

वृत्त एवं स्पर्श रेखा

Ex 13.1

प्रश्न 1. निम्न में से प्रत्येक कथन सत्य या असत्य है लिखिए और उत्तर का कारण भी लिखिए।

1. किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को दो बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
2. एक स्पर्श रेखा XY , O केन्द्र वाले वृत्त को P पर स्पर्श करती है और Q स्पर्श रेखा पर अन्य बिन्दु है तो $OP = OQ$ होता है।
3. वृत्त पर स्थित बिन्दु P व Q पर दो स्पर्श रेखाएँ LM एवं XY खींची गई हैं। यदि PQ व्यास है तो $LM \parallel XY$ है।
4. एक वृत्त का केन्द्र O दूसरे वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र A है। यदि O केन्द्र वाला वृत्त बिन्दु A और B से इस प्रकार गुजरता है कि AOB एक ही रेखा पर हो, तो B से खींची गई स्पर्श रेखाएँ दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं से गुजरती हैं।

हल:

1. यह कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे एक और केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
2. यह कथन असत्य है क्योंकि OP स्पर्श रेखा पर लम्ब है तथा लम्ब सभी दूरियों से छोटा होता है।
3. यह कथन सत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा व्यास पर लम्ब होती है।
4. यह कथन सत्य है क्योंकि AOB एक व्यास है और अर्द्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए.

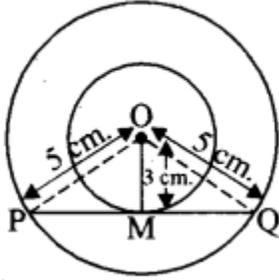
1. एक वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
2. वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा कहलाती है।
3. एक वृत्त की समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
4. वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं।

हल:

1. एक
2. छेदन रेखा
3. दो
4. स्पर्श बिन्दु।

प्रश्न 3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी. तथा 3 सेमी. हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल: दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका एक ही केन्द्र O तथा त्रिज्याएँ क्रमशः 5 cm. और 3 cm, हैं। माना कि PQ बड़े वृत्त की जीवा है परन्तु छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है। क्योंकि, OM छोटे वृत्त की त्रिज्या है और PMQ स्पर्श रेखा है।



$$\therefore \angle OMP = \angle OMQ = 90^\circ$$

अब, समकोण त्रिभुज OMP और OMQ से,

$$\angle OMP = \angle OMQ = 90^\circ$$

$$OP = OQ$$

[एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

$$OM = OM$$

[उभयनिष्ठ भुजा]

$$\therefore \triangle OMP \cong \triangle OMQ$$

[RHS सर्वांगसमता]

$$\therefore PM = MQ$$

[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

$$\text{या } PQ = 2 PM = 2 MQ$$

अब, समकोण $\triangle OMQ$ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OQ^2 = OM^2 + MQ^2$$

$$(5)^2 = (3)^2 + (MQ)^2$$

$$\text{या } MQ^2 = 25 - 9$$

$$\text{या } MQ^2 = 16 = (4)^2$$

$$\text{या } MQ = 4 \text{ cm.}$$

$$\therefore \text{जीवा PQ की लम्बाई} = 2 MQ$$

$$= 2 (4) \text{ cm.}$$

$$= 8 \text{ cm.}$$

अतः, अभीष्ट जीवा की लम्बाई 8 cm. है।

प्रश्न 4. किसी वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी. दूर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई यदि 4 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी?

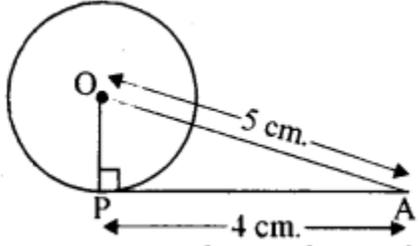
हल: एक वृत्त जिसका केन्द्र 'O' है। वृत्त के बाहर इसके केन्द्र से 10 cm. की दूरी पर कोई बिन्दु A है। स्पर्श रेखा की लम्बाई = PA
= 4 cm.

क्योंकि OP त्रिज्या है और PA वृत्त पर स्पर्श रेखा है।

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ$$

अब, समकोण $\triangle OPA$ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$OA^2 = OP^2 + PA^2$$

$$(10)^2 = OP^2 + (4)^2$$

या $OP^2 = 100 - 16$

या $OP^2 = 84$

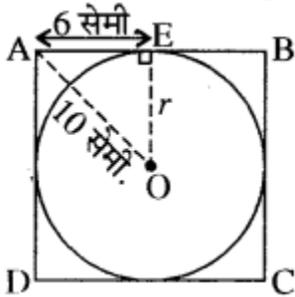
या $OP = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 7}$

$$OP = 2\sqrt{21} \text{ सेमी.}$$

अतः वृत्त की त्रिज्या $2\sqrt{21}$ सेमी. है

प्रश्न 5. एक O केन्द्र वाला वृत्त, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को अन्तःस्पर्श इस प्रकार करता है यदि AB को स्पर्श बिन्दु 3:1 भागों में विभाजित करे तथा AB = 8 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जबकि OA = 10 सेमी. है।

हल: प्रश्नानुसार, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को स्पर्श करने वाला अन्तःवृत्त का केन्द्र O है। स्पर्श रेखा AB का स्पर्श बिन्दु E, AB को 3 : 1 में अन्तःविभाजित करता है।



$\therefore AB = 8$ सेमी. (दिया है)

$\therefore AE = \frac{3}{4} \times 8 = 6$ सेमी.

$$EB = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \text{ सेमी.}$$

माना वृत्त की त्रिज्या $OE = r$ सेमी. है तथा $(OA = 10$ सेमी. दिया है।

$\triangle OEA$ समकोण त्रिभुज है क्योंकि वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है तथा पाइथागोरस प्रमेय से

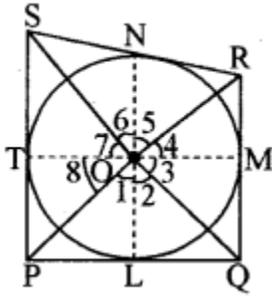
$$\begin{aligned} & (OA)^2 = (OE)^2 + (AE)^2 \\ \Rightarrow & (10)^2 = r^2 + (6)^2 \\ \Rightarrow & r^2 = (10)^2 - (6)^2 \\ \Rightarrow & r^2 = 100 - 36 = 64 \\ \Rightarrow & r = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

अतः वृत्त की अभीष्ट त्रिज्या 8 सेमी. है।

प्रश्न 6. एक वृत्त एक चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि केन्द्र पर सम्मुख भुजाओं द्वारा आन्तरिक कोण सम्पूरक होते हैं।

हल: दिया है-

केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज PQRS जिसकी भुजाएँ PQ, QR, RS और SP वृत्त को क्रमशः L, M, N, T स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है-

$$\angle POQ + \angle SOR = 180^\circ$$

$$\text{और } \angle SOP + \angle ROQ = 180^\circ$$

रचना-

OP, OL, OM, OR, ON, OS, OT को मिलाइए।

उपपत्ति-

क्योंकि बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ। केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

$$\therefore \angle 2 = \angle 3; \angle 4 = \angle 5; \angle 6 = \angle 7; \angle 8 = \angle 1 \dots\dots\dots(i)$$

हम जानते हैं कि एक बिन्दु पर सभी कोणों का जोड़ 360° होता है।

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$$

$$\text{या } \angle 1 + \angle 2 + 22 + 25 + 25 + \angle 6 + 26 + \angle 1 = 360^\circ$$

$$\text{या } 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360^\circ$$

$$\text{या } (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle POQ$$

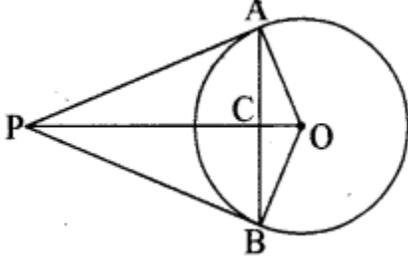
$$\text{तथा } \angle 5 + \angle 6 = \angle SOR$$

$$\therefore \angle POQ + \angle SOR = 180^\circ$$

$$\text{इसी प्रकार, } \angle SOP + \angle ROQ = 180^\circ$$

अतः वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण आन्तरित करती हैं।
(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. आकृति में, वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु P से खींची हुई स्पर्श रेखाएँ PA और PB वृत्त को क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि OP रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक है।



हल: दिया गया है-

OP रेखा, जीवा AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करती है।

ΔPAC और ΔPBC में $PA = PB$

\therefore किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

$\angle APC = \angle BPC$

$\therefore PA$ और PB , OP से बराबर कोण पर झूके हुए हैं। और $PC = PC$ (उभयनिष्ठ है)

\therefore भुजा-कोण-भुजा से

$\Delta PAC = \Delta PBC$

$\Rightarrow AC = BC$

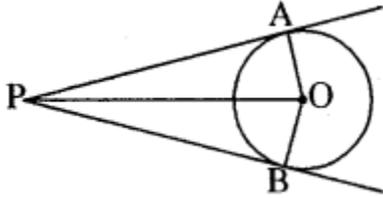
और $\angle ACP = \angle BCP$

किंतु $\angle ACP + \angle BCP = 180^\circ$

$\therefore \angle ACP = \angle BCP = 90^\circ$

अतः OP रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. आकृति में, बाह्य बिन्दु P से O केन्द्र वाले वृत्त को PA एवं PB दो स्पर्श रेखाएँ क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $PAOB$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।



हल: वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्बवत् होती है।

अब $OA \perp AP$ और $OB \perp BP$

$$\Rightarrow \angle OAP = 90^\circ \text{ और } \angle OBP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OAP + \angle OBP = 90^\circ + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OAP + \angle OBP = 180^\circ \quad \dots(i)$$

चतुर्भुज OAPB के कोणों का योग 360° होता है।

$$\therefore \angle APB + \angle BOA = 360^\circ - (180^\circ)$$

$$\angle APB + \angle BOA = 180^\circ \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से स्पष्ट है।

$$\angle OAP + \angle OBP = 180^\circ$$

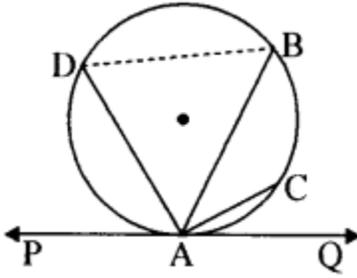
$$\text{और } \angle APB + \angle BOA = 180^\circ$$

यहाँ पर सम्मुख कोणों का योग सम्पूरक है।

अतः चतुर्भुज AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है। (इतिसिद्धम्)

Ex 13.2

प्रश्न 1. आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए-

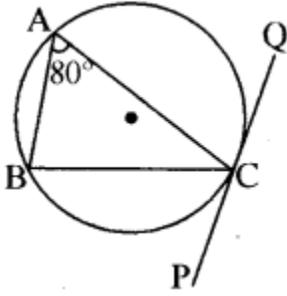


1. $\angle BAQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड क्या है?
2. $\angle DAP$ का एकान्तर वृत्तखण्ड क्या है?
3. यदि C को B से मिला दें तो बनने वाला $\angle ACB$ किस कोण के बराबर है।
4. $\angle ABD$ एवं $\angle ADB$ किन-किन कोणों के बराबर हैं।

हल:

1. $\angle BAQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड $\angle ADB$ है।
2. $\angle DAP$ का एकान्तर वृत्तखण्ड $\angle ABC$ है।
3. यदि C को B से मिला दें तो बनने वाला $\angle ACB$ कोण $\angle BAP$ के बराबर होगा।
4. $\angle ABD = \angle DAP$ तथा $\angle ADB = \angle BAQ$

प्रश्न 2. आकृति के अनुसार यदि $\angle BAC = 80^\circ$ हो तो $\angle BCP$ का मान ज्ञात कीजिए।

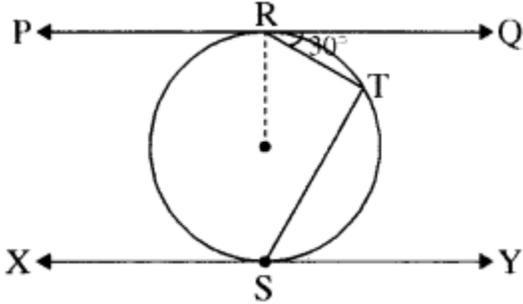


हल: यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाये तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा के बनाये गये कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्डों में बने कोण के बराबर होते हैं।

$$\therefore \angle BCP = \angle BAP = 80^\circ$$

$$\angle BCP = 80^\circ$$

प्रश्न 3. आकृति के अनुसार आकृति में PQ और XY समानान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle QRT = 30^\circ$ हो, तो $\angle TSY$ ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है-

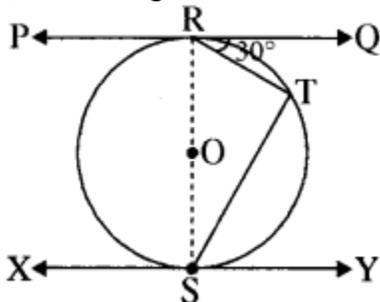
$$PQ \parallel XY$$

$$\angle QRT = 30^\circ$$

माना वृत्त का केन्द्र O है। R, स्पर्श बिन्दु है तब

$$OR \perp PQ$$

[\because स्पर्श बिन्दु से जाने वाली रेखा, स्पर्श रेखा पर लम्बवत् होती है।]



$$\text{तब } \angle ORQ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ORT + \angle TRQ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ORT + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ORT = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle SRT = 60^\circ \dots\dots\dots(1)$$

पुनः ARTS समकोण त्रिभुज है क्योंकि अर्द्धवृत्त की परिधि पर बना कोण समकोण होता है। अर्थात् $\angle RTS = 90^\circ$

$$\text{तब } \angle TSR + \angle SRT + \angle RTS = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TSR + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TSR = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TSR = 30^\circ \dots\dots\dots(2)$$

पुनः चूंकि $RS \perp XY$, (S स्पर्श बिन्दु है तथा RS व्यास है)

$$\therefore \angle RSY = 90^\circ$$

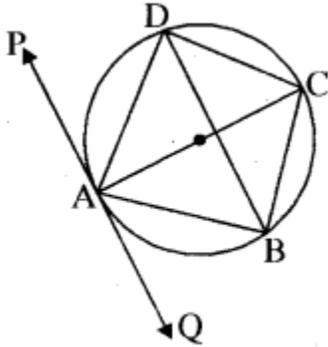
$$\Rightarrow \angle TSR + \angle TSY = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 30^\circ + \angle TSY = 90^\circ$$

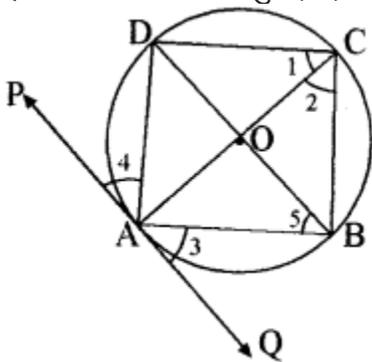
$$\Rightarrow \angle TSY = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TSY = 60^\circ$$

प्रश्न 4. आकृति चक्रीय चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC कोण C को समद्विभाजित करता है, सिद्ध कीजिए कि विकर्ण BD बिन्दु A, B, C और D से गुजरने वाले वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समान्तर है।



हल: मान लीजिये बिन्दु A, B, C तथा D से गुजरने वाले वृत्त के बिन्दु A पर PAQ B स्पर्श रेखा है।



$\therefore AC, AC$ को समद्विभाजित करता है। (दिया है।)

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \dots\dots\dots(1)$$

∴ कोण $\angle 3$ तथा 22 जीवा AB के एकान्तर खण्ड में बने कोण हैं।

∴ $\angle 2 = \angle 3$ ।(2)

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं।

$\angle 4 = \angle 1$ (3)

$\angle 1 = \angle 5$ (एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण)

$\angle 4 = \angle 5$ (4)

अतः समीकरण (1), (2) तथा (3) से

$\angle 3 = \angle 4$ (5)

समीकरण (4) तथा (5) से

$\angle 3 = \angle 5$

∴ $\angle 3$ तथा $\angle 5$ विकर्ण BD तथा A पर स्पर्श रेखा PAQ को तिर्यक रेखा AB के काटने से बने एकान्तर कोण हैं।

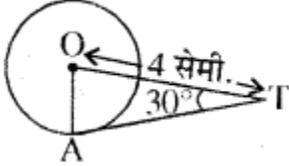
∴ PAQ \parallel BD (इतिसिद्धम्)

Additional Questions

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. दी गई आकृति में, AT केन्द्र O वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि OT = 4 सेमी. 30T और $\angle OTA = 30^\circ$ है। तब AT बराबर है-



(क) 4 सेमी.

(ख) 2 सेमी.

(ग) $2\sqrt{3}$ सेमी.

(घ) $4\sqrt{3}$ सेमी.

उत्तर: (ग) $2\sqrt{3}$ सेमी.

प्रश्न 2. एक बिन्दु P वृत्त के केन्द्र से 25 सेमी. की दूरी पर है। वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है और P से वृत्त की खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी

(क) $\sqrt{30}$ सेमी.

(ख) 24 सेमी.

- (ग) 28 सेमी.
(घ) 30 सेमी.

उत्तर: (ख) 24 सेमी.

प्रश्न 3. यदि एक समचतुर्भुज ABCD की चारों भुजाएँ एक वृत्त को स्पर्श करती हैं।

- (क) $AC + DA = BD + CD$
(ख) $AB + CD = BC + DA$
(ग) $AB + CD = AC + BC$
(घ) $AC + AD = BC + BD$

उत्तर: (ख) $AB + CD = BC + DA$

प्रश्न 4. वह रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है, कहलाती है

- (क) जीवा
(ख) स्पर्श रेखा
(ग) छेदक रेखा
(घ) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर: (ग) छेदक रेखा

प्रश्न 5. एक वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई अधिकतम स्पर्श रेखाएँ हैं

- (क) एक
(ख) दो।
(ग) तीन
(घ) अनन्त

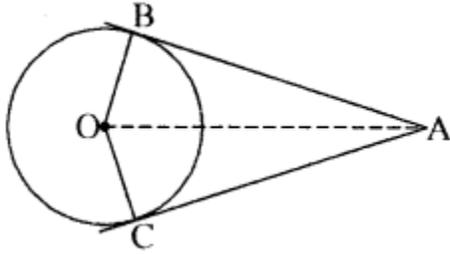
उत्तर: (ख) दो।

प्रश्न 6. किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर होती हैं

- (क) लम्बवत्
(ख) समान्तर
(ग) प्रतिच्छेदी
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर: (ख) समान्तर

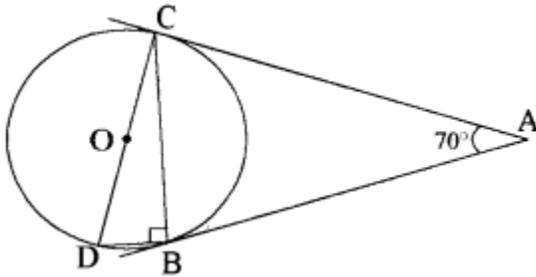
प्रश्न 7. दी गई आकृति में AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं, O वृत्त का केन्द्र है, यदि $\angle CAB = 60^\circ$ तो $\angle BOC$ है



- (क) 60°
- (ख) 70°
- (ग) 120°
- (घ) 150°

उत्तर: (ग) 120°

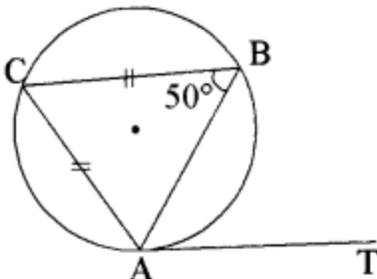
प्रश्न 8. दी गई आकृति में बिन्दु B, C तथा D से गुजरने वाले वृत्त के बिन्दु B तथा C पर AB तथा AC स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle BAC = 70^\circ$ और $\angle CBD = 90^\circ$ तो $\angle BCD$ का मान है



- (क) 45°
- (ख) 55°
- (ग) 30°
- (घ) 35°

उत्तर: (घ) 35°

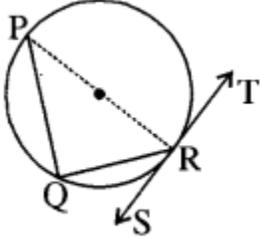
प्रश्न 9. दी गई आकृति में AT वृत्त की स्पर्श रेखा है। यदि $m \angle ABC = 50^\circ$ तथा $AC = BC$ तो $m \angle BAT$ है



- (क) 50°
- (ख) 70°
- (ग) 75°
- (घ) 80°

उत्तर: (घ) 80°

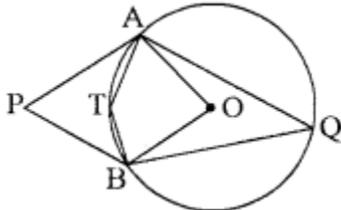
प्रश्न 10. दी गई आकृति में $\angle PQR$ का मान होगा



- (क) 30°
- (ख) 50°
- (ग) 60°
- (घ) 90°

उत्तर: (घ) 90°

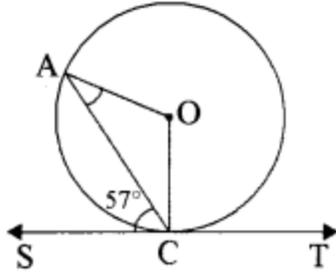
प्रश्न 11. आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle APB = 70^\circ$ तो $\angle AQB$ का मान है



- (क) 125°
- (ख) 110°
- (ग) 20°
- (घ) 55°

उत्तर: (घ) 55°

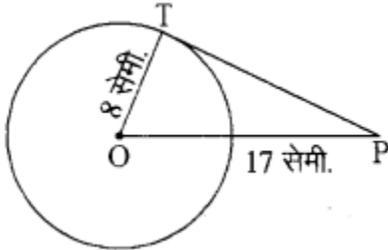
प्रश्न 12. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है तथा SCT बिन्दु C पर स्पर्श रेखा है। यदि $\angle ACS = 57^\circ$ हो, तो $\angle OAC$ की माप है



- (क) 33°
 (ख) 57°
 (ग) 23°
 (घ) 66°

उत्तर: (क) 33°

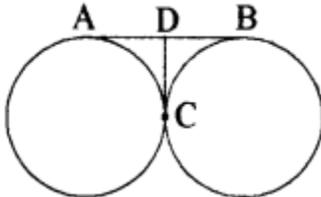
प्रश्न 13. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त की त्रिज्या OT = 8 सेमी. तथा OP = 17 सेमी. हैं। स्पर्श रेखा PT की लम्बाई है



- (क) 15 सेमी.
 (ख) 16 सेमी.
 (ग) 17 सेमी.
 (घ) 18 सेमी.

उत्तर: (क) 15 सेमी.

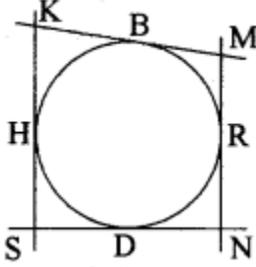
प्रश्न 14. दिए गए चित्र में AB और CD परस्पर स्पर्श A करने वाले वृत्तों की दो स्पर्श रेखायें हैं। यदि CD = 3 सेमी. है तो AB की लम्बाई है



- (क) 3 सेमी.
 (ख) 4 सेमी.
 (ग) 5 सेमी.
 (घ) 6 सेमी.

उत्तर: (घ) 6 सेमी.

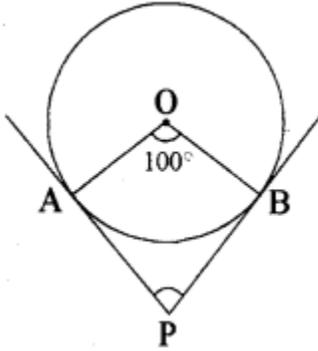
प्रश्न 15. दिये गये चित्र में, KM, MN, NS एवं SK -क क्रमशः B, R, D और H बिन्दुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $SK + MN = 12$ सेमी. हो, तो $KM + SN$ का मान है



- (क) 6 सेमी.
(ख) 12 सेमी.
(ग) 18 सेमी.
(घ) 24 सेमी.

उत्तर: (ख) 12 सेमी.

प्रश्न 16. दिये गये चित्र में, OA और OB वृत्त की। त्रिज्याएँ हैं। इनके बीच का कोण 100° का है। यदि बाहरी बिन्दु P से PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हों, तो $\angle APB$ का मान



- (क) 80°
(ग) 100°
(ख) 90°
(घ) 40°

उत्तर: (क) 80°

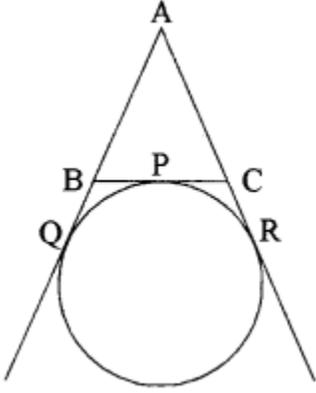
अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. दी गई आकृति में $\triangle ABC$ का बहिर्वृत्त, भुजाओं को Q, P एवं R पर स्पर्श करता है। यदि $AQ = 8$ सेमी. हो तो $\triangle ABC$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

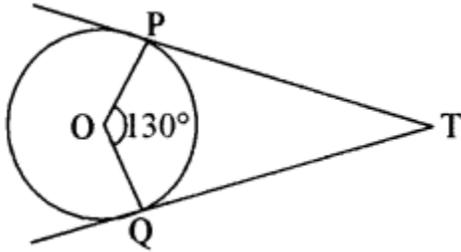
हल: हम जानते हैं कि

$$AQ = \frac{1}{2} \text{ परिमाप (ABC)}$$

$$\begin{aligned} \text{परिमाप } \triangle ABC &= 2 \times AQ \\ &= 2 \times 8 = 16 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$



प्रश्न 2. चित्र में यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 150^\circ$ तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात कीजिये।



हल: \because PT व QT स्पर्श, रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle POQ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 130^\circ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

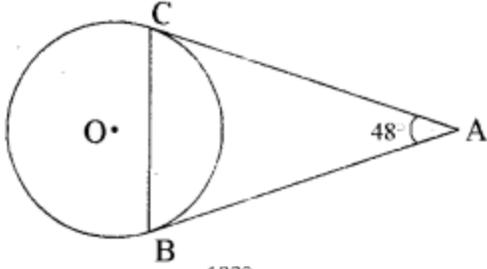
प्रश्न 3. दिये गये चित्र में, बाह्य बिन्दु A से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB व AC खींची गई हैं। यदि $\angle BAC = 48^\circ$ हो, तो $\angle ABC$ का मान लिखिए।

$$\text{हल: } \angle B + \angle C = 180^\circ - 48^\circ$$

$$= 132^\circ$$

लेकिन $AB = AC$

स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं।

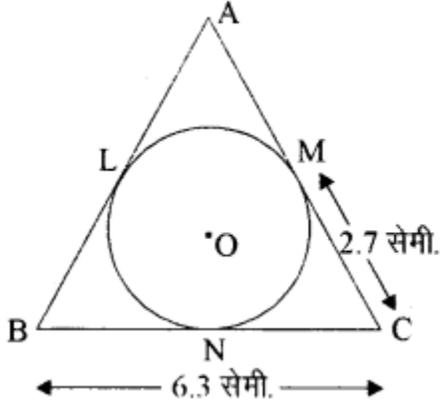


$$\therefore \angle ABC = \frac{132^\circ}{2}$$

$$= 66^\circ$$

प्रश्न 4. चित्र में AB, BC तथा CA वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि BC = 6.3 सेमी. तथा MC = 2.7 सेमी. हो, तो BL की नाप लिखिए।

उत्तर: हम जानते हैं
MC = स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।



$$\therefore BN = (6.3 - 2.7)$$

$$BN = 3.6 \text{ सेमी.}$$

और BN = BL है।

$$\therefore BL = 3.6 \text{ सेमी.}$$

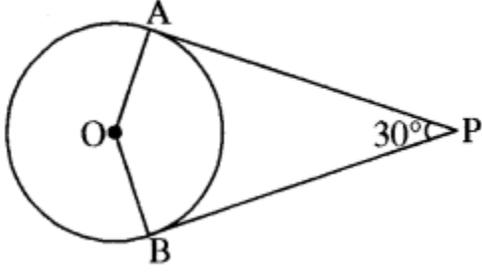
प्रश्न 5. दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं। यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी. तथा 3 सेमी. हों, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी लिखिए।

$$\text{उत्तर: } 5 + 3 = 8 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 6. दो वृत्त एक-दूसरे को अन्तःस्पर्श करते हैं, तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या लिखिए।

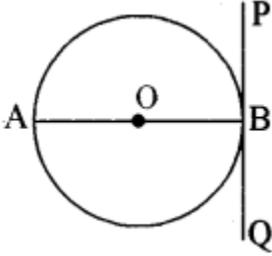
उत्तर: एक।

प्रश्न 7. दिए गए चित्र में PA व PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle APB = 30^\circ$ है तो $\angle AOB$ का मान लिखिए।



उत्तर: $\angle AOB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

प्रश्न 8. दिए गए चित्र में PBQ, बिन्दु B पर वृत्त की स्पर्श रेखा है। $\angle ABP$ का मान लिखिए।

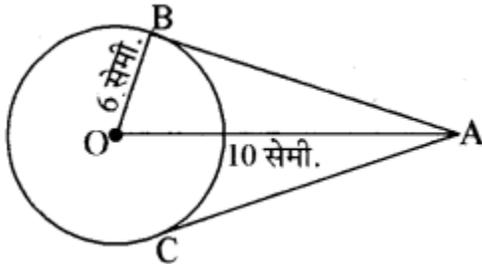


उत्तर: $\angle ABP = 90^\circ$

प्रश्न 9. किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 12 सेमी. है, यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है तो केन्द्र से बाह्य बिन्दु की दूरी बताइए।

उत्तर: दूरी = $\sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$ सेमी.

प्रश्न 10. दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। AB व AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि OA = 10 सेमी. तथा OB = 6 सेमी. हैं तो AC की लम्बाई लिखिए।



हल:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{10^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{100 - 36} \\ &= 64 = 8 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

तथा $AB = AC$ अतः, $AC = 8$ सेमी.

प्रश्न 11. वृत्त की सतह पर स्थित बिन्दु पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

उत्तर: वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

प्रश्न 12. यदि बिन्दु R से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर RA व RB स्पर्श रेखाएँ परस्पर θ के कोण पर झुकी हों तथा $\angle AOB = 40^\circ$ हो तो कोण θ का मान ज्ञात करें।

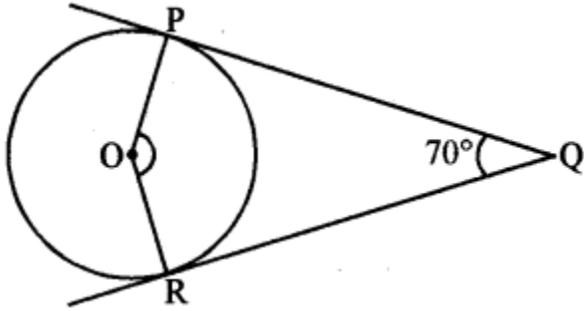
हल: \because RA व RB स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle AOB + \angle ARB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 40^\circ + \angle ARB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ARB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

प्रश्न 13. दी गयी आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु Q से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ QP और QR खींची गई हैं कोण POR का मान ज्ञात कीजिए।



हल: PQ व RQ स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle POR + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POR + 70^\circ = 180^\circ$$

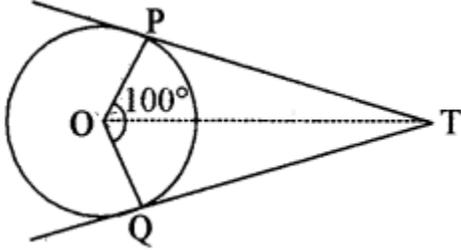
$$\Rightarrow \angle POR = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

प्रश्न 14. 5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 9 सेमी. दूर बाह्य बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

हल: हम जानते हैं कि वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. चित्र में TP और TO, SP O केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle TOQ = 50^\circ$ हो, तो $\angle OTP$ ज्ञात कीजिये।



हल: QT एक स्पर्श रेखा

$$\therefore \angle OQT = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \Delta OQT \text{ से } \angle OTQ &= 180^\circ - (\angle OQT + \angle QOT) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) \\ &= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta OQT \cong \Delta OPT \quad (\because PT = QT)$$

$$\angle P = \angle Q = 90^\circ$$

$$OT = OT$$

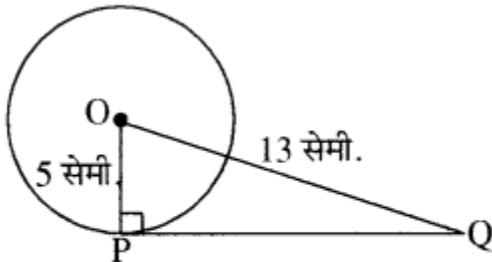
$$\therefore \angle OTP = \angle OTQ$$

$$\text{अतः } \angle OTP = 40^\circ \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 2. एक बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जबकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी. है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है।

हल:

$$\text{चूँकि } OQ^2 = OP^2 + PQ^2 \text{ (समकोण } \Delta OPQ \text{ में)}$$

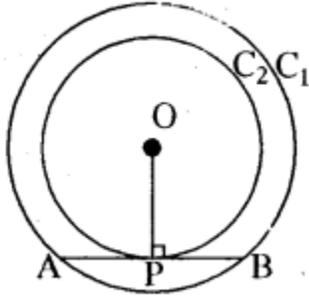


$$\text{या } PQ^2 = OQ^2 - OP^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\text{या } PQ = \sqrt{144} = 12$$

$$\text{अतः } PQ = 12 \text{ सेमी. उत्तर}$$

प्रश्न 3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा यदि छोटे वृत्त को स्पर्श करे तो स्पर्श बिन्दु उस जीवा का समद्विभाजन करता है।



हल: दिया हुआ है-

दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है। AB बड़े वृत्त C की जीवा है। जो छोटे वृत्त C को P बिन्दु पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है-

$$AP = PB$$

उपपत्ति-

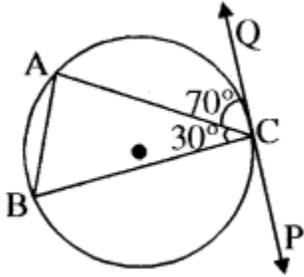
AB, वृत्त C को P पर स्पर्श करती है।

अतः $OP \perp AB$ (प्रमेय-13.1 से)

चूँकि O वृत्त C का भी केन्द्र है और AB वृत्त C की जीवा है। अतः कक्षा IX के प्रमेय अनुसार वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है।

अतः $AP = PB$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 4. निम्नलिखित कथन का उत्तरे सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए। “आकृति के अनुसार $\angle A = 70^\circ$ होगा जहाँ PQ वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श करती है।”



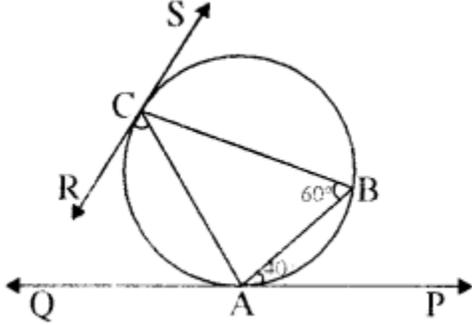
हल: असत्य, चूँकि $\angle PCB$ का एकान्तर वृत्तखण्ड पर बना कोण $\angle A$ है।

अतः $\angle A = \angle PCB$

और $\angle PCB = 180 - (70 + 30) = 80^\circ$

अतः $\angle A = 80^\circ$ होगा।

प्रश्न 5. आकृति में PQ तथा RS एक वृत्त पर क्रमशः बिन्दु A और C पर स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle ABC = 60^\circ$ और $\angle BAP = 40^\circ$ हो तो $\angle BCR$ ज्ञात कीजिए।



हल: स्पर्श रेखा PQ और जीवा AB स्पर्श बिन्दु A से गुजरते हैं, (प्रमेय 13.4) अतः

$$\angle ACB = \angle BAP = 40^\circ$$

इसी प्रकार स्पर्श रेखा CR एवं जीवा BC के बिन्दु C से गुजरते हैं

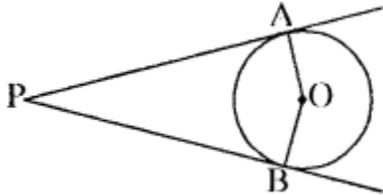
$$\text{अतः } \angle ACR = \angle ABC = 60^\circ \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर।

$$\angle ACB + \angle ACR = 40 + 60 = 100$$

$$\text{या } \angle BCR = 100^\circ$$

प्रश्न 6. दिये गये चित्र में, यदि PA व PB, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि कोण $\angle APB = 80^\circ$, तो कोण AOB का मान ज्ञात कीजिये।



हल: चित्र में PA और PB, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$

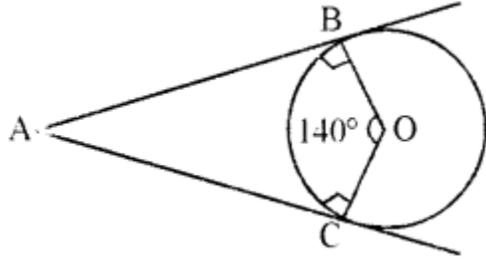
और $\angle APB = 80^\circ$ दिया गया है।

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 80^\circ)$$

$$= 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$$

प्रश्न 7. यदि एक बिन्दु A से, O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर AB व AC दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 140^\circ$ तो $\angle BAC$ का मान लिखिये।

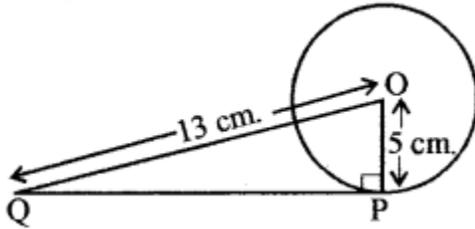
हल: चित्र में AB और AC, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।



$\therefore \angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$
 और $\angle BOC = 140^\circ$ दिया गया है।
 $\therefore \angle BAC + \angle BOC = 180^\circ$ होगा।
 अतः $\angle BAC = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 140^\circ)$
 $= 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$

प्रश्न 8. 5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 13$ सेमी. तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

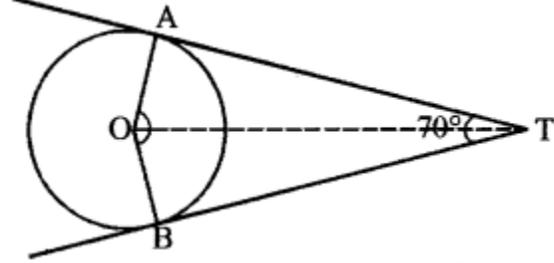
हल: प्रश्नानुसार आकृति बनाने पर



$OP = 5$ cm. और $OQ = 13$ cm.
 $\therefore PQ$ एक स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है।
 $\therefore \angle OPQ = 90^\circ$
 अब समकोण $\triangle OPQ$ में,
 पाइथागोरस प्रमेय से
 $(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2$
 मान रखने पर $(13)^2 = (5)^2 + (PQ)^2$
 या $169 = 25 + (PQ)^2$
 या $(PQ)^2 = 169 - 25 = 144$
 या $PQ = \sqrt{144} = 12$ cm

प्रश्न 9. यदि एक बिन्दु T से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TA व TB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 70° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle AOB$ को ज्ञात कीजिए।

हल:



चित्रानुसार TA और TB, केन्द्र O वाले विसी बिन्दु पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\angle TAO = \angle TBO = 90^\circ$$

$$\text{तथा } \angle ATB = 70^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ)$$

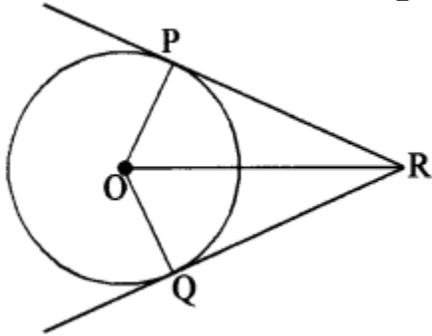
$$= 360^\circ - 250^\circ$$

$$= 110^\circ$$

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।



हल: दिया है-

वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु R से दो स्पर्श रेखाएँ RP और RQ हैं।

सिद्ध करना है-

$$RP = RQ$$

रचना-

OP, OQ और OR को मिलाया।

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लम्बवत् होती है। अतः |

$$\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ \dots (i)$$

अब $\triangle OPR$ और $\triangle OQR$ में,

$\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ$ समीकरण (i) से

$OR = OR$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

\therefore समकोण – कर्ण – भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से।

$\triangle OPR = \triangle OQR$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

$\Rightarrow RP = RQ$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. यदि किसी वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाये तो सिद्ध कीजिये कि

(i) वे रेखाएँ वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती हैं तथा

(ii) वृत्त के केन्द्र से मिलाने वाले रेखाखण्ड के साथ, दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर कोण बनाती हैं।

हल:

दिया है-

एक वृत्त $C(O, r)$ है जिसके बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP और AQ खींची ग हैं।

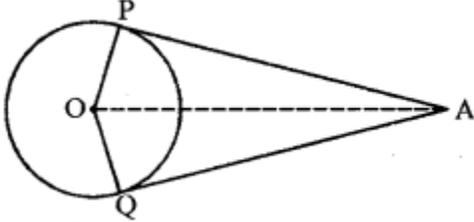
सिद्ध करना है-

(i) $\angle AOP = \angle AOQ$

(ii) $\angle OAP = \angle OAQ$

रचना-

OA, OP तथा OQ को मिलाया।



उपपत्ति-

$\triangle OPA$ और $\triangle OQA$ में

$AP = AQ$ (एक ही वृत्त की स्पर्श रेखाएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$ (त्रिज्याएँ)

$S - S - S$ सर्वांगसमता से

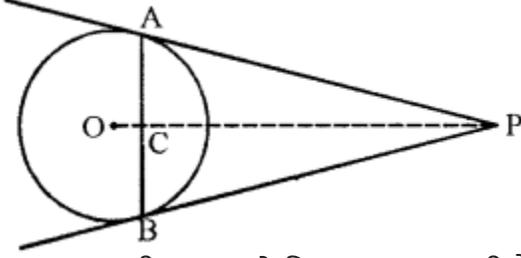
$\triangle OPA = \triangle OQA$

$\angle AOP = \angle AOQ$ (CPCT)

तथा $\angle OAP = \angle OAQ$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. सिद्ध करो कि वृत्त की किसी जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ, जीवा से समान कोण बनाती हैं।

हल: माना वृत्त $C(O, r)$ की जीवा AB के सिरे A और B पर स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं जो कि बिन्दु P पर काटती हैं।



माना OP , जीवा AB को बिन्दु C पर काटती है।

सिद्ध करना है-

$$\angle PAC = \angle PBC$$

उपपत्ति-

$\triangle PCA$ और $\triangle PCB$ में।

$PA = PB$ (बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$$\angle APC = \angle BPC$$

[\because स्पर्श रेखाएँ PA व PB , OP के साथ समान कोण बनाती हैं।] S-A-S सर्वांगसमता से

$$\triangle PCA = \triangle PCB$$

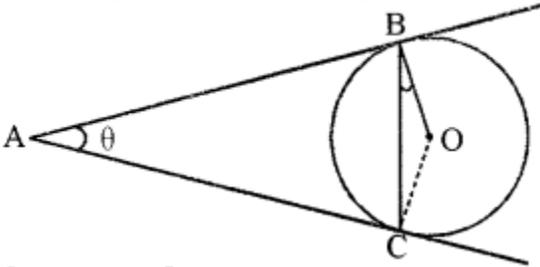
$$\Rightarrow \angle PAC = \angle PBC \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 13. केन्द्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा AC खींची गई हैं। सिद्ध कीजिये कि $\angle BAC = 2\angle OBC$.

अथवा

केन्द्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle POQ$ है।

हल: हमें केन्द्र O वाला एक वृत्त, एक बाह्य बिन्दु A तथा वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AB और AC , जहाँ B, C स्पर्श बिन्दु हैं, दिये हैं जैसा आकृति में दिखाया गया है।



सिद्ध करना है-

$$\angle BAC = 2\angle OBC$$

माना। $\angle BAC = 8$

प्रमेय से हम जानते हैं कि $AB = AC$
 अतः ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$$

$$\angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$$

$$\angle OBA = 90^\circ$$

$$\text{अतः} \quad \angle OBC = \angle OBA - \angle ABC$$

$$= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$$

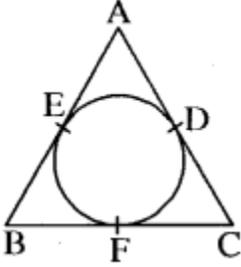
$$\angle OBC = \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$\therefore \angle BAC = 2\angle OBC$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 14. चित्र में, $AD = 15$ सेमी., $CF = 12$ सेमी. और $BE = 7$ सेमी., तो त्रिभुज ABC की परिमिति ज्ञात कीजिये।

हल: चूँकि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है।



$$\therefore AD = AE = 15 \text{ सेमी.}, BE = BF = 7 \text{ सेमी.}$$

$$CF = CD = 12 \text{ सेमी.}$$

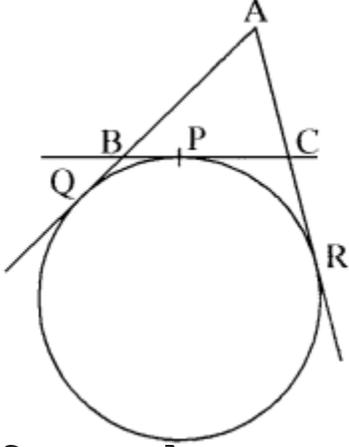
$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ की परिमिति} &= AB + BC + CA \\ &= (AE + BE) + (BF + CF) + (CD + DA) \\ &= (15 + 7) + (7 + 12) + (12 + 15) \\ &= (22 + 19 + 27) \text{ सेमी.} \\ &= 68 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक वृत्त $AABC$ की भुजा IBC को P पर बाह्य स्पर्श करता है। तथा AB व AC को बढ़ाए जाने पर Q और R पर स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिए कि $AQ = \frac{1}{2}(\Delta ABC \text{ की परिमिति})$

हल: दिया हुआ है-

ΔABC की भुजा BC वृत्त को P पर एवं AB व AC बढ़ाने पर BP P IC क्रमशः Q व R पर स्पर्श करती है।



सिद्ध करना है-

$$AQ = \frac{1}{2}$$

(ΔABC की परिमिति)

उपपत्ति-

$$AQ = AR \text{ (प्रमेय 13.2 से) } \dots\dots(1)$$

$$\text{इसी प्रकार } BQ = BP \dots\dots(2)$$

$$\text{एवं } CP = CR \dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned} \text{अब } AQ + AR &= [AB + BQ] + [AC + CR] \\ &= [AB + BP] + [AC + CP] \\ &= AB + (BP + CP) + AC \end{aligned}$$

$$2AQ = AB + BC + AC \dots\dots[\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\text{या } AQ = \frac{1}{2} [AB + BC + AC]$$

$$\text{या } AQ = \frac{1}{2} (\Delta ABC \text{ की परिमिति}) \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 2. ΔABC की भुजाएँ AB, BC एवं CA एक 4 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त को क्रमशः L, M एवं N पर स्पर्श करती हैं। यदि AN = 6 सेमी. एवं CN = 8 सेमी. हो तो ΔABC की परिमिति ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त का केन्द्र O है।

अर्थात् OL = OM = ON = 4 सेमी.

माना कि BL = x सेमी.

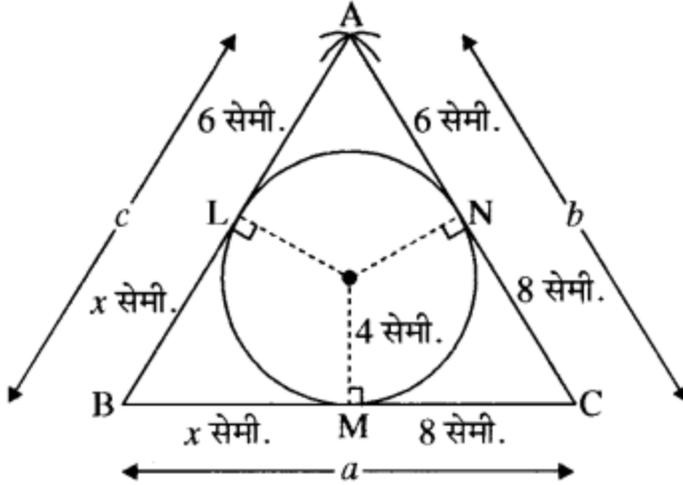
तो BL = BM = x सेमी. (देखिए आकृति में) .

$\therefore AN = AL = 6$ सेमी.

इसी प्रकार CN = CM = 8 सेमी.

तो BC = (x + 8) सेमी. = a एवं AB = (x + 6) = c

तथा AC = 6 + 8 = 14 सेमी. = b



हीरो के सूत्र में $2s = a + b + c$
या $2s = x + 8 + 14 + x + 6$
या $2s = 2x + 28$
या $s = x + 14$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
 $= \sqrt{(x+14)(x+14-x-8)(x+14-14)(x+14-x-6)}$
 $= \sqrt{(x+14) \times 6 \times x \times 8} = \sqrt{48x(x+14)} \dots\dots(1)$

तथा ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta AOB$ का क्षेत्रफल $+ \Delta BOC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta AOC$ का क्षेत्रफल
 $= \frac{1}{2} AB \times OL + \frac{1}{2} BC \times OM + \frac{1}{2} AC \times ON$
 $= \frac{1}{2} (x+6) \times 4 + \frac{1}{2} (x+8) \times 4 + \frac{1}{2} 14 \times 4$
 $= 2(x+6) + 2(x+8) + 28$
 $= 2x + 12 + 2x + 16 + 28$
 $= 4x + 56 \dots\dots(2)$

समीकरण (1) व (2) से $\sqrt{48x(x+14)} = 4x + 56$

$4\sqrt{3x(x+14)} = 4(x+14)$

या $\sqrt{3x(x+14)} = (x+14)$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$3x(x+14) = (x+14)^2$

या $3x = x + 14$

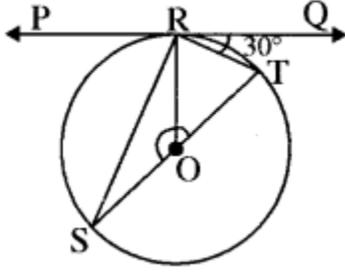
या $3x - x = 14$

या $x = 7$

अतः $AB = 6 + 7 = 13$ एवं $BC = 7 + 8 = 15$

इस प्रकार ΔABC की परिमिति $= (13 + 15 + 14)$ सेमी. $= 42$ सेमी.

प्रश्न 3. आकृति में PQ, O केन्द्र वाले, P वृत्त की स्पर्श रेखा है जो वृत्त को R पर स्पर्श करती है। यदि कोण $\angle TRQ = 30^\circ$ हो, तो $\angle SOR$ एवं $\angle RTO$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि SOT वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle SRT = 90^\circ$

तथा RT जीवा द्वारा $\angle TRQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड RST है।

अतः $\angle RST = \angle TRQ = 30^\circ$

परन्तु $\triangle ORS$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी $OS = OR$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

अतः $\angle RST = \angle SRO = 30^\circ$

$\therefore \angle SOR = 180 - (30 + 30) = 180 - 60 = 120^\circ$

$\angle ORT = \angle SRT - \angle SRO$

$= 90 - 30 = 60^\circ$

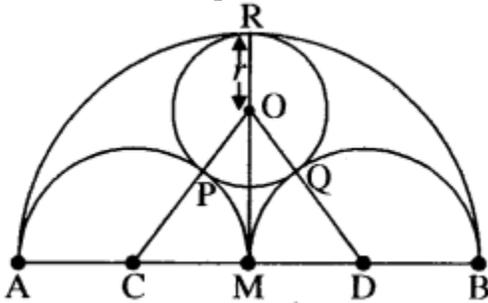
अब $\triangle ORT$ में।

$OR = OT$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः $\angle RTO = \angle ORT = 60^\circ$

एवं $\angle SOR = 120^\circ$

प्रश्न 4. आकृति में रेखाखण्ड AB को मध्य बिन्दु M है। AM, MB एवं AB को व्यास मानकर AB के एक ही ओर अर्द्धवृत्त खींचे गये हैं। 'O' को केन्द्र मानकर त्रिज्या का एक वृत्त इस प्रकार खींचा गया है जो तीनों अर्द्धवृत्तों को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए $r = \frac{1}{6}AB$



हल: दिया हुआ है-

आकृति में, C, M, D एवं O को केन्द्र मानकर अर्द्धवृत्त प्रश्नानुसार बने हुए हैं।

सिद्ध करना है-

$r = \frac{1}{6}AB$

उपपत्ति है-

माना कि $AB = a$ तो $AM = \frac{a}{2}$ परन्तु $AC = CM = MD = DM = CP = DQ$ बराबर अर्द्धवृत्तों की त्रिज्याएँ हैं।

$$\text{अतः } CM = MD = CP = DQ = \frac{a}{4} \quad \dots(1)$$

$$\text{अब } OC = OD = \left(\frac{a}{4} + r\right) \quad \dots(2)$$

$$OM = (MR - OR) = \left(\frac{a}{2} - r\right) \quad \dots(3)$$

चूँकि $\triangle OCD$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा $OC = OD$ है एवं M , CD का मध्य बिन्दु है।

अतः $OM \perp CD$

अब समकोण त्रिभुज OMC में $OC^2 = CM^2 + OM^2$

अतः समीकरण (1), (2) एवं (3) से

$$\left(\frac{a}{4} + r\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$$

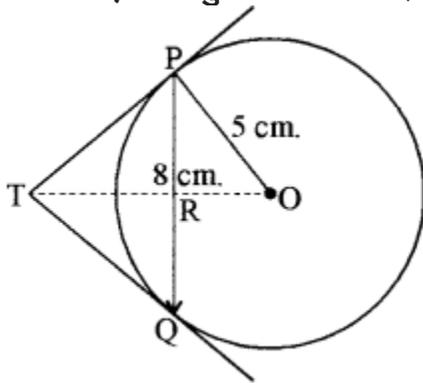
$$\text{या } \frac{a^2}{16} + r^2 + \frac{1}{2}ra = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + r^2 - ra$$

$$\text{या } \frac{1}{2}ra + ra = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{या } \frac{3}{2}ra = \frac{a^2}{4} \text{ या } a(6r - a) = 0 \text{ परन्तु } a \neq 0$$

$$\text{अतः } 6r = a \text{ या } r = \frac{1}{6}a \text{ या } r = \frac{1}{6}AB \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 5. 5 cm. त्रिज्या के एक वृत्त की 8 cm. लम्बी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिन्दु T पर प्रतिच्छेद करती हैं (देखिए। आकृति)। TP की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल: OT को मिलाएँ। माना यह PQ को बिन्दु R पर प्रतिच्छेदित करती है। तब $\triangle TPQ$ समद्विबाहु है और TO , $\angle PTQ$ का कोणार्धक है। इसलिए $OT \perp PQ$ और इस प्रकार OT , PO का अर्धक है। जिससे $PR = RQ = 4$ cm.

साथ ही $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} \text{cm.} = 3 \text{cm}$

TP को पाइथागोरस प्रमेय द्वारा निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं। माना $TP = x$ और $TR = y$ तो समकोण ΔPRT में

समीकरण (i) को समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$\begin{aligned} (TP)^2 &= (TR)^2 + (PR)^2 \\ (x)^2 &= y^2 + (4)^2 \\ x^2 &= y^2 + 16 \end{aligned} \quad \dots (i)$$

समकोण ΔOPT में

$$\begin{aligned} (OT)^2 &= (PT)^2 + (PO)^2 \\ (TR + OR)^2 &= (x)^2 + (5)^2 \\ (y + 3)^2 &= x^2 + 25 \end{aligned} \quad \dots (ii)$$

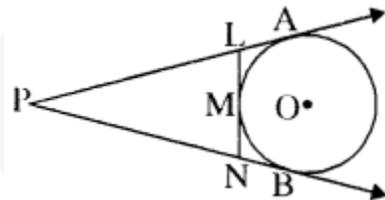
समीकरण (i) को समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$\begin{aligned} x^2 + 25 - x^2 &= (y + 3)^2 - y^2 - 16 \\ \Rightarrow 25 &= y^2 + 6y + 9 - y^2 - 16 \\ 25 &= 6y - 7 \\ 6y &= 32 \\ y &= \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

समीकरण (i) से

$$\begin{aligned} \therefore x^2 &= \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{256}{9} + 16 \\ &= \frac{256 + 144}{9} = \frac{400}{9} \\ \therefore x &= \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3} \text{ cm. उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. किसी बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं PA तथा PB पर स्थित दो बिन्दुओं L व N पर काटने P वाली रेखा वृत्त के बिन्दु M पर स्पर्श करती है, तो सिद्ध करें- $PL + LM = PN + NM$



हल: दिया है-

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। P एक बिन्दु है जो वृत्त के बाहर है। PA व PB दो स्पर्श रेखाएँ हैं। M वृत्त पर

कोई बिन्दु है। रेखाखण्ड LN बिन्दु M से गुजरता है।

सिद्ध करना है-

$$PL + LM = PN + NM$$

उपपत्ति-

P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं।

$$\therefore PA = PB$$

$$\text{या } PL + LA = PN + NB \quad \dots(i)$$

LA और LM वृत्त की L बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore LA = LM \quad \dots(ii)$$

$$\text{इसी प्रकार } NB = NM \quad \dots(iii)$$

(i), (ii) और (iii) से

$$PL + LM = PN + NM \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 7. समकोण त्रिभुज ABC की भुजा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।

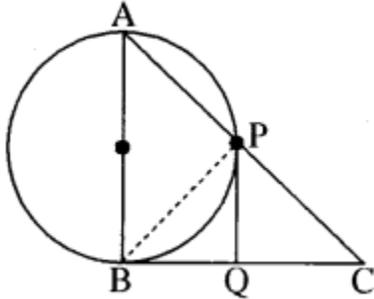
हल: सिद्ध करना है-

$$BQ = QC,$$

जहाँ Q, P पर खींची गई स्पर्श रेखा एवं BC का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

रचना-

BP को मिलाया।



उपपत्ति-

\therefore AB वृत्त का व्यास है।

$\therefore \angle APB = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।)

$$\therefore \angle APB + \angle BPC = 180^\circ$$

$$\therefore 90^\circ + \angle BPC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ \quad \dots(i)$$

$\therefore \triangle ABC$ में $\angle ABC = 90^\circ$

$$\therefore \angle BAC + \angle ACB = 90^\circ \quad \dots(ii)$$

(\therefore त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

समीकरण (i) तथा (ii) से

या $\angle BPC = \angle BAC + \angle ACB$
 किन्तु $\angle BPQ + \angle CPQ = \angle BAC + \angle ACB$ (iii)
 $\angle BPQ = \angle BAC$
 (एकान्तर वृत्त खण्ड के कोण)

∴ समीकरण (iii) से

$\angle CPQ = \angle ACB$
 $\Rightarrow \angle CPQ = \angle PCQ$ ($\because \angle ACB = \angle PCQ$)
 $\therefore PQ = QC$ (iv)
 पुनः $PQ = QB$ (v)

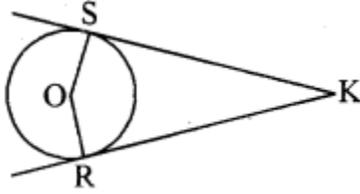
(बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।)

∴ समीकरण (iv) तथा (v) से।

$QC = QB$

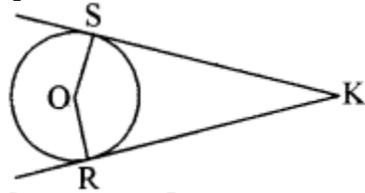
अतः PQ, BC को समद्विभाजित करती है।

प्रश्न 8. दी गई आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु K से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ KR, KS खींची गई हैं, तो सिद्ध। कीजिए कि $KR = KS$ ।



हल: दिया है-

वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु K से दो स्पर्श रेखाएँ KR और KS



सिद्ध करना है-

$KR = KS$.

रचना-

OS, OR व OK को मिलाया।

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्बवत् होती है।

अतः $\angle OSK = \angle ORK = 90^\circ$ (i)

अब $\triangle OSK$ तथा $\triangle ORK$ में

$\angle OSK = \angle ORK = 90^\circ$ [समीकरण (i) से]

$OK = OK$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OS = OR$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

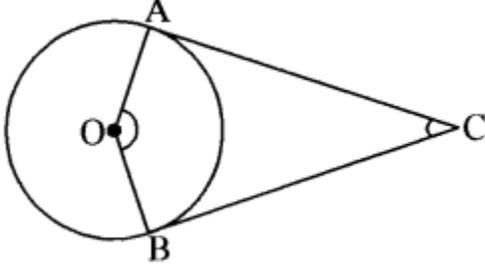
∴ समकोण – कर्ण – भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$$\triangle OSK = \triangle ORK$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

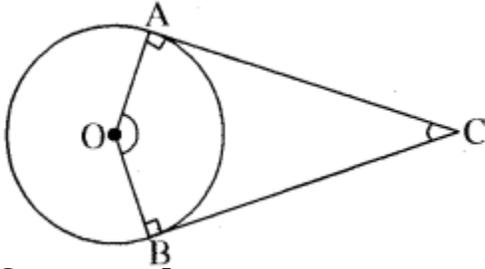
$$KR = KS \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 9. दी गई आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु C से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ CA, CB खींची गई हैं, तो सिद्ध कीजिए $\angle AOB$ व $\angle ACB$ संपूरक हैं।



हल: दिया है-

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। C वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु C से CA और CB दिये गये वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।



सिद्ध करना है-

$$\angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$$

उपपत्ति-

OA त्रिज्या है और CA बिन्दु C से दिये गये वृत्त पर स्पर्श रेखा है।

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ \text{(i)}$$

[∵ वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।]

$$\text{इसी प्रकार } \angle OBC = 90^\circ \text{(ii)}$$

अब, चतुर्भुज BOAC में,

$$\angle BOA + \angle CBO + \angle OAC + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\text{या } \angle BOA + 90^\circ + 90^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\text{या } \angle BOA + \angle ACB = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\text{या } \angle BOA + \angle ACB = 180^\circ \text{ (इतिसिद्धम्)}$$