वृत्त

Ex 12.1

प्रश्न 1. खाली स्थान भरिए

1. वृत्त का केन्द्र वृत्त के .... में स्थित है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
2. एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के .... में स्थित होता है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
3. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की .... ‘होती है।
4. एक चाप .... “होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।
5. एक वृत्त जिस तल पर स्थित होता है, उसे .... भागों में विभाजित करता है।

हल:

1. अभ्यन्तर
2. बहिर्भाग
3. व्यास
4. अर्द्धवृत्त
5. तीन

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

1. केन्द्र को वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
2. एक वृत्त में समान लम्बाई के चाप जीवाएँ होती हैं।
3. यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।
4. वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दोगुनी हो, वृत्त का व्यास है।
5. वृत्त एक समतलीय आकृति है।
6. एक तल पर स्थित उन बिन्दुओं का समूह जो उसी तल के एक के स्थिर बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं, एक व्यास कहलाता है।
7. वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित होता है, त्रिज्या कहलाती है।

हल:

1. सत्य, क्योंकि परिधि से केन्द्र तक की दूरी त्रिज्या होती है।
2. असत्य, क्योंकि चाप.व जीवा दो भिन्न-भिन्न सम्प्रत्यय हैं।
3. असत्य, क्योंकि तीन बराबर भागों में बाँटने पर सभी चाप समान होंगे।
4. सत्य, क्योंकि सबसे लम्बी जीवा व्यास होती है।

5. सत्य, क्योंकि यह द्विविमीय आकृति है।
6. असत्य-क्योंकि यह वृत्त की परिभाषा है न कि व्यास की।
7. असत्य, क्योंकि वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित हो, व्यास कहलाती है।

Ex 12.2

प्रश्न 1. निम्न में सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण सम्भव हो तो बताइए।

1. एक वृत्त की AB व CD क्रमशः 3 सेमी, एवं 4 सेमी. माप की जीवाएँ हैं जिनके द्वारा केन्द्र पर क्रमशः 70° एवं 50° के कोण निर्मित हैं।
2. एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लम्बाइयाँ 10 सेमी. और 8 सेमी. हैं, केन्द्र से क्रमशः 8 सेमी. और 5 सेमी. दूरियों पर स्थित हैं।
3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD में से प्रत्येक केन्द्र से 4 सेमी. दूरी पर हैं तब AB = CD है।
4. O और O′ केन्द्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब ∠AOB = ∠AO′B है।
5. तीन संरेख बिन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
6. दो बिन्दुओं A और B से होकर 4 सेमी, त्रिज्या का वृत्त खींचा जा सकता है, यदि AB = 8 सेमी. है।

हल:

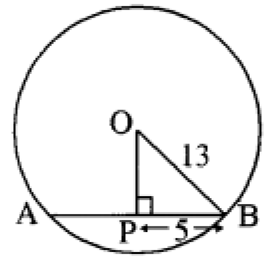
1. दिया गया कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि छोटी जीवा की अपेक्षा बड़ी जीवा केन्द्र पर बड़ा कोण अन्तरित करती है।
2. दिया गया कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि बड़ी जीवा केन्द्र से कम दूरी पर स्थित होती है।
3. यह कथन सत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि केन्द्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ बराबर हैं। अतः AB = CD होगा।
4. यह कथन सत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।
5. यह कथन असत्य हैं क्योंकि हम जानते हैं कि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेखें तीसरे बिन्दु से होकर नहीं जा सकता।
6. यह कथन सत्य है क्योंकि AB व्यास है।

प्रश्न 2. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी. है और इसकी एक जीवा की लम्बाई 10 सेमी. हो, तो इस जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ △OPB में OB = 13 सेमी.
AB = 10 सेमी.
OP ⊥ AB खींचा।

किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

$\therefore$ $PB = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$ सेमी.



अतः पाइथागोरस प्रमेय से

$OP^2 = OB^2 - PB^2$

या $OP^2 = 13^2 - 5^2$

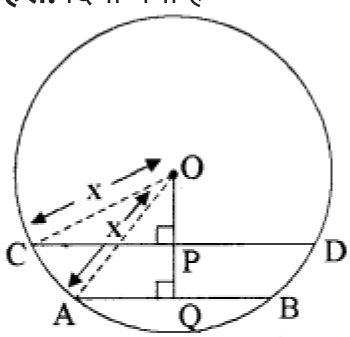
या $OP^2 = 169 - 25$

$OP = \sqrt{144} = 12$ सेमी.

अतः जीवा की केन्द्र से दूरी = 12 सेमी.

प्रश्न 3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी. और 12 सेमी. हैं, एक-दूसरे के समान्तर हैं तथा वे वृत्त के केन्द्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच 3 सेमी. की दूरी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है–



AB = 6 सेमी.
CD = 12 सेमी.
PQ = – 3 सेमी.
माना वृत्त की त्रिज्या = x सेमी.
समकोण त्रिभुज CPO में

माना $OP = y$ सेमी.

$CP = \frac{12}{2} = 6$ सेमी.

$(CO)^2 = (CP)^2 + (OP)^2$

$x^2 = (6)^2 + y^2$

$x^2 = 36 + y^2$ .....(1)

समकोण त्रिभुज OQA में

$$OA = x$$
$$OQ = OP + PQ$$
$$= (y + 3)$$

और $$AQ = \frac{6}{2} = 3 \text{ सेमी.}$$

अतः $$(AO)^2 = (AQ)^2 + (OQ)^2$$
$$(x)^2 = (3)^2 + (3 + y)^2$$
$$x^2 = 9 + (3 + y)^2 \qquad .....(2)$$

समी. (1) तथा (2) को बराबर करने पर

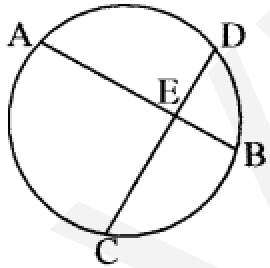
$$36 + y^2 = 9 + (3 + y)^2$$
$$\Rightarrow \quad 36 + y^2 = 9 + 9 + 6y + y^2$$
$$\Rightarrow \quad 36 = 18 + 6y$$
$$\Rightarrow \quad 18 = 6y$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{18}{6} = 3 \text{ सेमी.}$$

y का मान समी. (1) में रखने पर

$$x^2 = 36 + (3)^2 = 36 + 9$$
$$x^2 = 45$$
$$x = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

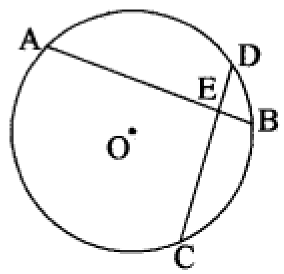
अतः वृत्त की त्रिज्या = $3\sqrt{5}$ सेमी. **उत्तर**

प्रश्न 4. आकृति में, दो समान जीवाएँ AB और CD एक-दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि चाप DA = चाप CB।



हल: दिया है-

वृत्त C (O, r) में जीवा AB = जीवा CD, परस्पर E पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है— $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CB}$

उपपत्ति— $\because$ जीवा AB = जीवा CD (दिया है)

$\Rightarrow$ BA = CD

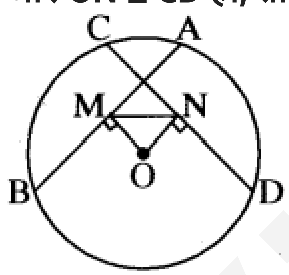
$\therefore$ लघुचाप $\overset{\frown}{BA}$ = लघुचाप $\overset{\frown}{CD}$

लेकिन $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BD}$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CB}$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 5. आकृति में, AB और CD एक वृत्त MA की समान जीवाएँ हैं। वृत्त का केन्द्र O है। OM ⊥ AB और ON ⊥ CD हो, तो सिद्ध कीजिए कि ∠OMN = ∠ONM



हल: दिया हुआ है-

AB और CD एक वृत्त की समान लम्बाई की दो जीवायें हैं। जिन पर क्रमशः OM और ON वृत्त के केन्द्र O से लम्ब हैं। MN लम्ब पादों को मिलाने वाला रेखाखण्ड है।

सिद्ध करना है–

∠OMN = ∠ONM

उपपत्ति-

AB व CD वृत्त की समान जीवायें हैं।

∴ OM = ON

(किसी वृत्त की समान लम्बाई की जीवाओं पर वृत्त के केन्द्र से उन पर लम्बों की लम्बाई बराबर होती है)

अब ΔOMN में

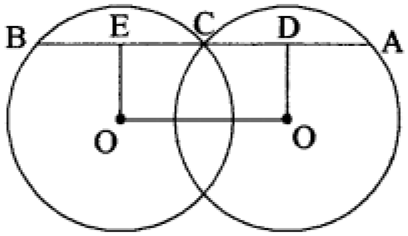
OM = ON

∴ OMN समद्विबाहु त्रिभुज है।

पुनः समद्विबाहु त्रिभुज में समान लम्बाई की भुजाओं के कोण बराबर होते हैं।

∠OMN = ∠ONM इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. आकृति में, O और O′ दिए गए वृत्तों के केन्द्र हैं। AB || OO′ है। सिद्ध B E D. कीजिए कि AB = 200′.



हल: उपपत्ति-

$AB \parallel OO'$, $OD \perp AB$, $O'E \perp AB$

$BE = EC$

$BC = 2EC$ …………..(1)

इसी प्रकार से $OD \perp CA$

∴ $CD = DA$

∴ $CA = 2CD$ …..(2)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$BC + CA = 2EC + 2CD = 2(EC + CD)$$

⇒ $AB = 2ED$ …..(3)

परन्तु रचनानुसार O'OED एक आयत है।

∵ $ED = O'O$

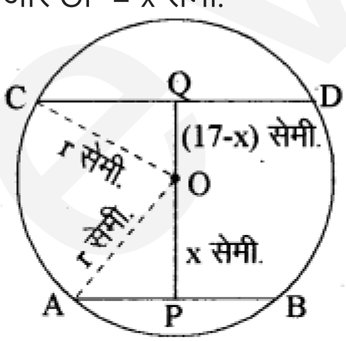
∴ $AB = 2OO'$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 7. AB और CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 1O सेमी., CD = 24 सेमी. और AB || CD है। AB एवं CD के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना O वृत्त का केन्द्र है। इसमें AB = 1O, CD = 24 सेमी. वृत्त की दो जीवायें हैं। इनके बीच की दूरी 17 सेमी. है।

माना वृत्त की त्रिज्या = r सेमी.

और OP = x सेमी.



$$AP = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी.}$$

$$CQ = \frac{24}{2} = 12 \text{ सेमी.}$$

समकोण त्रिभुज APO में

$$(AO)^2 = (AP)^2 + (OP)^2$$

$$(r)^2 = (5)^2 + (x)^2 \quad .....(1)$$

समकोण त्रिभुज OQC में

$$(CO)^2 = (OQ)^2 + (CQ)^2$$

$$r^2 = (17 - x)^2 + (12)^2 \quad .....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$(5)^2 + (x)^2 = (17 - x)^2 + (12)^2$$

$\Rightarrow$ $25 + x^2 = 289 - 34x + x^2 + 144$

$\Rightarrow$ $25 = -34x + 433$

$\Rightarrow$ $34x = 408$

$\Rightarrow$ $x = \frac{408}{34} = 12$ सेमी.

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(r)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$r^2 = (5)^2 + (12)^2$$

$$= 25 + 144 = 169$$

$r = \sqrt{169} = 13$ सेमी.

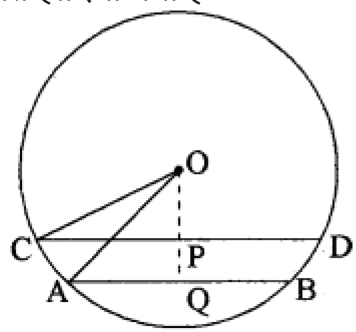
अतः वृत्त की त्रिज्या = 13 सेमी.

प्रश्न 8. 10 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त में, दो समान्तर जीवाओं की लम्बाई क्रमशः 12 सेमी. एवं 16 सेमी. है। AB और CD के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए, यदि जीवाएँ

(क) केन्द्र के एक ही ओर हों,

(ख) केन्द्र के विपरीत ओर हों।

हल: (क) जब जीवायें केन्द्र के एक ही ओर स्थित होंदिया गया है–



$$B = 12 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore \quad AQ = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी.}$$

$$CD = 16 \text{ सेमी.}$$

$$CP = \frac{16}{2} = 8 \text{ सेमी.}$$

त्रिज्या OC = OA = 10 सेमी.

समकोण त्रिभुज AQO में

$$(AO)^2 = (AQ)^2 + (OQ)^2$$

$$(10)^2 = (6)^2 + (OQ)^2$$

$$100 = 36 + (OQ)^2$$

$$\Rightarrow \quad (OQ)^2 = 64$$

$$\therefore \quad OQ = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी.}$$

अब समकोण त्रिभुज OPC में

$$(OC)^2 = (CP)^2 + (OP)^2$$

$$(10)^2 = (8)^2 + (OP)^2$$

$$100 = 64 + (OP)^2$$

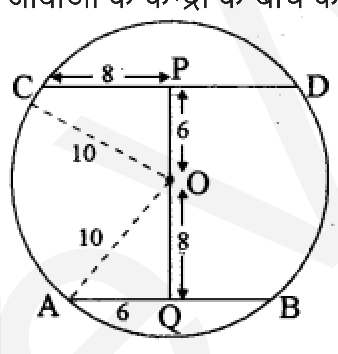
$$\Rightarrow \quad (OP)^2 = 36$$

$$\therefore \quad OP = \sqrt{36} = 6 \text{ सेमी.}$$

चित्र से $\quad PQ = OQ - OP$

$$= 8 - 6 = 2 \text{ सेमी.}$$

(ख) जब जीवायें केन्द्र के विपरीत ओर हों जब जीवायें केन्द्र के विपरीत ओर स्थित होती हैं तब उन जीवाओं के केन्द्रों के बीच की दूरी होगी।



= OP + OQ

= 6 + 8 = 14 सेमी.

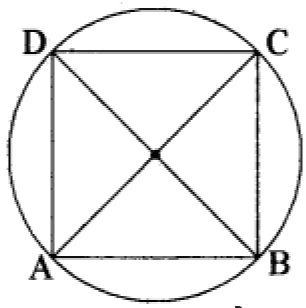
प्रश्न 9. एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित है कि AB = CD हो, तो सिद्ध कीजिए कि AC = BD

eVidyarthi

हल: दिया है-
चतुर्भुज ABCD के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित है कि . AB = CD

सिद्ध करना है-
AC = BD

उपपत्ति-



∴ AB = CD (दिया है)

$\therefore \quad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

(एक ही वृत्त में बराबर जीवा ⇔ बराबर चाप)

दोनों पक्षों में $\overset{\frown}{DA}$ जोड़ने पर

$$\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}$$

$\Rightarrow \quad \overset{\frown}{DAB} = \overset{\frown}{CDA}$

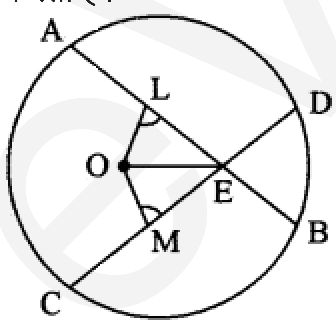
$\Rightarrow \quad DB = CA$

$\Rightarrow \quad BD = AC$

(एक ही वृत्त में बराबर चाप 4 बराबर जीवा) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के क्रमित भाग क्रमशः दूसरी जीवा . के संगत भागों के बराबर होते हैं।

हल: दिया है-केन्द्र O वाले वृत्त में जीवा AB = जीवा CD है। AB और CD एक-दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है-
AE = CE तथा BE =DE

रचना-

OL ⊥ AB और OM ⊥ CD खींचा तथा OE को मिलाया।

उपपत्ति-

$\because$ OL ⊥ AB

अत: $AL = LB = \frac{1}{2}AB$

इसी प्रकार OM ⊥ CD

अत: $CM = MD = \frac{1}{2}CD$

परन्तु AB = CD

अत: AL = CM

और LB = MD .....(1)

तथा OL = OM (समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं)

अत: समकोण ΔOLE और ΔOME में

कर्ण OE = कर्ण OE (उभयनिष्ठ है।)

तथा OL = OM

$\therefore$ ΔOLE ≅ ΔOME

अत: LE = ME

$\because$ AL = CM

जोड़ने पर–

LE + AL = ME + CM

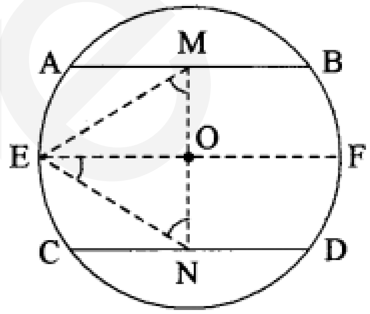
AE = CE

इसी प्रकार BE = DE

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

हल: दिया है-

AB व CD एक वृत्त की दो जीवायें हैं। जिसका केन्द्र O पर है और M व N, AB वे CD के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं।"



सिद्ध करना है-
रेखाखण्ड MN वृत्त के केन्द्र O में होकर गुजरता है।

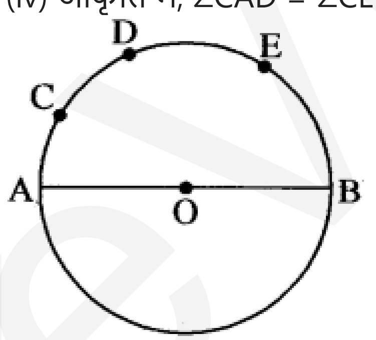
रचना-
AB या CD के समान्तर वृत्त की त्रिज्या EO खींचो जो आगे बढ़ाने पर वृत्त पर F पर कटती है और M व N को O से मिलाओ।

उपपत्ति-
∴ MA || OE और ∠AMO = 1 समकोण वृत्त के केन्द्र से जीवा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा जीवा के लम्बवत् होती है।
∴ ∠AMO +∠EOM = 2 समकोण
जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तब एक तरफ के आन्तरिक कोणों का योग = 2 समकोण होता है।
∴ ∠EOM = 1 समकोण
इसी प्रकार ∠EON = 1 समकोण
∴∠MON एक रेखीय कोण है।
अत: MN एक सरल रेखा है जो वृत्त के केन्द्र से गुजरती है और दोनों जीवा के लम्बवत् है।

Ex 12.3

प्रश्न 1. प्रत्येक के लिए सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

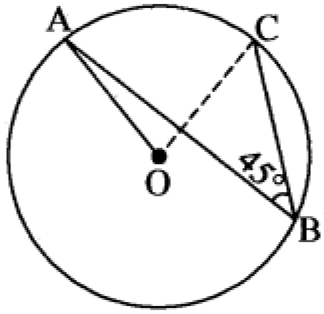
(i) किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण बराबर होते हैं।
(ii) आकृति में, AB एक वृत्त का व्यास, है और C वृत्त पर कोई बिन्दु है। तब $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।
(iii) आकृति में, यदि ∠ADE = 120° है तो ∠EAB = 30° है।
(iv) आकृति में, ∠CAD = ∠CED है।



हल: (i) यह कथन असत्य है क्योंकि हम यह जानते हैं कि किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण तभी बराबर होते हैं जब दोनों बिन्दु एक ही वृत्त खण्ड (दीर्घ या लघु) में स्थित हों।
(ii) यह कथन सत्य है क्योंकि अर्द्धवृत्त में बना कोण ∠C समकोण है। अर्थात् ∠C,= 90°

$AC^2 + BC^2 = AB^2$
(iii) यह कथन सत्य है क्योंकि आकृति में AD, DE, DB और EB को मिलाने के बाद ∠BDE = 120° – 90° = 30°। यहाँ ∠BDE एवं ∠EAB एक ही चापखण्ड पर बने कोण हैं अतः ∠BDE = ∠EAB = 30°
(iv) यह कथन सत्य है क्योंकि AC, CD, AD, DE व CE को मिलाने पर ∠CAD एवं ∠CED एक ही चापखण्ड में बनने वाले कोण हैं अतः
∠CAD = ∠CED.

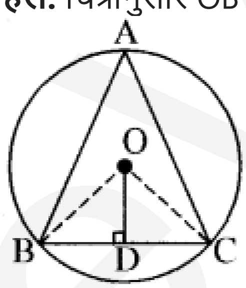
प्रश्न 2. आकृति में, ∠ABC = 45° है तो सिद्ध कीजिए OA ⊥ OC है।



हल: प्रश्नानुसार ∠ABC = 45° अर्थात् वृत्त के चाप AC से वृत्त की परिधि पर बनने वाला कोण ∠ABC = 45° है।
हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण को दोगुना होता है अर्थात् चित्रानुसार A व C से केन्द्र O पर बना कोण = 45° × 2 = 90° का होगा। इससे सिद्ध होता है। कि OA ⊥ OC.

प्रश्न 3. O त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है तथा D आधार BC का मध्यबिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि ∠BOD = ∠A है।

हल: चित्रानुसार OB तथा OC को मिलाया।

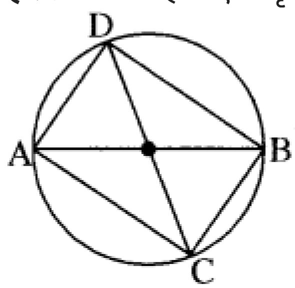


अब ΔOBD और ΔOCD से।
OB = OC (वृत्त की समान त्रिज्याएँ)
∠ODB = ∠ODC (प्रत्येक कोण समकोण)
OD = OD (समान भुजा)।
∴ ΔOBD = ΔOCD
⇒ ∠BOD = ∠COD 4

⇒ ∠BOC = 2∠BOD = 2∠COD
यहाँ चाप BC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण ∠BOC है तथा इसी चाप BC द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बना कोण ∠BAC = ∠A है।
∴ ∠BOC = 2∠A
⇒ 2∠BOD = 2∠A (∵ ∠BOC = 2∠BOD)
⇒ ∠BOD = ∠A (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गये हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠BAC =∠BDC है।

हल: सबसे पहले एक वृत्त खींचा जिसका व्यास AB है।



∵ ∠ADB = ∠ACB = 90°
अतः AB व्यास वाला वृत्त बिन्दु D व C से AK गुजरेगा।
अतः बिन्दु A, D, B व C चक्रीय बिन्दु हैं।
स्पष्ट है ∠BAC तथा ∠BDC एक ही वृत्त खण्ड के कोण हैं जो बिन्दु A, B, C तथा D से होकर जाता है।
∴ ∠BAC = ∠BDC (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 5. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC उसके केन्द्र पर क्रमशः 90° और 150° के कोण अन्तरित करती हैं। ∠BAC ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केन्द्र के विपरीत ओर स्थित हैं।

हल:

$\because \angle BOA = 90^\circ$

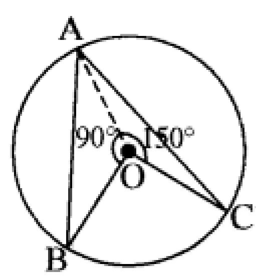
तथा $\angle AOC = 150^\circ$

$\therefore \angle BOC = 360^\circ - (\angle BOA + \angle AOC)$

$= 360^\circ - (90^\circ + 150^\circ)$

$= 360^\circ - 240^\circ$

$= 120^\circ$

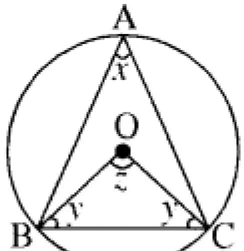


चापं BC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है। .. . BOC = 2∠BAC

अतः कोण BAC का मान 60° है।

प्रश्न 6. एक त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र O है। सिद्ध कीजिए कि ∠OBC + ∠BAC = 90° है।

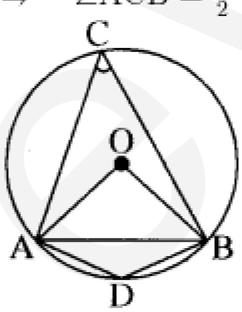
हल: माना कि ∠BOC = z और
∠BAC = x



∵ OB व OC वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।
∴ ∠OBC = ∠OCB = y
अतः z = 2x
चूँकि केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है।
ΔOBC में, ∠OBC + ∠OCB + ∠BOC = 180°
y + y + 2 = 180°
z + 2y = 180°
2x + 2 = 180°
x + y = 90°
∠BAC + ∠OBC = 90° इतिसिद्धम्।

प्रश्न 7. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखण्ड में किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

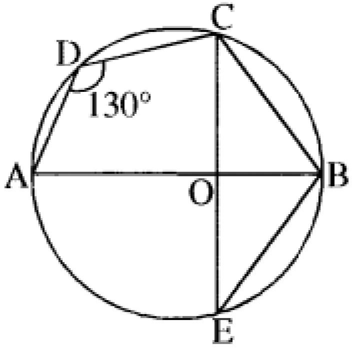
हल: माना कि AB एक जीवा है जो त्रिज्या OA या OB के बराबर है।
∴ OA = OB = AB
⇒ ΔAOB एक समबाहु त्रिभुज है।
∠AOB = 60°
$\Rightarrow \quad \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$



चूँकि केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगना होता है।
अब चाप ACB, केन्द्र O पर कोण बनाता है।
360° – 60° = 300°

$\therefore \quad \angle ADB = \frac{1}{2} \times 300^\circ = 150^\circ$
अतः जीवा AB द्वारा शीर्ष वृत्तखण्ड में किसी बिन्दु (D) पर अंतरित कोण का मान
= 150°

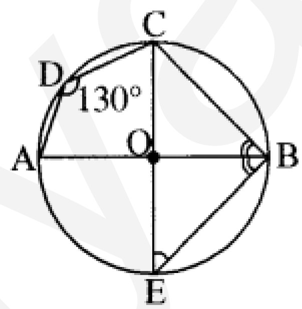
प्रश्न 8. आकृति में, ∠ADC = 130° और जीवा BC = जीवा BE है। ∠CBE ज्ञात कीजिए।



हल:

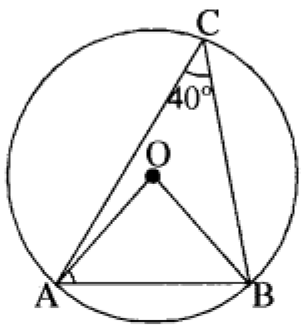
$\angle ADC = 130^\circ$
जीवा BC = जीवा BE
चूँकि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle B + \angle D = 180^\circ$
$\angle B + 130^\circ = 180^\circ$
$\angle B = 50^\circ$
$\therefore \quad \angle B = \angle CBO = 50^\circ$
$\angle CBE = \angle CBO + \angle OBE$
$= 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$
{∵ $\Delta BCO \cong \Delta BOE$ (भुजा-भुजा-भुजा से)



प्रश्न 9. आकृति में, ∠ACB = 40° है। ∠OAB ज्ञात कीजिए।

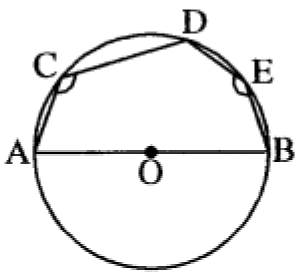
हल: वृत्त के किसी केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त की शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगना होता है।
दिया है ∠ACB = 40°
∠AOB = 2 × ∠ACB
= 2 × 40°
= 80°
माना कि ∠OAB = ∠OBA = x°



ΔOAB में,

$$\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180°$$
$$80° + x + x = 180°$$
$$2x = 100°$$
$$x = 50°$$
$$\therefore \quad \angle OAB = \angle OBA = 50°$$

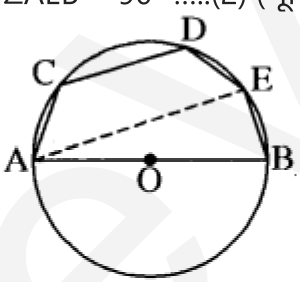
प्रश्न 10. आकृति में, AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिन्दु हैं। ∠ACD + ∠BED का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि ACDE एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle ACD + \angle AED = 180°$ .....(1)

$\angle AEB = 90°$ .....(2) (चूँकि अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता हैं।)



समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle ACD + \angle AED + \angle AEB = 180° + 90° = 270°$

Ex 12.4

प्रश्न 1. एक चक्रीय चतुर्भुज का एक कोण दिया गया है। सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए।
(i) 70°
(ii) 135°
(iii) $112\frac{1}{2}^\circ$
(iv) $\frac{3}{5}$ समकोण
(v) 165°

हल: (i) हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग = 180° होता है।
इसलिये दूसरा सम्मुख कोण = 180° – 70°
= 110° उत्तर
(ii) दूसरा सम्मुख कोण = 180° – 135°
= 45°
(iii) दूसरा सम्मुख कोण = 180° – $112\frac{1}{2}^\circ$
$= 67\frac{1}{2}^\circ = 67.5^\circ$
(iv) एक कोण का मान $=\frac{3}{5}$ समकोण
$= \frac{3}{5} \times 90 = 3 \times 18$
$= 54^\circ$
इसलिये दूसरा सम्मुख कोण = 180° – 54°
= 126°
(v) दूसरा सम्मुख कोण = 180° – 165°
= 15°

प्रश्न 2. चक्रीय चतुर्भुज का सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए यदि उसमें से एक कोण
(i) दूसरे का $= \frac{2}{7}x$ हो
(ii) दूसरे का $= \frac{11}{4}x$ हो।

हल: (i) माना एक कोण = x है

$\therefore$ दूसरा कोण $= \frac{2}{7}x$

प्रश्नानुसार $x + \frac{2}{7}x = 180^\circ$

$\Rightarrow \frac{9}{7}x = 180^\circ$

$\Rightarrow x = \frac{180^\circ \times 7}{9} = 20 \times 7 = 140^\circ$

अत: दूसरा कोण $= \frac{2}{7} \times x = \frac{2}{7} \times 140^\circ$
$= 40^\circ$

अतः चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण 140°, 40° होंगे।

हल: (ii) माना एक कोण = x है।

$$\text{दूसरा कोण} = \frac{11}{4}x$$

प्रश्नानुसार $x + \frac{11}{4}x = 180°$

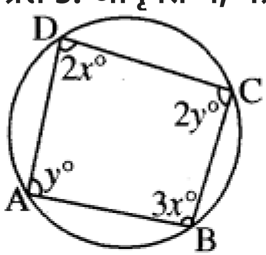
$\Rightarrow \frac{15}{4}x = 180°$

$\Rightarrow x = \frac{180 \times 4}{15}$

$= 12 \times 4 = 48°$

इसका दूसरा सम्मुख कोण = 180° – 48°
= 132°
अतः चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण 48°, 132°

प्रश्न 3. आकृति में, चक्रीय चतुर्भुज ABCD के चारों कोण ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

और $\angle B + \angle D = 180°$

$\therefore 2x° + 3x° = 180°$

$\Rightarrow 5x° = 180°$

$\Rightarrow x° = \frac{180°}{5} = 36°$

इसी प्रकार से

$y° + 2y° = 180°$

$\Rightarrow 3y° = 180°$

$\Rightarrow y° = \frac{180°}{3} = 60°$

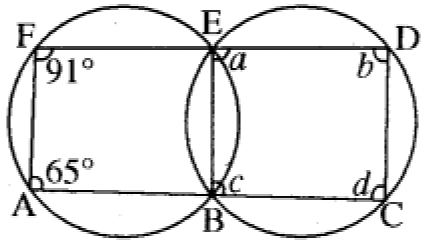
चित्र से $\angle A = y° = 60°$

$\angle B = 3x° = 3 \times 36° = 108°$

$\angle C = 2y° = 2 \times 60° = 120°$

$\angle D = 2x° = 2 \times 36° = 72°$

प्रश्न 4. आकृति में, कुछ कोणों को a, b, c और d से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



हल: दिये गये चित्र में ABEF एक चक्रीय चतुर्भुज है। इस कारण से

$\angle BAF + \angle BEF = 180°$

लेकिन $\angle BEF + \angle BED = 180°$

$\therefore \angle BAF + \angle BEF = \angle BEF + \angle BED$

$\therefore \angle BAF = \angle BED$

$\Rightarrow \boxed{65° = a}$ **उत्तर**

चित्र से $\angle a + \angle d = 180°$

$65° + \angle d = 180°$

$\therefore \angle d = 180° - 65° = 115°$

हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होते हैं।

इसी प्रकार से $\angle AFE = \angle CBE$

$91° = \angle C$

$\therefore \angle c = 91°$ **उत्तर**

हम जानते हैं– $\angle c + \angle b = 180°$

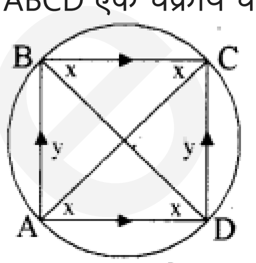
$\therefore \angle b = 180° - \angle c$

$= 180° - 91° = 89°$

प्रश्न 5. यदि चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, AD || BC हो, तो सिद्ध कीजिए कि ∠A = ∠D

हल: दिया हुआ है-

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें AD || BC



सिद्ध करना है-

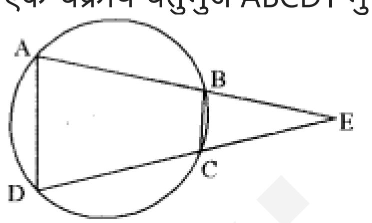
$\angle A = \angle D$

रचना-
A व B को क्रमशः C व D से मिलाओ।

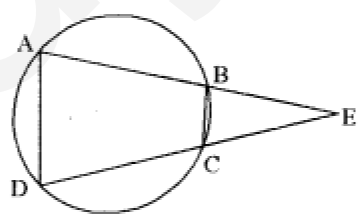
उपपत्ति-
यदि ∠BCA= x, तब ∠BDA = x
एक ही खण्ड के कोण हैं। आगे
BC || AD
∴ ∠CAD = ∠BCA = x एकान्तर कोण है।
या ∠ CAD = ∠BDA ....(1)
∠CAB = ∠BDC ....(2)
एक ही खण्ड के कोण हैं। समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर
∠CAD + ∠CAB = ∠BDA + ∠BDC
अर्थात् ∠A = ∠D इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। AB और DC बढ़ाये जाने पर E पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि AEBC और AEDA समरूप हैं।

हल; दिया है-
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD। भुजाएं AB और DC बढ़ाने पर E पर मिलती हैं।



सिद्ध करना है— ΔEBC ~ ΔEDA



उपपत्ति—ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
अत: ∠A = ∠BCE .....(1)
(बहिष्कोण अन्त:सम्मुख कोण के समान होता है)
तथा ∠D = ∠CBE .....(2)
ΔEBC और ΔEDA में
∠BCE = ∠A [बहिष्कोण अन्त: सम्मुख कोण
तथा ∠CBE = ∠ D के समान होता है]
∠AEO = ∠BEC (उभयनिष्ठ)
∴ ΔEBC ~ ΔEDA (कोण-कोण समरूपता)
(इतिसिद्धम्)

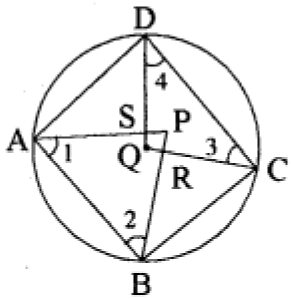
प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बनाया चतुर्भुज भी चक्रीय चतुर्भुज होता है।

eVidyarthi

हल: दिया है-
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोणों के समद्विभाजक AP, BP, CQ व DQ एक चतुर्भुज PRQS एक चक्रीय बनाते हैं।

सिद्ध करना है-
PRQS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति-
∵ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



$\therefore \quad \angle A + \angle C = 180^\circ$

या $\quad \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ$

या $\quad \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ \quad .....(1)$

इसी प्रकार

$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ \quad .....(2)$

APB में

$\angle 1 + \angle 2 + \angle P = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle P = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 \quad .....(3)$

इसी प्रकार

$\angle 3 + \angle 4 + \angle Q = 180^\circ$

$\angle Q = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4 \quad .....(4)$

समीकरण (3) तथा (4) को जोड़ने पर

$\angle P + \angle Q = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$

लेकिन समी. (1) तथा (2) से

$\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

तथा $\quad \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$

अतः मान रखने पर
= 360 – 90 – 90 = 180°
∴ चतुर्भुज PRQS के सम्मुख कोण संपूरक हैं।
∴ PRQS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 12

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 20 तक)

प्रश्न 1. 10 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. दूर स्थित जीवा की लम्बाई
(क) 16 सेमी.
(ख) 8 सेमी.
(ग) 4 सेमी.
(घ) 5 सेमी.

उत्तर: (क) 16 सेमी.

प्रश्न 2. 13 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त में 24 सेमी. लम्बी जीवा खींची गई है। जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी है
(क) 12 सेमी.
(ख) 5 सेमी.
(ग) 6.5 सेमी.
(घ) 12 सेमी.

उत्तर: (ख) 5 सेमी.

प्रश्न 3. लघुचाप का डिग्री माप होता है
(क) 180° से कम
(ख) 180° से अधिक
(ग) 360°
(घ) 270°

उत्तर: (क) 180° से कम

प्रश्न 4. दीर्घचाप का डिग्री माप होता है
(क) 180° से कम
(ख) 180° से अधिक
(ग) 360°
(घ) 90°

उत्तर: (ख) 180° से अधिक

प्रश्न 5. एक वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाएँ एक-दूसरे की होती हैं
(क) दुगुनी
(ख) तिगुनी
(ग) आधी
(घ) बराबर

उत्तर: (घ) बराबर

प्रश्न 6. एक वृत्त के किसी चाप का डिग्रीमाप 180° है, वह चाप है
(क) दीर्घ चाप
(ख) लघु चाप
(ग) वृत्त
(घ) अर्द्धवृत्त

उत्तर: (घ) अर्द्धवृत्त

प्रश्न 7. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है
(क) एक
(ख) दो।
(ग) शून्य
(घ) अनन्त

उत्तर: (क) एक

प्रश्न 8. यदि किसी वृत्त में चाप AB = चाप BA हों, तो चाप है|
(क) दीर्घ चाप
(ख) लघु चाप
(ग) अर्द्ध वृत्त
(घ) वृत्त

उत्तर: (ग) अर्द्ध वृत्त

प्रश्न 9. यदि वृत्त का व्यास दो जीवाओं में से प्रत्येक को समद्विभाजित करे तो जीवाएँ होंगी
(क) समान्तर
(ख) लम्बवत्
(ग) प्रतिच्छेदी
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर: (क) समान्तर

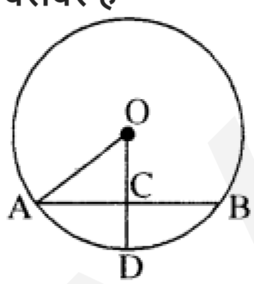
प्रश्न 10. यदि सर्वांगसम वृत्तों में दो चाप बराबर हों, तो उनकी संगत जीवाएँ होंगी
(क) समान्तर
(ख) समान
(ग) लम्बवत्
(घ) प्रतिच्छेदी

उत्तर: (ख) समान

प्रश्न 11. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि AD = 34 सेमी., AB = 30 सेमी. हैं, तो वृत्ते के केन्द्र से AB की दूरी है
(क) 17 सेमी.
(ख) 15 सेमी.
(ग) 4 सेमी.
(घ) 8 सेमी.

उत्तर: (घ) 8 सेमी.

प्रश्न 12. आकृति में, यदि OA = 5 सेमी., AB = 8 सेमी. तथा OD जीवा AB पर लम्ब है, तो CD बराबर है



(क) 2 सेमी.
(ख) 3 सेमी.
(ग) 4 सेमी.
(घ) 5 सेमी.

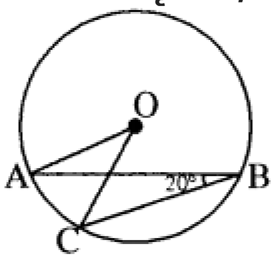
उत्तर: (क) 2 सेमी.

प्रश्न 13. यदि AB = 12 सेमी., BC = 16 सेमी. और AB रेखाखण्ड BC पर लम्ब है, तो A, B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है
(क) 6 सेमी.
(ख) 8 सेमी.

(ग) 10 सेमी.
(घ) 12 सेमी.

उत्तर: (ग) 10 सेमी.

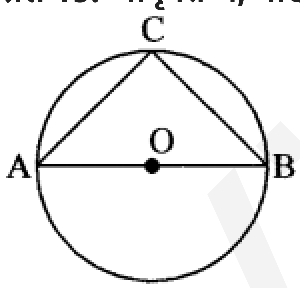
प्रश्न 14. आकृति में, यदि ∠ABC = 20° है, तो। ∠AOC बराबर है



(क) 20°
(ख) 40°
(ग) 60°
(घ) 10°

उत्तर: (ख) 40°

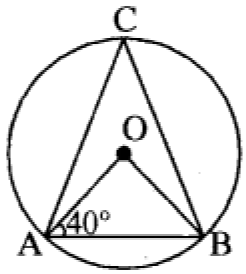
प्रश्न 15. आकृति में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा AB = BC है, तो ∠CAB बराबर है



(क) 30°
(ख) 60°
(ग) 90°
(घ) 45°

उत्तर: (घ) 45°

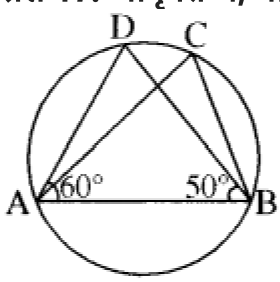
प्रश्न 16. आकृति में, यदि ∠OAB = 40° है, तो ∠ACB बराबर है



(क) 50°
(ख) 40°
(ग) 60°
(घ) 70°

उत्तर: (क) 50°

प्रश्न 17. आकृति में, यदि ∠DAB = 60°, ∠ABD = 50° है, तो ∠ACB बराबर है



(क) 60°
(ख) 50°
(ग) 70°
(घ) 80°

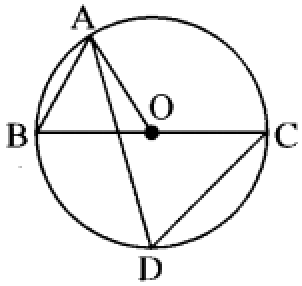
उत्तर: (ग) 70°

प्रश्न 18. चतुर्भुज की एक भुजा AB उसके परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा ∠ADC = 140° है। तब, ∠BAC बराबर है

(क) 80°
(ख) 50°
(ग) 40°
(घ) 30°

उत्तर: (ख) 50°

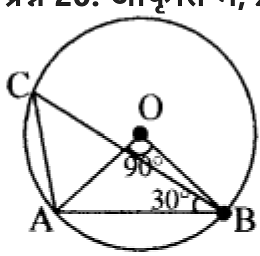
प्रश्न 19. आकृति में, BC वृत्त का व्यास है तथा ∠BA0 = 60° है। तब, ∠ADC बराबर



(क) 30°
(ख) 45°
(ग) 60°
(घ) 120°

उत्तर: (ग) 60°

प्रश्न 20. आकृति में, ∠AOB = 90° और ∠ABC = 30° है। तब, ∠CAO बराबर है



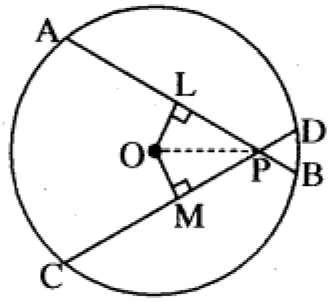
(क) 30°
(ख) 45°
(ग) 90°
(घ) 60°

उत्तर: (घ) 60°

प्रश्न 21. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक्पृथक् बराबर होते हैं।

हल: दिया है-
AB व CD दो बराबर जीवाएँ, जो कि P बिन्दु पर काटती हैं। सिद्ध करना है–
AP = CP
BP = DP
रचना-
OP को जोड़ते हैं एवं
OL ⊥ AB

OM ⊥ CD खींचते हैं।



उपपत्ति-

∵ OL ⊥ AB और OM ⊥ CD

∴ L एवं M, AB व CD के मध्य बिन्दु हैं।

समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।

अत: $OL = OM$

ΔOPL एवं ΔOMP में-

$OL = OM$

$\angle OLP = \angle OMP$ (90°)

$OP = OP$

∴ $\Delta OLP \cong \Delta OMP$ (समकोण-विकर्ण-भुजा नियम से)

⇒ $LP = MP$ एवं $\angle OPL = \angle OPM$

अब $AB = CD$

⇒ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

⇒ $AL = CM$

⇒ $AL + LP = CM + LP$

⇒ $AL + LP = CM + MP$ $(\because LP = MP)$

⇒ $AP = CP$

पुन: $AB - BP = CD - PD$

$BP = DP$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 22. यदि P, Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लम्ब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P, Q, R और D चक्रीय हैं।

हल: दिया है-P, Q, R क्रमशः BC, CA एवं AB भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लम्बे हैं।

सिद्ध करना है-

P, Q, R एवं D चक्रीय है।

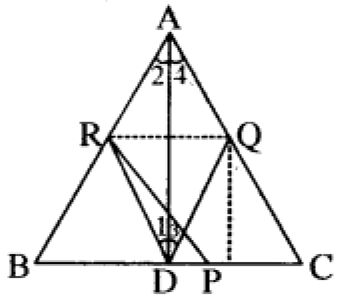
रचना-

RD, QD, PR एवं PQ को जोड़ा।

उपपत्ति-

RP, R व P को जोड़ती है, जो कि AB व BC को मध्य बिन्दु है

∴ RP || AC (मध्य बिन्दु प्रमेय)। इसी प्रकार, PQ || AB
∴ ARPQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
∴ ∠RAQ = ∠RPQ .....(1) (विपरीत कोण)



ΔABD एक समकोण त्रिभुज है एवं DR एक माध्यिका है।

$$\therefore \left.\begin{array}{l} RA = DR \\ \angle 1 = \angle 2 \end{array}\right\} \quad .....(2)$$

इसी प्रकार, $\angle 3 = \angle 4$ .....(3)

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर,

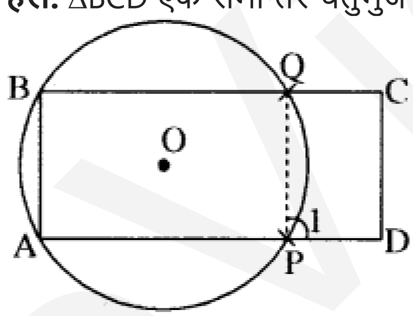
$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$$

$$\angle RDQ = \angle RAQ = \angle RPQ$$

∴ P, Q, R एवं D चक्रीय है। **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 23. ΔBCD एक समान्तर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।

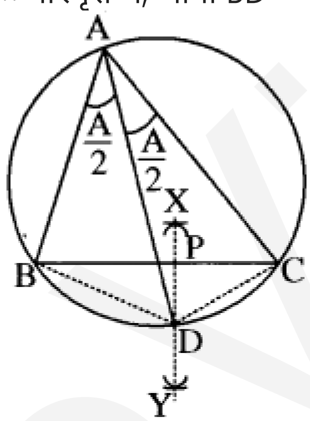
हल: ΔBCD एक समान्तर चतुर्भुज है। वृत्त खींचा जो AD को P एवं BC को BP Q पर काटता है।



PQ को जोड़ते हैं।
ΔPQB एक चक्रीय चतुर्भुज की A भुजा AP को D तक बढ़ाया।
∴ बहिष्कोण ∠1 = आन्तरिक कोण ∠B
∴ BA || CD एवं BC उसको काटता है।
∠B +∠C = 180°
∠1 +∠C = 180° [समीकरण (1) से]
∴ PDCQ एक चक्रीय चतुर्भुज है।
अतः P, Q, C एवं D चक्रीय है।

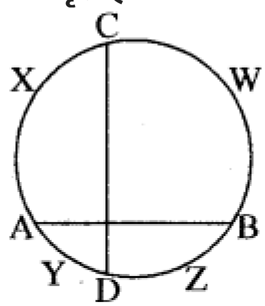
प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लम्ब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं, तो उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हल: दिया है-
ΔABC के आधार BC का लम्ब समद्विभाजक XY है। ABDC, ΔABC का परिवृत्त है। लम्ब समद्विभाजक XY परिवृत्त को D पर काटता है। XY, BC को M पर काटता है।
सिद्ध करना है-
∠A को समद्विभाजक भी बिन्दु D से होकर जाता है।
रचना-
DB तथा DC को मिलाया।
उपपत्ति-
∵ XY, BC को लम्ब समद्विभाजक है और यह परिवृत्त को बिन्दु D पर काटता है।
∴ बिन्दु D, परिवृत्त पर भी है और XY पर भी।
समकोण ΔBDM और ΔCDM में
BM = CM (XY, BC का लम्ब समद्विभाजक है)
MD = MD (उभयनिष्ठ भुजा है)
∠BMD = ∠CMD (∵ XY ⊥ BC)
भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता के गुणधर्म से,
ΔBDM = ΔCDM
BD = CD
∵ बिन्दु D, परिवृत्त पर भी स्थित है।
∴ परिवृत्त में, जीवा BD = जीवा CD

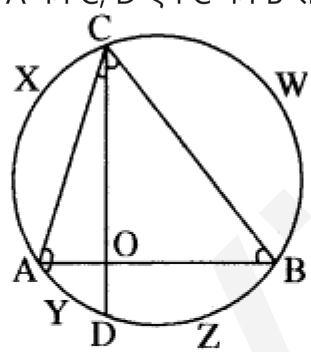


∴ चाप BD = चाप CD (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ) किसी वृत्त की समान जीवाएँ समान चाप काटती हैं।
∴ चाप BD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण = चाप CD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण
∠BAD = ∠CAD
∴ AD, ∠A का समद्विभाजक है।
अतः ∠A का समद्विभाजक AD भी बिन्दु D से होकर जाता है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 25. यदि किसी वृत्त AYD∠BWCX की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती। हैं (आकृति देखिए), तो सिद्ध कीजिएं कि चाप CXA + चाप D∠B = चाप AYD + चाप BWC = एक अर्धवृत्त है।



हल: दिया है-
किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB व At CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।
सिद्ध करना है-
चाप CXA + चाप D∠B
= चाप AYD + चाप BWC
= एक अर्द्धवृत्त
रचना-
A को C, D एवं C को B से। मिलाते हैं।

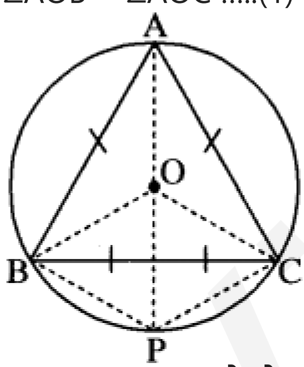


उपपत्ति-
दो जीवाएँ AB वे CD समकोण पर बिन्दु O पर काटती हैं। ΔAOD में-
∠DAO + ∠ODA + ∠AOD = 180°
∠DA0 + ∠ODA + 90° = 180°
∠DAO + ∠ODA = 90°
चाप $\widehat{DZB}$ एवं चाप $\widehat{CXA}$ द्वारा क्रमश: ∠DAO एवं ∠ODA बनाते हैं।
∴ चाप $\widehat{DZB}$ + चाप $\widehat{CXA}$ = 90° .....(1)
अब ADOB में-
∠BDO + ∠OBD + ∠DOB = 180°
∠BDO +∠OBD + 90° = 180°
∠BDO + ∠OBD = 90°
पुनः चाप $\widehat{BWA}$ एवं चाप $\widehat{AYD}$ द्वारा क्रमशः ∠BDO एवं ∠OBD बनाते हैं।
∴ चाप $\widehat{AYD}$ + चाप AYD = 90° .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,
चाप $\widehat{DZB}$ + चाप $\widehat{CXB}$ = चाप $\widehat{BWC}$ + चाप $\widehat{AYD}$ = 90°
हम जानते हैं कि किसी वृत्त का चाप, किसी बिन्दु पर समकोण बनाता है जो कि एक अर्द्धवृत्त के वृत्तखण्ड में वैकल्पिक होता है।
अतः चाप $\widehat{CXA}$ + चाप $\widehat{DZB}$ = चाप $\widehat{AYD}$ + चाप $\widehat{BWC}$ = अर्द्धवृत्त

प्रश्न 26. यदि ABC किसी वृत्त के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है, जो B या C के सम्पाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।

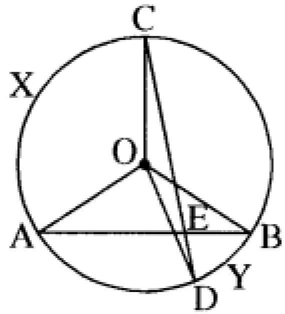
हल: दिया है-
ABC किसी वृत्त के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघुचाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है जो B या C के सम्पाती नहीं है।
सिद्ध करना है-
PA, कोण BPC का समद्विभाजक है। A
उपपत्ति-
वृत्त की समान जीवाएँ, वृत्त के केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।
∴ जीवा AB = जीवा AC
∠AOB = ∠AOC .....(1)



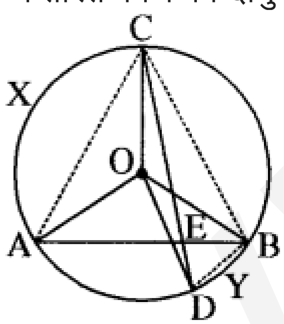
एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।
∴ ∠APC = $\frac{1}{2}$ ∠AOC .....(2)
एवं ∠APB = $\frac{1}{2}$ ∠AOC .....(3)
समीकरण (2) तथा (3) को बराबर करने पर
∴ ∠APC = ∠APB.
अतः PA, कोण BPC को समद्विभाजक है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 27. आकृति में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠AEC = $\frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर

अन्तरित कोण) है।



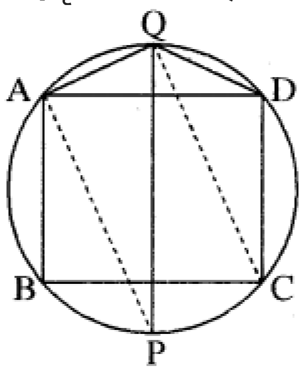
हल: दिया है-
AB एवं CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं।
सिद्ध करना है-
∠AEC = $\frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण)
रचना-
AC, BC एवं BD को मिलाते हैं।
उपपत्ति-
AB एवं CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं। जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं।
हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



चाप CXA, केन्द्र पर ∠AOC एवं शेष भाग पर ∠ABC अन्तरित करता है।
∠AOC = 2∠ABC .....(1)
इसी प्रकार, ∠BOD = 2∠BCD ....(2)
समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,
∠AOC + ∠BOD = 2(∠ABC + ∠BCD) ....(3)
त्रिभुज का बहिण, आन्तरिक विपरीत कोणों के योग के बराबर होता है। इसलिए त्रिभुज CEB में,
∠AEC = ∠ABC + ∠BCD . .....(4)
समीकरण (3) व (4) से,
∠AOC + ∠BOD = 2∠AEC
= ∠AEC = $\frac{1}{2}$ (∠AOC + ∠BOD)
अतः ∠AEC = $\frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर आन्तरिक कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण)

प्रश्न 28. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।

हल: दिया है-
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।
सिद्ध करना है-
PQ वृत्त का व्यास है।
रचना-
AP, QC, QD एवं AQ को। मिलाते हैं।
उपपत्ति-
PQ वृत्त का व्यास होने के लिए हमें सिद्ध करना होगा



∠PAQ = 90°
ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है
∠A+∠C = 180°
$\frac{1}{2}$ ∠A + $\frac{1}{2}$ ∠C = 90°
∠PAD + ∠QCD = 90° ....(1)
लेकिन कोण QCD और कोण QAD, जीवा QD के वृत्त के समान वृत्तखण्ड के कोण हैं।
∴ ∠QCD = ∠QAD .....(2)
समीकरण (1) व (2) से,
∠PAD + ∠QAD = 90°
∠PAQ = 90°
∠PAQ, एक अर्द्धवृत्त में स्थित है।
अतः PQ इस वृत्त का व्यास है।

प्रश्न 29. एक वृत्त की त्रिज्या 2 cm. है। 2 cm. लम्बाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त-खण्डों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खण्ड के किसी बिन्दु पर बना कोण 45° है।

हल: दिया है:
वृत्त की त्रिज्या = 2 सेमी. तथा 2 सेमी. वाली जीवा द्वारा इस वृत्त को दो वृत्त खण्डों में विभाजित किया जाता

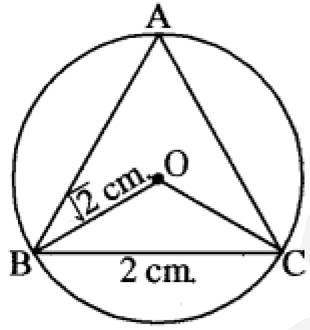
है।

सिद्ध करना है-

2 सेमी. वाली जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खण्ड के किसी बिन्दु पर ना कोण 45° है।

अर्थात् $\angle BAC = 45°$

रचना—OB और OC को मिलाया।



उपपत्ति—जीवा $BC = 2$ सेमी.

$\Rightarrow \quad BC^2 = 2^2 = 4 = 2 + 2$

$= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \quad BC^2 = OB^2 + OC^2$

ΔBOC में,

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$\therefore \angle BOC = 90°$ (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

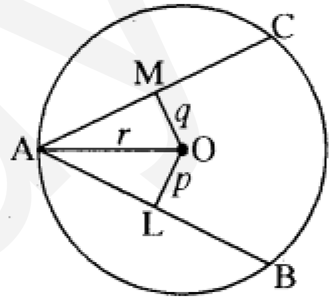
अब चाप BC वृत्त के केन्द्र 0 पर $\angle BOC$ तथा शेष भाग पर $\angle BAC$ अन्तरित करता है।

प्रश्न 30. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 2AC है। यदि p और q क्रमशः केन्द्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

हल: दिया है-

AB और AC त्रिज्या r वाले वृत्त की जीवाएँ हैं ताकि AB = 2AC.

सिद्ध करना है—$4q^2 = p^2 + 3r^2$



उपपत्ति— $AB = 2AC$ (दिया है)

$OL \perp AB$

$OM \perp AC$.

$OL = p$ और $OM = q$

वृत्त के केन्द्र से डाला गया लम्ब, जीवा को

त करता है।

समकोण ΔAOL में,

evidyarthi

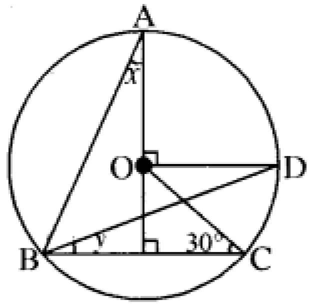
$$r^2 = AL^2 + p^2$$
$$AL^2 = r^2 - p^2$$
$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = r^2 - p^2 \Rightarrow \frac{1}{4}AB^2 = r^2 - p^2$$
$$\Rightarrow \quad AB^2 = 4(r^2 - p^2)$$
$$\Rightarrow \quad (2AC)^2 = 4(r^2 - p^2) \qquad (\because AB = 2AC)$$
$$\Rightarrow \quad 4AC^2 = 4(r^2 - p^2) \qquad .....(1)$$
$$\Rightarrow \quad AC^2 = r^2 - p^2$$

पुन: ΔAOM में,
$$r^2 = AM^2 + q^2$$
$$\Rightarrow \quad AM^2 = r^2 - q^2$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = r^2 - q^2 \qquad (\because AM = AC = \frac{1}{2}AC)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}AC^2 = r^2 - q^2$$
$$\Rightarrow \quad AC^2 = 4(r^2 - q^2) \qquad .....(2)$$

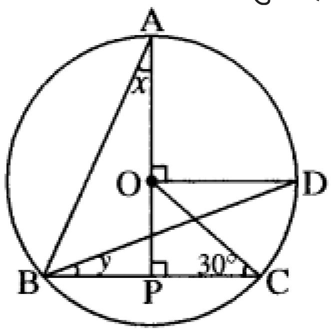
समीकरण (1) तथा (2) को बराबर करने पर
$$r^2 - p^2 = 4(r^2 - q^2)$$
$$\Rightarrow \quad r^2 - p^2 = 4r^2 - 4q^2$$
$$\Rightarrow \quad 4q^2 = 4r^2 - r^2 + p^2$$
$$\Rightarrow \quad 4q^2 = 3r^2 + p^2$$
या $4q^2 = p^2 + 3r^2$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 31. आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है। और ∠BCO = 30° है।r और y ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\angle BCO = 30°$$
समकोण त्रिभुज OCP में,
$$\angle POC = 180° - (\angle OPC + \angle PCO)$$
$$\Rightarrow \quad \angle POC = 180° - (90° + 30°) = 60°$$
$$\angle AOD = 90° \qquad \text{(दिया है)}$$
$$\therefore \quad \angle AOD + \angle DOP = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \angle DOP = 180° - \angle AOD$$
$$= 180° - 90° = 90°$$
अत: $\angle COD = 90° - \angle POC$
$$= 90° - 60° = 30°.$$



हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र मे4 पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



$\therefore \quad \angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \times 30° = 15°$

तथा $\quad \angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$

अब ΔABP में,

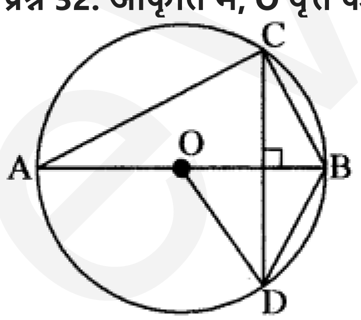
$x + (45° + y) + 90° = 180°$

$x + 45° + 15° + 90° = 180°$

$x = 180° - 150° = 30°$

अतः $x = 30°$ तथा $y = 15°$.

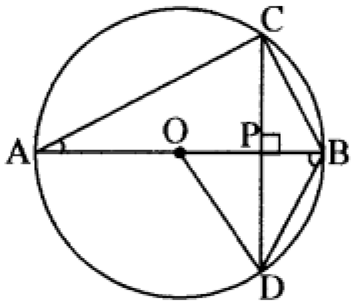
प्रश्न 32. आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है। BD = OD और CD ⊥ AB है। ∠CAB ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है-

BD = OD

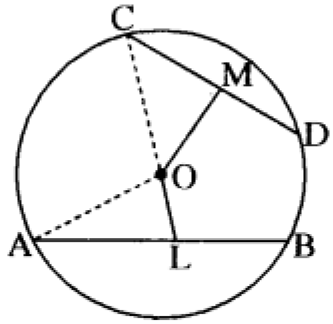
CD ⊥ AB
ज्ञात करना है-
∠CAB. AODB में,
BD = OD (दिया है)
∠DOB = ∠DBO (त्रिभुज के समान भुजाओं के विपरीत कोण समान होते हैं।)
ΔODP एवं ΔBDP में,
∠DOP = ∠DBP (∵ 2DOB = ∠DBO)
∠DPO = ∠DPB (प्रत्येक 90°)
OD = BD (दिया है)।



∴ ΔODP = ΔBDP (AAS नियम से)
⇒ ∠ODP = ∠BDP .....(1) (CPCT)
पुन: OD = OB (समान वृत्त की त्रिज्याएँ)
लेकिन OD = BD
⇒ OB = OD = BD, ∴ ΔOBD एक समबाहु त्रिभुज है।
∴ ∠ODB = 60° =
$\Rightarrow \quad \angle \mathrm{BDP} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{ODB}$ [समीकरण (1) से)
$\Rightarrow \quad \angle BDP = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$
या ∠CDB = 30°
वृत्त के समान वृत्तखण्ड में कोण समान होते हैं अतः
∠CAB = ∠CDB = 30°.

प्रश्न 33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है।

हल: माना AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं।
OL ⊥ AB, OM ⊥ CD.
ताकि OL ∠ OM.
OA व OC को मिलाया।



वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाले गये लम्ब , इसको समद्विभाजित करता है।

∴ AL = $\frac{1}{2}$ AB तथा CM = $\frac{1}{2}$ CD.

ΔOAL तथा ΔOCM में

$OA^2 = OL^2 + AL^2$ तथा $OC^2 = OM^2 + CM^2$

$$AL^2 = OA^2 - OL^2 \quad .....(1)$$

$$CM^2 = OC^2 - OM^2 \quad .....(2)$$

$$OL < OM$$

या

$$OL^2 < OM^2$$

$$OA^2 - OL^2 > OA^2 - OM^2$$

$$OA^2 - OL^2 > OC^2 - OM^2 \quad (\because OA^2 = OC^2)$$

$$AL^2 > CM^2 \quad \text{[समीकरण (1) व (2) से]}$$

$$AL > CM$$

$$2AL > 2CM$$

∴

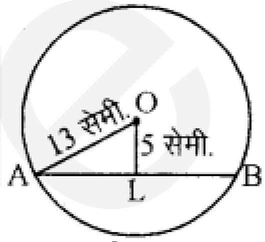
$$AB > CD.$$

अतः वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है। (इतिसिद्धम्)

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. वृत्त C (O, 13) की एक जीवा की केन्द्र से दूरी 5 सेमी. है, जीवा की लम्बाई है 15 सेमी.

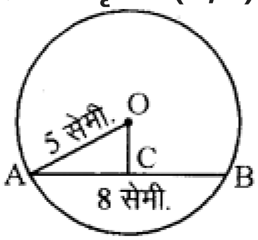


(क) 24 सेमी.
(ख) 20 सेमी.

(ग) 16 सेमी.
(घ) 12 सेमी.

उत्तर: (क) 24 सेमी.

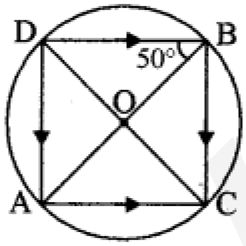
प्रश्न 2. वृत्त C (O, 5) की जीवा AB = 8 सेमी. है, जीवा AB की 0 से दूरी है



(क) 5 सेमी.
(ख) 4 सेमी.
(ग) 3 सेमी.
(घ) 1 सेमी.

उत्तर: (ग) 3 सेमी.

प्रश्न 3. AB और CD वृत्त C (0, r) के व्यास हैं। 8 सेमी. जहां AC || DB और DA || BC यदि ∠OBD = 50° हो तो ∠ AOC का मान।



(क) 50°
(ख) 60°
(ग) 70°
(घ) 80°

उत्तर: (घ) 80°

प्रश्न 4. यदि किसी वृत्त में m(AB) = m(BA) है तो वह चाप है
(क) दीर्घ चाप
(ख) लघु चाप
(ग) अर्ध वृत्त
(घ) वृत्त

उत्तर: (ग) अर्ध वृत्त

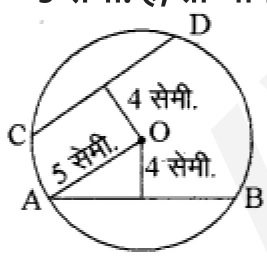
प्रश्न 5. वृत्त C (0, 3) तथा C (0, 3) में जीवा AB = जीवा CD है। यदि $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BA})$ हो तो का मान है
(क) 70°
(ख) 140°
(ग) 210°
(घ) 290°

उत्तर: (घ) 290°

प्रश्न 6. वृत्त में 24 सेमी. लम्बाई की एक जीवा केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर है। वृत्त का व्यास होगा
(क) 20 सेमी.
(ख) 13 सेमी.
(ग) 26 सेमी.
(घ) 50 सेमी.

उत्तर: (ग) 26 सेमी.

प्रश्न 7. दी गई आकृति में AB तथा CD दो जीवाएँ वृत्त के केन्द्र O से 4 सेमी. की दूरी पर हैं। यदि OA = 5 सेमी. है, तो जीवा CD की लम्बाई है



(क) 3 सेमी.
(ख) 4 सेमी.
(ग) 5 सेमी.
(घ) 6 सेमी.

उत्तर: (घ) 6 सेमी.

प्रश्न 8. बराबर वृत्तों में बराबर चापों द्वारा केन्द्रों पर अन्तरित कोण होते हैं
(क) बराबर
(ख) आधा

(ग) दुगुना
(घ) चौगुना

उत्तर: (क) बराबर

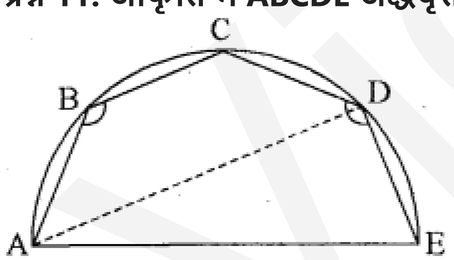
प्रश्न 9. एक ही वृत्त में बराबर जीवाओं द्वारा काटे गए चाप होते हैं
(क) आधा
(ख) बराबर
(ग) दुगुना
(घ) तिगुना

उत्तर: (ख) बराबर

प्रश्न 10. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बराबर व समान्तर हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. तथा जीवा की लम्बाई 6 सेमी. है तो दोनों जीवाओं के मध्य की दूरी होगी
(क) 5 सेमी.
(ख) 6 सेमी.
(ग) 8 सेमी.
(घ) 10 सेमी.

उत्तर: (ग) 8 सेमी.

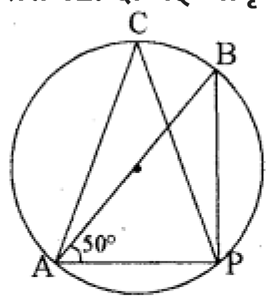
प्रश्न 11. आकृति में ABCDE अर्द्धवृत्त में। बना पंचभुज है, तो ∠ABC + ∠CDE का मान है



(क) 180°
(ख) 216°
(ग) 270°
(घ) 240°

उत्तर: (ग) 270°

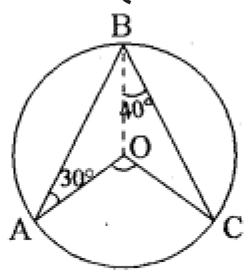
प्रश्न 12. दी गई आकृति में, AB वृत्त का व्यास है तथा ∠PAB = 50° हो तो ∠PCA का मान है



(क) 40°
(ख) 90°
(ग) 50°
(घ) 60°

उत्तर: (क) 40°

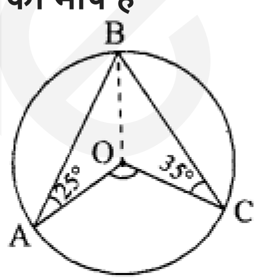
प्रश्न 13. दी गई आकृति में 0 वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠OAB = 30° तथा ∠OBC = 40° हो तो ∠AOC का मान है



(क) 70°
(ख) 130°
(ग) 140°
(घ) 150°

उत्तर: (ग) 140°

प्रश्न 14. दी गई आकृति में 0 वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠OAB = 25° तथा ∠OCB = 35° हैं, तो ∠AOC का माप है



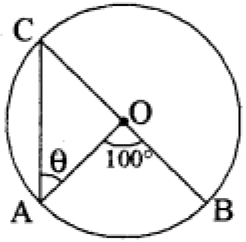
(क) 50°

eVidyarthi

(ख) 70°
(ग) 100°
(घ) 120°

उत्तर: (घ) 120°

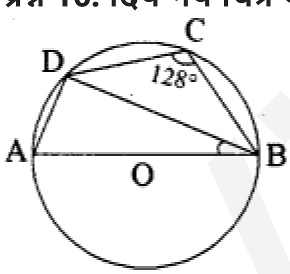
प्रश्न 15. दी गई आकृति में 0 वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠AOB = 100° है, तो कोण 8 का मान है



(क) 40°
(ख) 50°
(ग) 60°
(घ) 90°

उत्तर: (ख) 50°

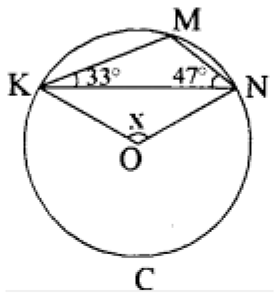
प्रश्न 16. दिये गये चित्र में, AB वृत्त का व्यास है। यदि ∠BCD = 128° हो, तो ∠ABD का मान है



(क) 26°
(ख) 38°
(ग) 52°
(घ) 64°

उत्तर: (ख) 38°

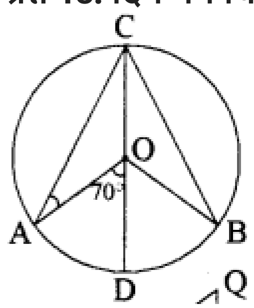
प्रश्न 17. दिये गये चित्र में, 0 वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠MKN = 33° एवं ∠MNK = 47° है तो × का मान है



(क) 80°
(ख) 100°
(ग) 160°
(घ) 200°

उत्तर: (ग) 160°

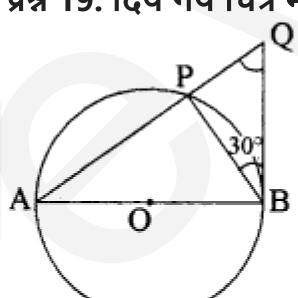
प्रश्न 18. दिये गये चित्र में, 0 वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠AOD = 70° हो, तो ∠OAC है



(क) 20°
(ख) 35°
(ग) 55°
(घ) 70°

उत्तर: (ख) 35°

प्रश्न 19. दिये गये चित्र में, AB वृत्त का व्यास है। यदि ∠PBQ = 30° है, तो ∠PQB का मान है



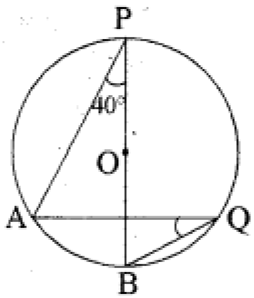
(क) 30°
(ख) 40°

©Vidyarthi

(ग) 50°
(घ) 60°

उत्तर: (घ) 60°

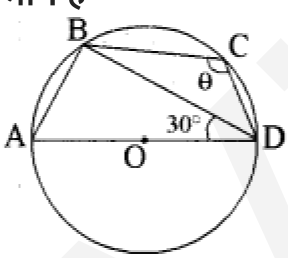
प्रश्न 20. दिये गये चित्र में, ‘O’ वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠APB = 40° है, तो ∠AQB का मान है



(क) 60°
(ख) 50°
(ग) 40°
(घ) 30°

उत्तर: (ग) 40°

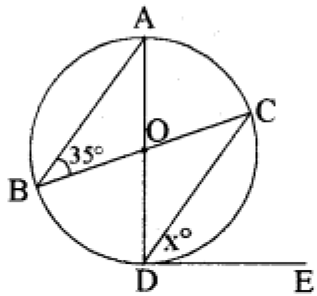
प्रश्न 21. दिये गये चित्र में, AD वृत्त का व्यास है। यदि ∠ADB = 30° है तथा ∠BCD = 8 तो 6 का मान है



(क) 150°
(ख) 130°
(ग) 120°
(घ) 90°

उत्तर: (ग) 120°

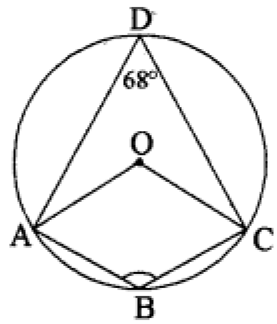
प्रश्न 22. दिये गये चित्र में ∠ABO = 35°, ∠CDE = x° तथा DE वृत्त की स्पर्श रेखा है। x का मान होगा



(क) 35°
(ख) 55°
(ग) 70°
(घ) 90°

उत्तर: (ख) 55°

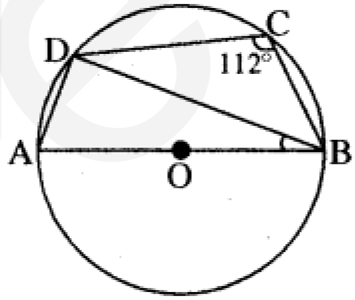
प्रश्न 23. चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि ∠ADNC = 68° हो तो ∠ABC का मान



(क) 68°
(ख) 44°
(ग) 112°
(घ) 90°

उत्तर: (ग) 112°

प्रश्न 24. चित्र में, O केन्द्र वाले एक वृत्त में AB व्यास तथा BD एक जीवा है। जीवा BD वृत्त के किसी बिन्दु C पर 112° कोण अन्तरित करती है, तो ∠ABD का मान है

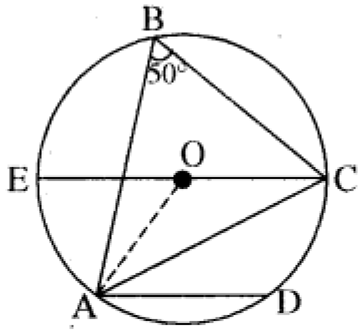


(क) 56°

(ख) 68°
(ग) 22°
(घ) 34°

उत्तर: (ग) 22°

प्रश्न 25. चित्र में व्यास EC जीवा AD के समान्तर एवं ∠ABC = 50° हो, तो ∠CAD का मान



(क) 50°
(ख) 40°
(ग) 130°
(घ) 25°

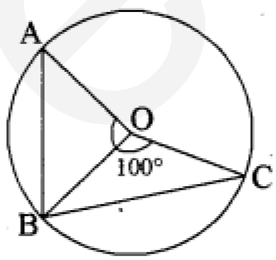
उत्तर: (ख) 40°

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी. है। इस वृत्त में दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं से गुजरने वाली जीवा की लम्बाई लिखिये ।।

हल: समान्तर जीवाओं का मध्य बिन्दु केन्द्र से जाता है। अतः वृत्त का व्यास इसकी जीवा होगी।
जीवा की लम्बाई = 2 × त्रिज्या = 2 × 4 = 8 सेमी.

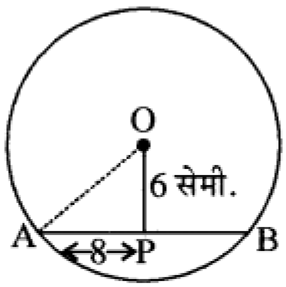
प्रश्न 2. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। तथा जीवाएँ AB = BC हैं। यदि ∠BOC = 100° है, तो ∠AOB का मान लिखिए।



उत्तर: ∠AOB = 100°

प्रश्न 3. यदि 16 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. की दूरी पर है, तो उस वृत्त के व्यास की लम्बाई लिखिए।

हल:



$$(AO)^2 = (8)^2 + (6)^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$AO = \sqrt{100}$$
$$= 10 \text{ सेमी.}$$
$$\text{ब्याज} = 2 \times AO = 2 \times 10$$
$$= 20 \text{ सेमी. उत्तर}$$

प्रश्न 4. वृत्त C (0, 5) तथा C (0', 5) में जीवा AB = जीवा CD है। यदि $m(\overline{AB}) = 60°$ है, तो $m(\overline{CD})$ का मान लिखिए।

हल: $m(\overline{CD}) = 60°$

प्रश्न 5. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD हैं जो परस्पर समान्तर और बराबर हैं। यदि प्रत्येक की लम्बाई 8 सेमी. हो और वृत्ते की त्रिज्या 5 सेमी. हो तो उनके बीच की दूरी लिखो।

हल: केन्द्र से AB की दूरी $= \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ सेमी. अत: दोनों के मध्य की दूरी = 3 × 2 = 6 सेमी.

प्रश्न 6. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. और वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर लम्ब की लम्बाई 4 सेमी. है तो जीवा की लम्बाई ज्ञात करो।

हल: $2\sqrt{5^2 - 4^2} = 2 \times 3 = 6$ सेमी.

प्रश्न 7. एक वृत्त की जीवा 7 सेंमी. है और केन्द्र से जीवा की दूरी 1.2 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल: त्रिज्या
$= \sqrt{(3.5)^2 + (1.2)^2}$
$= \sqrt{12.25 + 1.44} = \sqrt{13.69} = 3.7$ सेमी.

प्रश्न 8. एक वृत्त 5 सेमी. त्रिज्या का है, इसकी सबसे बड़ी जीवा की लम्बाई बताइए।

उत्तर: वृत्त की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।
अतः व्यास की लम्बाई = 2 × 5 = 10 सेमी.

प्रश्न 9. यदि 16 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. की। दूरी पर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या लिखिए।

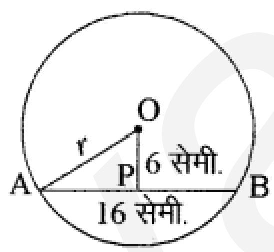
हल:

ΔAOP में $AO = \sqrt{AP^2 + OP^2}$

$r = \sqrt{8^2 + 6^2}$

$r = \sqrt{64 + 36}$

$r = 10$ सेमी.

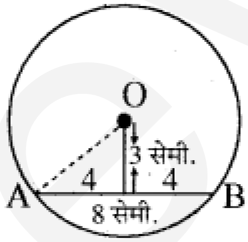


प्रश्न 10. 8 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 3 सेमी. की दूरी पर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या लिखिए।

हल: वृत्त की त्रिज्या OA = ?

$(OA)^2 = (AC)^2 + (OC)^2$
$= (4)^2 + (3)^2$
$= 16 + 9 = 25$

$\therefore$ $OA = \sqrt{25} = 5$ सेमी.



अतः वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी.

प्रश्न 11. वृत्त में किन्हीं दो त्रिज्याओं और उनके अन्तिम बिन्दुओं से बनने वाले चाप से घिरे क्षेत्र का नाम लिखिए।

हल: त्रिज्यखण्ड।

प्रश्न 12. दी गई आकृति में, AOB वृत्त का व्यास है तथा ∠ROS = 42° है, तो ∠RTS की माप ज्ञात कीजिये।

हल:

$$\angle RBT = \frac{1}{2}\angle ROS$$

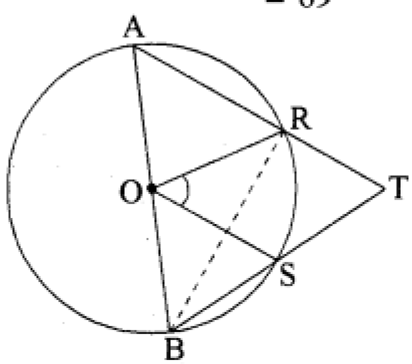
$$\angle RBT = \frac{1}{2}\times 42 = 21°$$

ΔRBT में $\angle RBT = 21°$

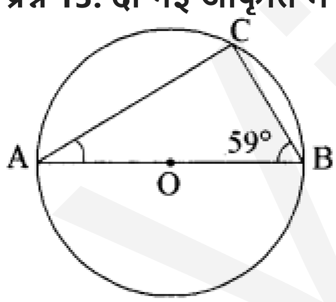
$\angle BRT = 90°$

अत: $\angle RTS = 180° - (90 + 21)$

$= 69°$

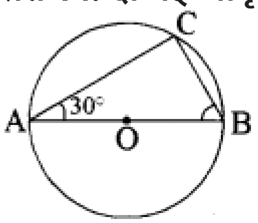


प्रश्न 13. दी गई आकृति में AB वृत्त का व्यास है। यदि ∠ABC = 59° है तो ∠BAC का मान लिखिए।



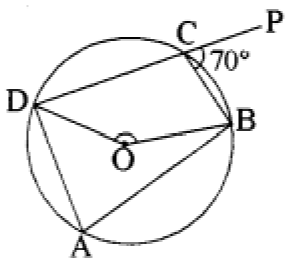
हल: ∠BAC = 90° – 59° = 31°
क्योंकि ∠ACB = 90° है।

प्रश्न 14. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि ∠BAC = 30° है, तो ∠ABC का मान लिखिए।



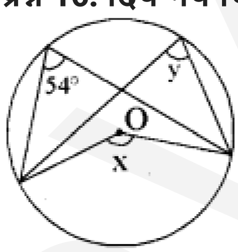
हल: ∠ABC = 180° – (∠BAC + ∠ACB).
= 180° – (30° + 90°)
= 60°

प्रश्न 15. दिये गये चित्र में 'O' वृत्त का केन्द्र है। △BCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। ∠PCB = 70° है, तो ∠BOD का मान लिखिये।



हल: ∠BAD = ∠BCP = 70°
तथा ∠BOD = 2 ∠BAD
= 2 × 70 = 140°

प्रश्न 16. दिये गये चित्र में ∠x व ∠y का मान ज्ञात करो।

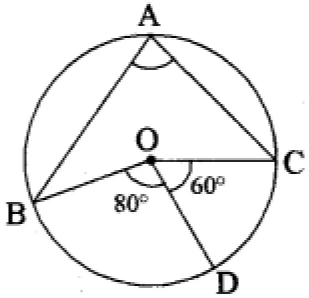


हल:
∠x = 2 × 54 = 1080
तथा ∠x = ∠y अतः
y = $\frac{108}{2}$ = 54°

प्रश्न 17. चित्र में चाप BD और चाप CD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 80° और 60° है, तो ∠BAC ज्ञात कीजिए।

evidyarthi

हल:

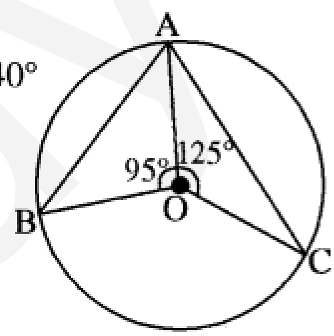


$$\angle BOC = \angle BOD + \angle DOC$$
$$= 80° + 60° = 140°$$
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$
$$= \frac{1}{2} \times 140° = 70°$$

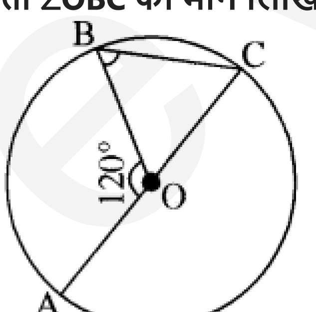
प्रश्न 18. चित्र में O केन्द्र वाले एक वृत्त में चाप BC द्वारा केन्द्र O पर ∠BOC तथा शेष परिधि के किसी बिन्दु A पर ∠BAC अन्तरित होता है। यदि ∠AOB = 95° तथा ∠AOC = 125° तो ∠BAC का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$125° + 95° = 220°$$
$$\therefore \quad \angle BOC = 360° - 220° = 140°$$
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$
$$= \frac{1}{2} \times 140°$$
$= 70°$ उत्तर

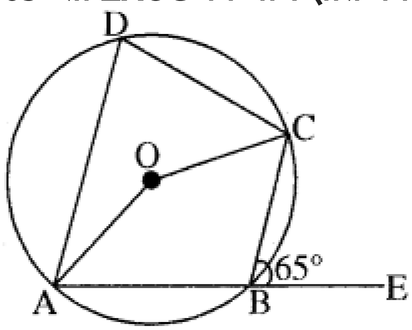


प्रश्न 19. चित्र में चाप AB द्वारा वृत्त के केन्द्र 0 पर अन्तरित कोण 120° है तथा AC वृत्त का व्यास है, तो ∠OBC का मान लिखिए।



हल: ∠COB = 180° – 120° = 60°
OC = OB एक ही वृत्त की त्रिज्यायें हैं।
∴ ∠C =∠B अतः ∠OBC = 60°

प्रश्न 20. चित्र में O केन्द्र वाले एक ही वृत्त में △BCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि बहिष्कोण ∠CBE = 65° तो ∠AOC का मान ज्ञात कीजिए।



हल:
∠CBE = ∠ADC
∴ ∠ADC = 65°
∴ AOC = 2∠ADCAS
= 2 × 65° = 130°

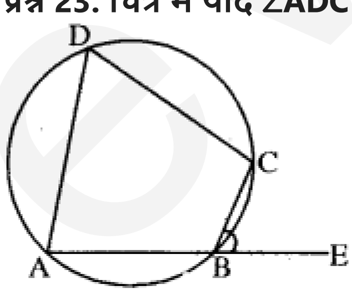
प्रश्न 21. एक वृत्त के उस चाप का नाप लिखिए जो वृत्त के शेष भाग पर समकोण बनाता है।

हल: एक वृत्त का वह चाप जो वृत्त के शेष भाग पर समकोण अन्तरित करता है, एक अर्द्धवृत्त होता है।

प्रश्न 22. r त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 180° कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई लिखिए।

हल: πr

प्रश्न 23. चित्र में यदि ∠ADC = 80° हो, तो ∠CBE का मान लिखिए।



हल: अन्तरित बहिष्कोण अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।
$\therefore \angle CBE = 80°$

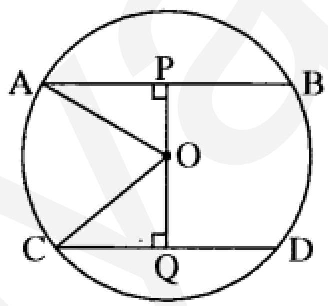
प्रश्न 24. वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाओं का अनुपात लिखिये। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: हम जानते हैं कि "किसी वृत्त की जीवायें केन्द्र से बराबर दूरी पर हो तो वे परस्पर बराबर होती हैं।" अतः जीवाओं का अनुपात 1 : 1 होगा।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. आकृति में, वृत्त का केन्द्र 0 एवं त्रिज्या 5 सेमी. है। यदि OP ⊥ AB, OQ ⊥ CD, AB || CD, AB = 8 सेमी. और CD = 6 सेमी. हो, तो PQ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है कि OP ⊥ AB एवं OQ ⊥ CD



अतः $AP = PB = \frac{1}{2} AB = 4$ सेमी.

$CQ = QD = \frac{1}{2} CD = 3$ सेमी.

और $OA = OC = 5$ सेमी. (त्रिज्या)

ΔOPA में, बौधायन प्रमेय से,

$OP^2 = OA^2 - AP^2$

या $OP^2 = 5^2 - 4^2$

$= 25 - 16 = 9$

$\therefore$ OP = 3 सेमी.

इसी प्रकार ΔOQC में,

$OQ^2 = OC^2 - CQ^2$

$OQ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ OQ = 4 सेमी.

अर्थात् $PQ = OP + OQ = 3 + 4 = 7$ सेमी.

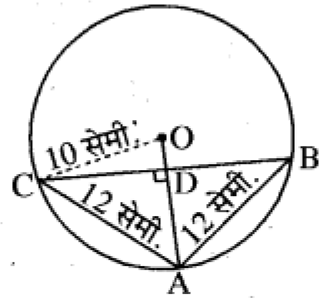
प्रश्न 2. 10 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त में, दो जीवाएँ AB = AC = 12 सेमी. हों, तो जीवा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ∠BAC का समद्विभाजक AD है, अतः AD जीवा BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

यहाँ $AC = AB = 12$ सेमी.

$OA = OC = 10$ सेमी.

और $BD = CD$



$\because$ ΔADC में, बौधायन प्रमेय से

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$CD^2 = 144 - AD^2$ .....(1)

इसी प्रकार ΔOCD में $CD^2 = OC^2 - OD^2$

$CD^2 = 100 - (OA - AD)^2 = 100 - (10 - AD)^2$

$CD^2 = 20AD - AD^2$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) से

$144 - AD^2 = 20AD - AD^2$

या $AD = 7.2$ सेमी.

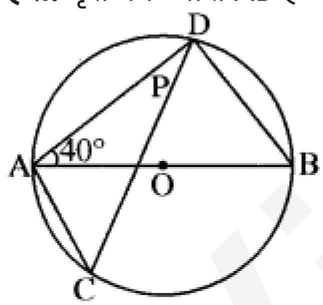
AD का मान समीकरण (1) में रखने पर

$CD^2 = 144 - (7.2)^2$ या $CD = 9.6$ सेमी.

अतः जीवा BC = 2CD = 2 x 9.6 = 19.2 सेमी.

प्रश्न 3. आकृति में, वृत्त का व्यास AB है और ∠DAB = 40° हो, तो ∠DCA ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त का व्यास AB है अतः



∠ADB = 90°

अब DBA = 180° – (90° + 40°))

∠DBA = 50°

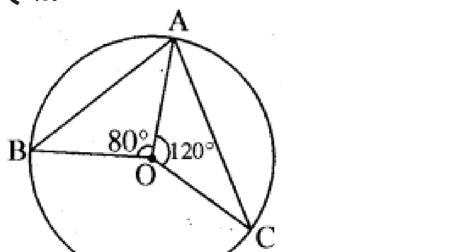
∴ ∠DBA और ∠DCA एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।

अतः ∠DCA = ∠DBA = 50°

∠DCA = 50°

प्रश्न 4. आकृति में, चाप AB और चाप AC द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित कोण क्रमशः 80° और 120° हैं। ∠BAC और ∠BOC ज्ञात कीजिए।

हल:



$\angle BOC = 360° - (120° + 80°)$

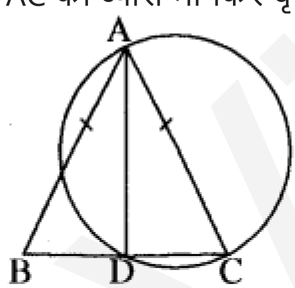
अतः $\angle BOC = 160°$

एवं $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 160°$

अतः $\angle BAC = 80°$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज की एक समान भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, त्रिभुज की असमान भुजा को समद्विभाजित करता है।

हल: दिया है–
आकृति में, एक समद्विबाहु ΔABC जिसमें AB = AC और व्यास AC पर खींचा गया वृत्त BC को D पर काटता है।
सिद्ध करना है-
BD = DC
उपपत्ति-
AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया और $\angle ADC$ अर्द्धवृत्त का कोण है,



अतः $\angle AIDC = 90°$
अब, ΔABD और ΔACD में,
AB = AC (दिया है)
AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)
$\angle ADB = \angle ADNC$ (समकोण) .
$\Delta ABC = \Delta ACD$ (RHS से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।
अर्थात् BD = CD इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त खण्ड का कोण न्यूनकोण होता है।

हल: दिया है-
आकृति में एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, दीर्घवृत्तखण्ड ACB है।

सिद्ध करना है-

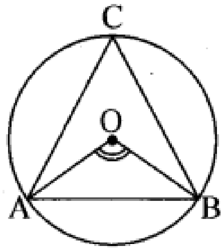
$\angle ACB < 90°$

रचना-

OA, OB एवं AB को मिलाया।

उपपत्ति-

चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण ∠AOB और शेष भाग पर अन्तरिक कोण ∠ACB है, अतः



$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ .....(1)

परन्तु $\angle AOB < 180°$ (ΔAOB का एक कोण)

$\therefore \frac{1}{2}\angle AOB < \frac{1}{2} \times 180°$

अर्थात् $\frac{1}{2}\angle AOB < 90°$ .....(2)

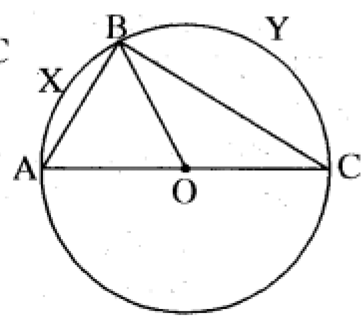
समीकरण (1) और (2) से

$\angle ACB < 90°$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 7. AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है। ∠BOC ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि चाप

AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए,



$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC$

साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$

अतः, $\frac{1}{2}\angle BOC + \angle BOC = 180°$

$\frac{3}{2}\angle BOC = 180°$

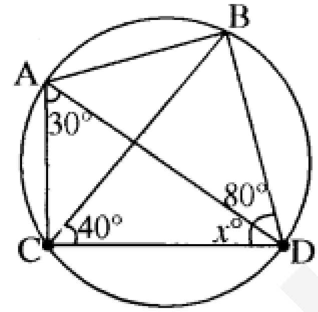
या $\angle BOC = \frac{2}{3} \times 180°$

$= 120°$ उत्तर

प्रश्न 8. आकृति में, r का मान ज्ञात कीजिए।

eVidyarthi

हल: ∠DAC = ∠DBC = 30° (एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण) ....(i) ΔDBC में।



$\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180°$

या $30° + 40° + (x + 80°) = 180°$ (आकृति एवं (i) से)

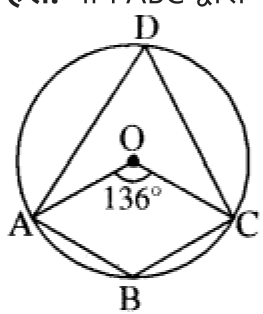
या $x + 80 = 180 - 70$

या $x = 110 - 80$

या $x = 30°$ उत्तर

प्रश्न 9. आकृति में, ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि ∠AOC = 136° हो, तो ∠ABC ज्ञात कीजिए।

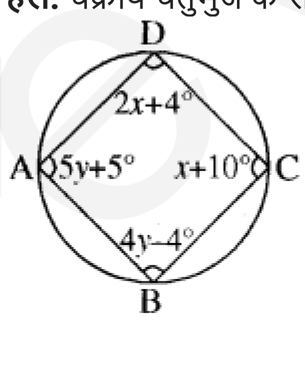
हल: चाप ABC द्वारा केन्द्र 0 और शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमशः ∠AOC और ∠ADC हैं।



अतः ∠ADC = $\frac{1}{2}$ ∠AOC = $\frac{1}{2}$ x 136°
या ∠ADC = 68°
∴ ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है
अतः सम्मुख कोणों का योग 180° होगा।
∠ADC +∠ABC = 180°
∠ABC = 180° – 68°
∠ABC = 112°

प्रश्न 10. आकृति में, ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। x और y ज्ञात कीजिए।

हल: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।



©Vidyarthi

(2x + 4°) + (4° – 4″) = 180°

या $2x^\circ + 4y^\circ = 180^\circ$

या $x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ$ .....(1)

इसी प्रकार $(x^\circ + 10^\circ) + (5y^\circ + 5^\circ) = 180^\circ$

या $x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ$ ....(1)

$x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ$ ....(2)

$\underline{-\quad -\quad -}$

घटाने पर $-3y^\circ = -75^\circ$

$\therefore$ $y^\circ = 25^\circ$

y का मान समी. (1) में रखने पर

$x^\circ + 2 \times 25^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ + 50^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $x = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$x^\circ = 40^\circ,\ y^\circ = 25^\circ$

अतः $x^\circ = 40^\circ$ और $y^\circ = 25^\circ$ उत्तर

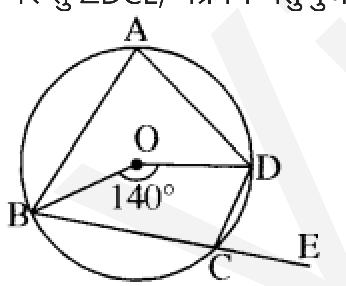
प्रश्न 11. आकृति में, वृत्त का केन्द्र 0 है और चाप BCD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 140° है।∠BAD और ∠DCE ज्ञात कीजिए।

हल: चाप BCD द्वारा केन्द्र एवं शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमशः ∠BOD एवं ∠BAD हैं।

अतः ∠BAD = $\frac{1}{2}$ x ∠BOD = x 140°_A

या ∠BAD = 70°

परन्तु ∠DCE, चक्रीय चतुर्भुज ΔBCD का बहिष्कोण है जो इसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होगा।



∠DCE = ∠BAD

∠DCE = 70°

प्रश्न 12. एक चक्रीय चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का युग्म समान है। सिद्ध कीजिये कि उसके विकर्ण भी समान होंगे।

हल: दिया है-

ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें AD = BC।

सिद्ध करना है— AC = BD

उपपत्ति— ∠DAO = ∠CBO

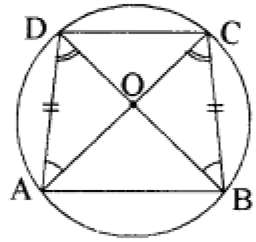
∠ADO = ∠BCO

(एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।)

AD = BC दिया है।

ΔADO ≅ ΔBCO

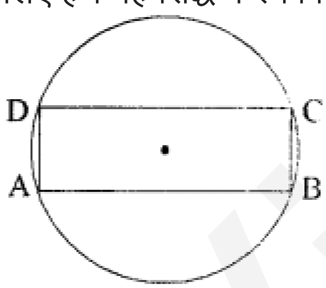
∴ OD = OC .....(1)



AD = BC दिया है।
ΔADO = ΔBCO
OD = OC ....(1)
OB = OA .....(2)
समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर
OD + OB = OC + OA
BD = AC इतिसिद्धम्

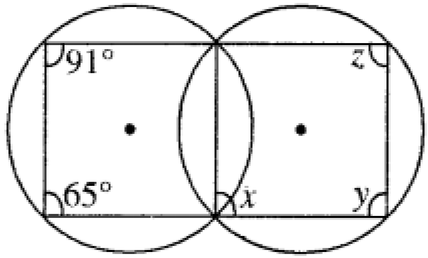
प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए चक्रीय समान्तर चतुर्भुज सदैव एक आयत होता है।

हल: माना ΔBCD एक चक्रीय समान्तर DA चतुर्भुज है। समान्तर चतुर्भुज ΔBCD को आयत सिद्ध करने के लिए हम यह सिद्ध करेंगे कि इसका AF एक कोण समकोण है।

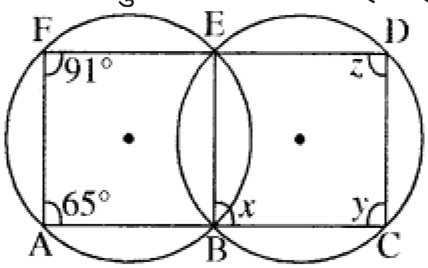


∴ ΔBCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
∴ ∠B = ∠D ....(1)
(∵ समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।)
पुनः ∴ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
∴ ∠B +∠D = 180° ....(2)
समीकरण (1) तथा (2) से
∠B +∠B = 180° या 2∠B = 180°
∠B = 90° समी.
(1) से 20 = 90°
अत: ABCD एक आयत है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. दी गई आकृति में कुछ कोणों को r, y और z से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: दिये गये चित्र में ΔBEF एक चक्रीय चतुर्भुज है हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होते हैं इस कारण से



$\angle BAF = \angle BED = 65°$

चित्र से $\angle E + \angle C = 180°$

∵ BEDC एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें आमने – सामने के कोनों का योग 180° होता है।

$\Rightarrow \quad 65° + y = 180°$

$\therefore \quad y = 180° - 65° = 115°$ उत्तर

इसी प्रकार

$\angle AFE = \angle CBE$

$\Rightarrow \quad 91° = x$

$\therefore \quad x = 91°$ उत्तर

हम जानते हैं

$x + z = 180°$ चक्रीय चतुर्भुज के कारण

$z = 180° - x$

$z = 180° - 91° = 89°$ उत्तर

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. आकृति में, चाप AB = चाप CD है, सिद्ध कीजिए कि ∠A=∠B है।

हल: दिया है-

चाप AB = चाप CD है,

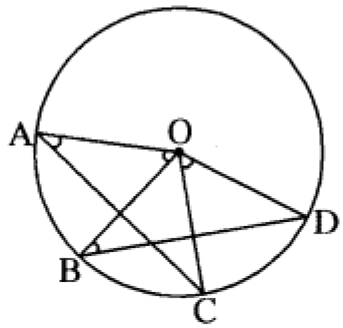
सिद्ध करना है-

eVidyarthi

$\angle A = \angle B$

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि समान चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान होते हैं।



अतः $\angle AOB = \angle COD$

दोनों पक्षों में $\angle BOC$ जोड़ने पर

$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$

या $\angle AOC = \angle BOD$ .....(1)

अब AAOC और ABOD में,

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OC = OD (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOC = \angle BOD$ [समीकरण (1) से]

$\Delta AOC = \angle BOD$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

$\angle A = \angle B$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 2. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र ∠BAC के समद्विभाजक पर स्थित होगा।

हल: दिया है-

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, जिसकी जीवाएँ AB और AC समान हैं।

सिद्ध करना है-

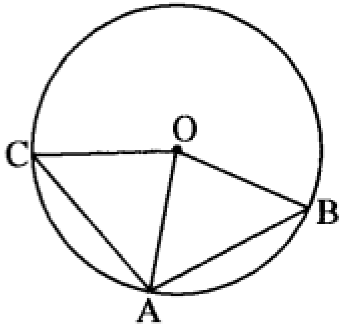
केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना-

CO और BO को मिलाया।

उपपत्ति-

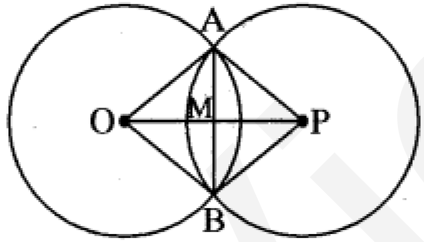
ΔAOB और ΔAOC में,



B0 = 0C (वृत्त की त्रिज्याएँ)
OA = OA (उभयनिष्ठ भुजा)
AB = AC (दिया है)
ΔAOB = ΔAOC (SSS से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।
अर्थात् ΔOAB = ∠OAC
अर्थात् केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है। इतिसिद्धम् ।

प्रश्न 3. यदि दो वृत्त, एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्विभाजक होती है।

हल: दिया है-
आकृति में दो वृत्त, जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं P हैं, जो A और B बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है-
OP जीवा AB का लम्बसमद्विभाजक है।
रचना-
OA, OB, PA और PB को मिलाया।
उपपत्ति-
AOAP और AOBP में,
AO = OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)
PA = PB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)
OP = OP (उभयनिष्ठ)
ΔOAP = ΔOBP (SSS से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होंगे।
∠AOP = ∠BOP
या ∠AOM = ∠BOM .....(1)

अब, ΔAOM और ΔBOM में
OA = OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)
$\angle AOM = \angle BOM$ [समीकरण (1) से]
OM = OM (उभयनिष्ठ)
$\Delta AOM = \Delta BOM$ (SAS से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ एवं कोण समान होंगे।

अर्थात् $AM = BM$ .....(2)

और $\angle AMO = \angle BMO$ .....(3)

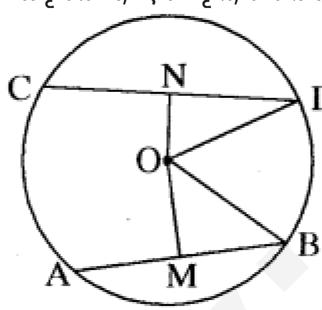
परन्तु $\angle AMO + \angle BMO = 180^\circ$

या $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ .....(4)

समीकरण (2) और (4) से,
OP, जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केन्द्र के निकट होती है।

हल: दिया है-
आकृति में, एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है और जीवा CD > जीवा AB



सिद्ध करना है-
ON < OM
रचना-
OB और OD को मिलाया।
उपपत्ति-

OM और ON क्रमशः AB और CD पर लम्ब हैं,

अतः $MB = \frac{1}{2}AB$ और $ND = \frac{1}{2}CD$ .....(1)

अब ΔOMB में

$MB^2 = OB^2 - OM^2$ .....(2)

और ΔOND में

$ND^2 = OD^2 - ON^2$ .....(3)

दिया है कि $AB < CD$

या $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD$

या $MB < ND$ [समीकरण (1) से]

या $MB^2 < ND^2$ .....(4)

समीकरण (2), (3) और (4) से

$(OB^2 - OM^2) < (OD^2 - ON^2)$

परन्तु $OB = OD$ (वृत्त की त्रिज्या) है

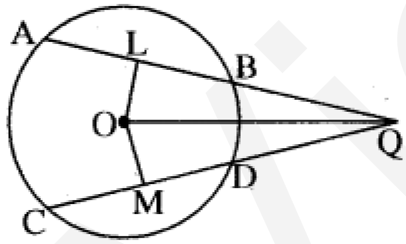
अतः $-OM^2 < -ON^2$

या $OM^2 > ON^2$

या $OM > ON$

या $ON < OM$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 5. आकृति में, एक वृत्त में जीवा AB = जीवा CD हों, तो सिद्ध कीजिए कि DQ = BQ.



हल: दिया है-

जीवा AB = जीवा CD

सिद्ध करना है-

DQ = BQ

रचना-

$OL \perp AB$ और $OM \perp CD$ खींचे और OQ को मिलाया।

उपपत्ति-

AB = CD (दिया हुआ है)

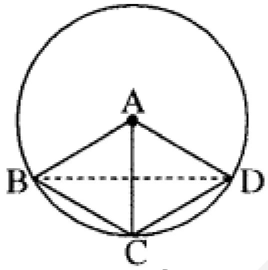
OL = OM .....(1)

ΔOMQ और ΔOLQ में,

OQ = 0Q (उभयनिष्ठ भुजा)
OM = OL [समीकरण (1) से]
∠OMQ=∠OLQ (समकोण)
ΔOMQ= ΔOLQ (RHS से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।
अर्थात् MQ = LQ …………(2)
परन्तु MD = $\frac{1}{2}$ CD और LB = $\frac{1}{2}$ AB
AB = CD ⇒ MD =LB ……………..(3)
समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर
MQ – MD = LQ – LB
अतः DQ= BQ इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. एक चतुर्भुज ΔBCD में AB = AC = AD हों, तो सिद्ध कीजिए foto ∠BAD = 2(∠BDC + ∠CBD).

हल: दिया है कि AB = AC = AD अर्थात् बिन्दु B, C और D बिन्दु A से समान दूरी पर हैं, अतः वृत्त का केन्द्र A है।

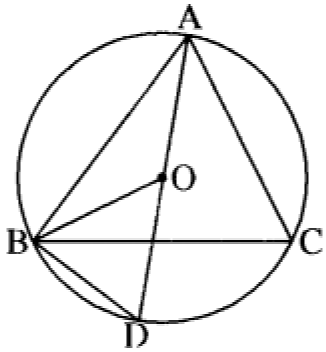


अब चाप BC केन्द्र पर ∠BAC और वृत्त के BK शेष भाग पर ∠BDC बनाता है।
∴ ∠BAC = 2∠BDC …..(1)
इसी प्रकार चाप CD केन्द्र पर ∠CAD और वृत्त के शेष भाग ∠CBD बनाता है।
∴ ∠CAD = 2∠CBD ………….(2)
समीकरण (1) और (2) का योग करने पर
∠BAC + ∠CAD = 2(∠BDC + ∠CBD)
= ∠BAD = 2(∠BDC +∠CBD) इतिसिद्धम्।

प्रश्न 7. आकृति में, AABC एक समबाहु त्रिभुज है। इसका केन्द्र है। यदि A को 0 से मिलाते हुए आगे बढ़ाया तो यह वृत्त को D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए AOBD एक समबाहु त्रिभुज है।

हल: दिया हुआ है-
ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। O, ΔABC का केन्द्र है।
AO को आगे बढ़ाने पर वृत्त से D पर मिलता है।
सिद्ध करना-
AOBD समबाहु त्रिभुज है।

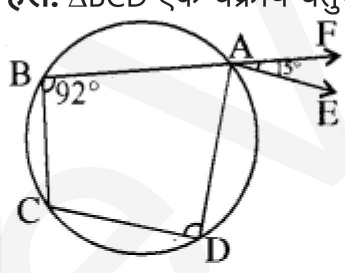
उपपत्ति-
OB एवं OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)



अतः ∠OBD = ∠ODB ....(i)
ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।
अतः ∠C = 60° .....(ii)
∠ADB = ∠C
[(ii) से एक ही वृत्त खण्ड पर बने कोण)]
अतः ∠ADB = 60° [(i) से]
परन्तु ∠ADB एवं ∠ODB एक ही कोण को दर्शाता है।
अतः ∠ODB = 60°
∴ ∠OBD = 60° (समीकरण (i) से]
परन्तु Δ में तीनों कोणों का योग 180° होता है।
अतः ΔOBD का तीसरा कोण ∠BOD भी 60° का होगा।
अतः ΔOBD एक समबाहु त्रिभुज है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 8. आकृति में, ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। CD के समान्तर रेखा AE खींची गई है। BA को F तक आगे बढ़ाया गया है। यदि ∠ABC = 92° और ∠FAE = 20° हो, तो ∠BCD ज्ञात कीजिए।

हल: ΔBCD एक चक्रीय चतुर्भुज है अतः

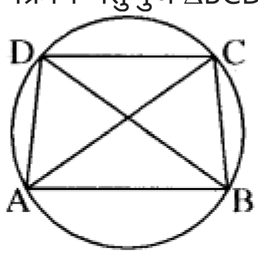


∠ABC + ∠CDA = 180° BO°
या ∠CDA = 180° – 92°
या ∠CDA = 88°
परन्तु CD || AE
या ∠DAE = ∠CDA (एकान्तर कोण)
या ∠DAE = 88°

यहाँ $\angle DAF = \angle FAE + \angle DAE = 20° + 88°$
या $\angle DAF = 108°$
$\angle DAB = 180° – 108° = 72°$
अब $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
या $\angle BCD = 180° – \angle DAB = 180° – 729$
या $\angle BCD = 108°$ इतिसिद्धम्

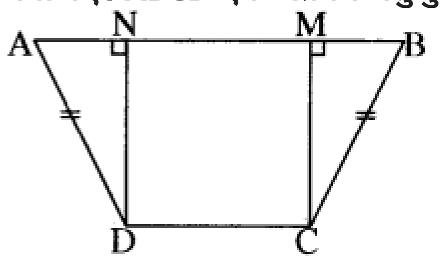
प्रश्न 9. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हों, तो सिद्ध कीजिए कि शेष भुजाएँ बराबर होंगी और विकर्ण भी बराबर होंगे। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: दिया है-
चक्रीय चतुर्भुज ΔBCD में,



$AB \parallel DC$ है।
सिद्ध करना है-
(i) $AD = BC$
(ii) $AC = BD$
उपपत्ति-
$\therefore AB \parallel DC$ और BC एक AK तिर्यक रेखा है,
अतः $\angle ABC + \angle DCB = 180°$ ....(1)
परन्तु ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है,
अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ ....(2)
समीकरण (1) और (2) से
$\angle ABC + \angle DCB = \angle ABC + \angle ADC$
या $\angle DCB = \angle ADC$ ....(3)
अब AADC और ABCD में,
$\angle ADC = \angle DCB$ [समीकरण (3) से]
$\angle DAC = \angle DBC$ (एक ही वृत्त खण्ड के कोण) और $DC = DC$ (उभयनिष्ठ)
$\Delta ADC = \Delta BCD$. (ASA से)
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी,
अर्थात् $AD = BC$
और $AC = BD$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 10. आकृति में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AD = BC और A ∠ADC = ∠BCD है। सिद्ध कीजिए। ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



हल: दिया है-

चतुर्भुज ABCD में AD = BC और ∠ADC = ∠BCD है।

सिद्ध करना है-

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना-

DN ⊥ AB और CM ⊥ AB खींचे।

उपपत्ति-

दिया है कि

∠ADC = ∠BCD

∴ ∠ADN = ∠ADC – 90° ....(1)

= ∠BCD – 90°[समीकरण (1) से]

∠ADN = ∠BCM ....(2)

अब AAND और AIBMC में

∠ANI) = ∠l8MC (समकोण)

∠ADN = ∠1CM [समीकरण (2) से]

ओर AD = BC (दिया है)

∴ AAND = AlBMC (AAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे,

अर्थात् ∠A = ∠B ....(3)

इसी प्रकार ∠C = ∠D ....(4)

परन्तु ∠A + ∠13 + 2 + ∠D = 360°

समीकरण (3) और (4) से,

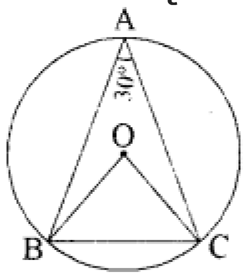
∠B + ∠B + ∠D + ∠D = 360°

2∠B + 2∠D = 360°

∠B + ∠D = 180

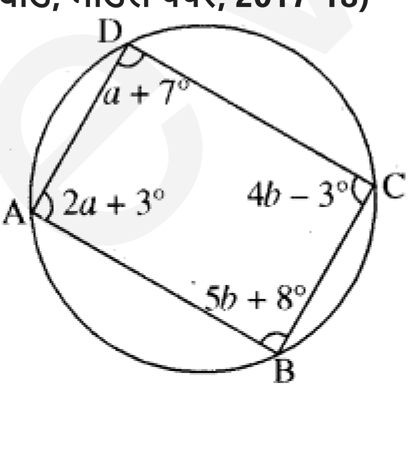
ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 11. दिये गये चित्र में, त्रिभुज ABC है। जिसमें ∠BAC = 30° है। सिद्ध कीजिए कि BC त्रिभुज ABC के परिवृत्त की त्रिज्या है, जिसका केन्द्र O है।



हल: हम जानते हैं कि केन्द्र पर बना कोण शेष परिधि पर बने कोण का दुगुना होता है।
इस कारण से
∠BOC = 2 ∠BAC
∠BOC = 2 × 30°
∴ ∠BAC = 30°
∴ ∠BOC = 60°
OB = OC एक ही वृत्त की त्रिज्यायें हैं।
∠CBO = ∠BCO
हम जानते हैं
∠CBO + ∠BC) + ∠BOC = 180°
⇒ ∠CB0 + ∠BC() = 180° – ∠ BOC
⇒ ∠CBO + ABCO = 180° – 60° = 120°
लेकिन ∠CB) = ∠IBCO
अत: हम कह सकते हैं कि
∠CBO = ∠BCO = 60°
अतः त्रिभुज BOC एक समबाहु त्रिभुज होगा। इसमें OB = OC = BC लेकिन OB = OC वृत्त की त्रिज्या है।
अत: BC भी वृत्त की त्रिज्या होगी अतः BC त्रिभुज ABC के परिवृत्त की त्रिज्या है जिसका केन्द्र O है।
इतिसिद्धम्

प्रश्न 12. आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।a और b का मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)



eVidyarthi

हल: दी हुई आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है इसलिए ∠A + ∠C = 180° होगा।

$$2a + 3^\circ + 4b - 3^\circ = 180^\circ$$

या $2a + 4b = 180^\circ$

या $a + 2b = 90^\circ$ .....(1)

तथा $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$$5b + 8^\circ + a + 7^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $a + 5b + 15^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $a + 5b = 180^\circ - 15^\circ$

$a + 5b = 165^\circ$ .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर

$$a + 2b = 90^\circ$$
$$a + 5b = 165^\circ$$

घटाने पर $\quad - \quad - \quad\quad -$

$$-3b = -75^\circ$$

$$b = \frac{-75^\circ}{-3} = 25^\circ$$

समीकरण (1) में मान रखने पर

$$a + 2b = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ $a + 2 \times 25^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $a = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

अत: $a = 40^\circ$, $b = 25^\circ$ उत्तर

evidyarthi