ∠PRS = ∠PSR [(i) व (ii) से]
इसलिए PS = PR (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)
अर्थात् APSR एक समद्विबाहु त्रिभुज है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. दी गई आकृति में ABC एक त्रिभुज है। यदि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ सिद्ध कीजिए DE || BC



हल: दिया गया है–

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

या $$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

दोनों पक्षों में 1 घटाने पर

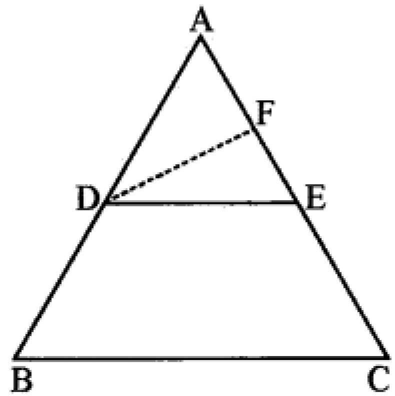
या $$\frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1$$

या $$\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

या $$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

अतः एक त्रिभुज की भुजाओं AB एवं AC को DE समान अनुपात में विभाजित करती है।



सिद्ध करना है-

DE || BC

रचना-

D से जाने वाली एक अन्य रेखा DF खींची।

उपपत्ति-

माना कि रेखा DE भुजा BC के समान्तर नहीं है तथा D से. होकर जाने वाली एक अन्य रेखा DF भुजा BC के समान्तर है।

अर्थात् DF || BC

अतः आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad ....(1)$$

लेकिन दिया हुआ है

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad ....(2)$$

समी. (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$$

दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$\frac{AF}{FC} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

या $$\frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

या $$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC}$$

या $$FC = EC$$

यह तब ही सम्भव है जब F एवं E दोनों बिन्दु सम्पाती हों, अर्थात् DF एवं DE सम्पाती रेखाएँ हैं

अतः DE || BC इतिसिद्धम्