अध्याय – 14

गुणनखंडन

(FACTORIZATION)

14.1 भूमिका

आपने गुणनखण्ड के बारे में पढ़ा है। आइए, गुणनखण्ड पर आधारित कुछ प्रश्नों को करें।

नीचे तालिका में कुछ संख्याओं के सभी गुणनखण्ड दिए गए हैं। शेष संख्याओं के सभी गुणनखण्ड रिक्त स्थानों में भरिए।

सारणी

संख्या	सभी गुणनखण्ड
1	1
2	1, 2
3	....
4	....
5	....
6	1, 2, 3, 6
7	....

संख्या	सभी गुणनखण्ड
18	....
21	1, 3, 7, 21
27	....
28	....
29	1, 29
30	....

सारणी से ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके केवल दो गुणनखण्ड है।

....

क्या आप बता सकते हैं ऐसी संख्याओं को क्या कहते हैं?

....

अब दो से अधिक गुणनखण्डवाली संख्याओं को यहाँ लिखिए ....
ये सभी भाज्य संख्याएँ हैं।

सोचिए क्या 2 के अलावा कोई और सम संख्या अभाज्य हो सकती है?

क्या सभी संख्याएँ अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखी जा सकती हैं? सोचिए। अलग–अलग संख्याएँ लेकर उनके अभाज्य गुणनखण्ड करके देखिए।

....

क्या संख्याओं की तरह ही बीजीय व्यंजकों के भी गुणनखण्ड किए जा सकते हैं? आइए, इसे समझें।

14.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड (Factorization of Algebraic Expression)

$3x^2y$ एक व्यंजक है। आपने देखा है कि व्यंजक के पद गुणनखण्डों के गुणनफल होते हैं। यहाँ $3x^2y = 3 \times x \times x \times y$ है। इसके आगे गुणनखण्ड नहीं किए जा सकते, अतः दिया गया गुणनखण्ड $3x^2y$ का अभाज्य गुणनखण्ड है। बीजगणितीय संदर्भ में इसे 'अखंडनीय' गुणनखण्ड कहते हैं।

$3x^2y$ का एक गुणनखण्ड निम्नलिखित है–

$$3x^2y = 3 \times x^2 \times y$$

क्या यह गुणनखण्ड $3x^2y$ का अखण्डनीय गुणनखण्ड है? स्पष्टतः 3 का अभाज्य गुणनखण्ड 3 है। वास्तव में 1 प्रत्येक पद का गुणनखण्ड है, परन्तु विशेष परिस्थितियों में जब आवश्यक हो तब ही इसे लिखा जाता है। x^2 को $x \times x$ के गुणनखण्ड रूप में लिखा जा सकता है अतः $3 \times x^2 \times y$ अखण्डनीय गुणनखण्ड नहीं है।

इसे भी समझें

$25 = 25 \times 1$

क्या यह 25 का अखण्डनीय रूप है? इसे अखण्डनीय रूप में लिखिए?

....

$12 = 2 \times 6$

क्या यह अखण्डनीय रूप है? क्यों नहीं?

एक अन्य व्यंजक $2y^2\,(y+1)$ पर विचार करें। क्या इसे इसके अखण्डनीय गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है? सोचिए।

$$2y^2\,(y+1) = 2 \times y \times y\,(y+1)$$

स्वयं करके देखिए

क्र.सं.	पद / व्यंजक	अखण्डनीय गुणनखण्ड
1.	$5xyz$	$5 \times x \times y \times z$
2.	$9y^2$	....
3.	$16xy^2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$
4.	$13xyz$	....
5.	$12x\,(y + 1)$	....

ऊपर दिए हुए उदाहरणों से आपको यह तो स्पष्ट हो ही गया होगा कि जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड करते हैं, तो हम उसे गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखण्ड संख्याएँ, चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। किसी भी संख्या अथवा व्यंजक को ऐसे टुकड़ों में बाँटना जिसके गुणन से वह बनी है (अथवा जिसका पूरा–पूरा भाग उस संख्या अथवा व्यंजक में जाए) करने की प्रक्रिया गुणनखण्डन होती है। व्यंजक $5xyz$, $3xy^2$, $5x\,(y+2)$ जैसे व्यंजक पहले से ही गुणनखण्ड के रूप में है जैसे $5xyz = 5 \times x \times y \times z$

अब जरा $3x + 6$, $2x + 4$, $x^2 + 2x$ जैसे व्यंजकों पर विचार कीजिए। $3x + 6$ किन संख्याओं व व्यंजकों के गुणन से बना है? आइए ऐसे ही कुछ व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के तरीके निकालें।

14.3 सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखण्ड द्वारा गुणनखण्डन (Factorization by Common Factor)

ऊपर दिए व्यंजक $3x + 6$ पर विचार कीजिए। इसमें दो पद $3x$ एवं 6 हैं। दोनों पदों को उनके अभाज्य गुणनखण्ड के गुणनफल के रूप में लिखते हैं।

$3x \quad = 3 \times x$

$6 \quad = 2 \times 3$

अतः $3x + 6 \quad = (\underline{3 \times x}) + (\underline{2 \times 3})$

ध्यान दें, यहाँ गुणनखण्ड 3 दोनों पदों में उभयनिष्ठ हैं, इसे सार्व गुणनखण्ड या उभयनिष्ठ गुणनखण्ड कहते हैं।

वितरण नियम से हम जानते हैं कि–

$a \times b + a \times c \;= a\,(b + c)$

अतः $\quad 3 \times x + 2 \times 3 \;= 3\,(x + 2)$

अतः $\quad 3x + 6 \;= 3 \times x + 2 \times 3$

$\qquad = 3\,(x + 2)$

इस प्रकार व्यंजक $3x + 6$ वही है जो $3 \times (x + 2)$ हैं; अब हम इसके गुणनखण्ड पढ़ सकते हैं। अतः 3 और $(x + 2)$ व्यंजक के अभाज्य (अखंडनीय) गुणनखण्ड है।

आइए, अब $6a^2b - 9ab$ के गुणनखण्ड करते हैं। इसके लिए पहले दोनों पदों के गुणनखण्ड करें।

$3(x + 2)$ को उनके गुणनखण्डों से भाग करके देखें, क्या भाग पूरा–पूरा जाता है?

$6a^2b \quad = 2 \times 3 \times a \times a \times b$

$9ab \quad = 3 \times 3 \times a \times b$

स्पष्टतः, दोनों पदों में 3, a व b उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। अतः

$$\begin{aligned} 6a^2b - 9ab &= (2 \times 3 \times a \times a \times b) - (3 \times 3 \times a \times b) \\ &= (2 \times 3ab \times a) - (3 \times 3ab) \\ &= 3ab\,(2 \times a - 3) \qquad \text{(3ab सार्व लेने पर)} \\ &= 3ab\,(2a - 3) \end{aligned}$$

एक व्यंजक गुणनफल के रूप में एकपदी होता है।

यही वांछित गुणनखण्ड रूप है।

हमने दो पदोंवाले व्यंजक का गुणनखण्डन किया इसी प्रकार दो से अधिक पदोंवाले व्यंजकों का गुणनखण्डन भी किया जा सकता है। जैसे–

$15a^4 - 20a^3 + 5a^2$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

यह तीन पदीय (त्रिपदीय) व्यंजक है पहले हम प्रत्येक पद का द्विपद की भाँति अभाज्य गुणनखण्ड निकालते हैं :–

हल : $15a^4 - 20a^3 + 5a^2 = (3 \times \underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a} \times a \times a) - (2 \times 2 \times \underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a} \times a) + (\underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a})$

$15\,a^4 = 3 \times 5 \times a \times a \times a \times a$
$20\,a^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$5\,a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ध्यान दीजिए यहाँ $5 \times a \times a$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। अतः सार्व को बंटन नियम के अनुसार बाहर लेते हैं।

$$= 5 \times a \times a\,(3 \times a \times a - 2 \times 2 \times a + 1)$$
$$= 5a^2\,(3a^2 - 4a + 1)$$

स्वयं करके देखिए (गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए)

(i)	$11xy + 22$	(ii)	$p + pq - pqr$	(iii)	$13x^2 - 2by^2$
(iv)	$4p^2q^2r^2 + 2pqr$	(v)	$7x^2y - 8y$		

14.4 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन (Factorization by Regrouping of termeqs)

व्यंजकों का गुणनखण्डन करते समय हमें कई बार ऐसे व्यंजक मिल जाते हैं, जिनके सभी पदों में कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1 को छोड़कर) नहीं होता। पर पदों के कुछ युग्मों में उभयनिष्ठ होते हैं, जैसे– $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ में दिखता है, आइए, इसे समझें।

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ में क्या आपको कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड मिलता है? ....

पर जब हम इसे अलग तरह से व्यवस्थित (पुनः समूहन) करते हैं, जैसे :–

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$ (पुनः समूहन)

तब इसके प्रथम दो पदों में x^2 व अंतिम दो पदों में y^2 उभयनिष्ठ हो जाता है।

$= x^2 (a + b) + y^2 (a + b)$

$= (a + b) (x^2 + y^2)$ (अभीष्ट गुणनखण्ड)

इस तरह व्यंजकों को पुनः व्यवस्थित कर उसका गुणनखण्ड प्राप्त किया जा सकता है। यही पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन है। पुनः समूहन एक से अधिक विधियों द्वारा किया जा सकता है। किन्तु परिणाम अपरिवर्तित रहता है। क्रम बदल सकते हैं किन्तु आप जानते हैं कि गुणन क्रिया में क्रम बदलने से परिणाम नहीं बदलते। इस व्यंजक का एक और विधि से भी पुनः समूहन कर गुणनखण्डन किया जा सकता है। जैसे :–

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ (पुनः समूहन)

$= a (x^2 + y^2) + b (x^2 + y^2)$ (उभयनिष्ठ लेने पर)

$= (x^2 + y^2) (a + b)$

इस प्रकार पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन में हम निम्न चरण में कार्य करते हैं।

चरण–1 जाँच करते हैं कि व्यंजक के सभी पदों में कोई सार्व गुणनखण्ड है कि नहीं।

चरण–2 सभी पदों में सार्व गुणनखण्ड नहीं होने पर ऐसे पदों की पहचान करते हैं जिनमें सार्व गुणनखण्ड हो, फिर उन पदों को समूह में व्यवस्थित करते हैं।

चरण–3 प्रत्येक समूह का गुणनखण्डन करते हैं।

चरण–4 समूहों के सार्व गुणनखण्ड की पहचान कर अलग कर वितरण नियम से संयोजित करते हैं।

इसे भी समझिए –

$9ab + 6b^2 + ba + 2b$ (पुनः समूहन करने पर)

$3b (3a + 2b) + 1 (3a + 2b)$ (1 सबके लिए सार्व होता है)

$(3b+1) (3a+2b)$

जैसे $ab + ac + db + dc$ का गुणनखण्डन कीजिए।

चरण–1 यहाँ चारों पदों में कोई सार्वगुणनखण्ड नहीं है।

चरण–2 व्यंजक के पद $(ab + ac)$ का एक समूह बनाते हैं।

$\because$ $(ab + ac)$ में a सार्व गुणनखण्ड है। उसी प्रकार $(db + dc)$ का एक समूह बनाते हैं (क्यों?)

चरण–3 अब दोनों समूहों का गुणनखण्डन करते हैं।

$$ab + ac + db + dc = (ab + ac) + (db + dc)$$
$$= a\,(b + c) + d\,(b + c)$$

चरण–4 अब दोनों समूहों के सार्व गुणनखण्ड $(b + c)$ को वितरण नियम से संयोजित करते हैं।

$a\,(b + c) + d\,(b + c) = (b + c)\,(a + d)$

अर्थात् $ab + ac + db + dc = (b + c)\,(a + d)$

उपर्युक्त व्यंजक का एक अन्य विधि से समूहन कर गुणनखण्डन कीजिए।

प्रश्नावली – 14.1

1. दिए गए पदों में सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

(a) $9y, 27$ (b) $5x,\ 25x$ (c) $7ab, -14ab$

(d) $-16x^2y^2, -x^2y^2z^2$ (e) $17x, 102y$ (f) $11xyz, 100z$

(g) a^2bc, ab^2c, abc^2 (h) $2x, 3y, 5z$

(i) $20x^2y^2, 30y^2z^2, 40z^2x^2$ (j) $2x\,(a + b)\,(b + c), x\,(a + b)$

2. दिए गए उदाहरण के आधार पर खाली जगह को भरिए–

क्र.सं.	पद	अलग किया गया गुणनखण्ड	शेष गुणनखण्ड
i.	$12x^2y$	$3x$	$4xy$
ii.	$15ab$	-3	....
iii.	$-20xy$	$-2xy$	....
iv.	$40x^2y^2$	....	-20
v.	$-27abc$	....	$-3ab$

3. **निम्नलिखित का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–**

(a)	$12x^2 - 15y^2 - 24x^2z^2$	(b)	$-6a^2 + 36a - 24ab$
(c)	$3a^2 + ab + 9a + 3b$	(d)	$6ab - 4b + 6 - 9a$
(e)	$ab^2 + a^2b + ac + bc$	(f)	$a^2bc + b^2ca + c^2ab + a + b + c$
(g)	$a(b - c) + d(c - b)$	(h)	$3y(y + 3) + 6y(3y + 9)$
(i)	$a^3 - 3a^2 + a - 3$	(j)	$ab^2 - bc^2 - ab + c^2$
(k)	$xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$		

14.5 सर्वसमिकाओं के प्रयोग से गुणनखण्डन

आप $(a + b)^2$ व इसके वृहत रूप $(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$ के बारे में पढ़ चुके हैं, अतः जब व्यंजक पूर्ण वर्ग हो, तो मानक सर्वसमिका के प्रयोग से उसका गुणनखण्डन किया जा सकता है।

आइए, मानक सर्वसमिकाओं के प्रयोग से व्यंजकों (पूर्ण वर्ग) का गुणनखण्डन करते हैं।

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2$

(iii) $x^4 + 25y^4 - 10x^2y^2$

हल : (i) यहाँ $9x^2 + 12xy + 4y^2$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2$$
$$\quad a^2 \quad + 2 \times a \times b \quad + b^2$$
$$= (3x + 2y)^2 \quad (\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2)$$
$$= (3x + 2y)(3x + 2y)$$

यहाँ $a = 3x$ व $b = 2y$ है

उपर्युक्त उदाहरण में हमने व्यंजक को $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में बदला जिससे हमें गुणनखण्ड प्राप्त हुआ। इसी प्रकार अन्य व्यंजकों को मानक रूप में बदलकर उसका गुणनखण्ड करते हैं।

(ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2 = 4(p^2q^2 - 2pqr + r^2)$

$$= 4[(pq)^2 - 2(pq)r + (r)^2]$$
$$= 4(pq - r)^2 \quad \text{(क्यों?)} \quad [a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$
$$= 4(pq - r)(pq - r)$$

दिए गए उदाहरण में सार्व गुणनखण्ड को अलग करने से मानक रूप प्राप्त होता है।

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy = x^2 - 10xy + 25y^2$

$= (x)^2 - 2 \times x \times 5y + (5y)^2$

$= (x - 5y)^2$

$= (x - 5y)(x - 5y)$

इस प्रकार ऐसे व्यंजक जो पूर्ण वर्ग होते हैं का गुणनखण्डन मानक सर्वसमिका के आधार पर किया जा सकता है।

14.6 दो वर्गों के अंतर के रूप में दिए गए व्यंजक का गुणनखण्डन

हम जानते हैं : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

इस रूप में दिए गए व्यंजकों को उपर्युक्त मानक सर्वसमिका के रूप में बदलकर उसका गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं। दिये गए उदाहरणों द्वारा इसे समझने का प्रयास करते हैं।

निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्डन कीजिए–

(i) $16x^2 - 9y^2$ (ii) $x^4 - y^2$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2$ (iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$ (v) $5^2 - 4^2$

(i) $16x^2 = (4x)^2$, $9y^2 = (3y)^2$

$\therefore 16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2$

$= (4x - 3y)(4x + 3y)$

$\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(ii) $x^4 - y^2 = (x^2)^2 - (y)^2$

$= (x^2 - y)(x^2 + y)$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2 = \{(p + q) - (r - s)\}\{(p + q) + (r - s)\}$

$= \{p + q - r + s\}\{p + q + r - s\}$

$= (p + q - r + s)(p + q + r - s)$

(ii) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = (x)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz)$

$= (x)^2 - (y - z)^2$ $\boxed{(a-b)^2 \text{ से}}$

$= \{x - (y - z)\}\{x + (y - z)\}$

$= (x - y + z)(x + y - z)$

14.7 सर्वसमिका $x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b)$ पर आधारित व्यंजकों का गुणनखण्डन

व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ पर विचार कीजिए। क्या आप पहले दिए किसी तरीके से इसके गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं? हम पाते हैं कि इसका गुणनखण्ड मानक सर्वसमिकाओं से नहीं ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि यह पूर्ण वर्ग नहीं है? यह पूर्ण वर्गों के अंतर के रूप में भी नहीं है। आइए दिए गए व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ के गुणनखण्ड का तरीका समझें।

सर्वसमिका $x^2 + (a + b)\,x + ab$ द्वारा व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ के गुणनखण्डन का तरीका

उदाहरण–1. $x^2 + 8x + 15$

हल : यदि हम $x^2 + 8x + 15$ की तुलना सर्वसमिका $x^2 + (a + b)\,x + ab$ से करें तो हम पाएँगे कि $ab = 15$ एवं $a + b = 8$ है।

इसका मतलब है कि अचर पद 15 के ऐसे दो गुणनखण्ड हों जिनका गुणनफल 15 हो और $a + b$ का योगफल x के गुणांक के बराबर यानी 8 हो।

आप a व b के अलग–अलग मान सोचिए जिनका योगफल 8 हो और जिन्हें गुणा करने पर आपको 15 मिलता हो। आइए $a = 4, b = 4$ इनका योगफल $4 + 4 = 8$ है। इनका गुणनफल $4 \times 4 = 16$ है जो कि ऊपर दी गई गुणनफल की शर्त को पूरा नहीं करता।

अब यदि $a = 1$ तो $b = 15$

$$\therefore a \times b = 15$$

किन्तु $a + b = 1 + 15 = 16$ अतः a व b के उपर्युक्त मान भी दोनों शर्तों को पूरा नहीं करते।

अब यदि $a = 3$ व $b = 5$ लें।

$\therefore\ a \times b = 15$ एवं $a + b = 3 + 5 = 8$

अतः $a = 3, b = 5$ सही विकल्प है

$\therefore$ गुणनखण्ड $(x + a) = (x + 3)$

एवं $(x + b) = (x + 5)$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 15 = x^2 + (3 + 5)\,x + 3 \times 5$$

$$\because \left[x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b)\right]$$

$$= (x + 3)\,(x + 5)$$

अतः व्यापक रूप से $x^2 + mx + n$ रूपवाले व्यंजकों का गुणनखण्डन करने के लिए हम निम्न चरण अपनाते हैं।

चरण–1.	व्यंजक के पदों को उनके घातों के घटते क्रम में रखेंगे।
चरण–2.	अचर पद n के ऐसे दो गुणनखण्ड a एवं b इस प्रकार लेंगे कि–
	$a \times \mathrm{b} = \mathrm{n}$ एवं $a + \mathrm{b} = \mathrm{m}$
चरण–3.	मध्य पद को वितरण नियम से तोड़ेंगे/ अर्थात्
	$\mathrm{m}x = (a + \mathrm{b})\, x = ax + \mathrm{b}x$
चरण–4	व्यंजक के पुनः समूहन कर गुणनखंडन करेंगे।
	जैसे $x^2 + \mathrm{m}x + \mathrm{n} = x^2 + (a + \mathrm{b})\, x + a\mathrm{b}$ $= x^2 + ax + \mathrm{b}x + a\mathrm{b}$ $= (x^2 + ax) + (\mathrm{b}x + a\mathrm{b})$ $= x\,(x + a) + \mathrm{b}\,(x + a)$ $= (x + a)\,(x + \mathrm{b})$

कुछ उदाहरणों से हम इसे समझने का प्रयास कीजिए।

निम्नलिखित का गुणनखण्डन कीजिए

(i) $x^2 + 21x + 80$ (ii) $y^2 - 15y + 56$

हल : (i)

$$\begin{aligned} x^2 + 21x + 80 &= x^2 + (16 + 5)\, x + 16 \times 5 \\ &= x^2 + 16x + 5x + 16 \times 5 \\ &= (x^2 + 16x) + (5x + 16 \times 5) \\ &= x\,(x + 16) + 5\,(x + 16) \\ &= (x + 16)\,(x + 5) \end{aligned}$$

हल : (ii)

$$\begin{aligned} y^2 - 15y + 56 &= y^2 + (-7 + (-8))\, y + (-7)\,(-8) \\ &= y^2 - 7y - 8y + (-7)\,(-8) \\ &= y\,(y - 7) - 8\,(y + (-7)) \\ &= y\,(y - 7) - 8\,(y - 7) \\ &= (y - 7)\,(y - 8) \end{aligned}$$

आपने देखा कि $x^2 + \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ की तरह के व्यंजक का गुणनखण्डन सर्वसमिका के प्रयोग से कैसे किया गया। $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ की तरह से व्यंजकों का गुणनखण्डन करना हम आगे की कक्षाओं में सीखेंगे।

प्रश्नावली – 14.2

1. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

   (a) $1 + 2x + x^2$ (b) $a^2b^2 - 6abc + 9c^2$

   (c) $1 - (a - b)^2$ (d) $16\,(a - b)^2 - 9\,(a + b)^2$

   (e) $(x + y)^2 - 10\,(x + y) + 25$ (f) $(a + b)^2 - 4ab$

   (g) $4x^2 - y^2 + 4y - 4$ (h) $9x^2 - \dfrac{n^2}{4}$

   (i) $a^2 + a + 4 + 3a$ (j) $x^2 + 6x + 8$

   (k) $y^2 - 13y + 30$ (l) $x^2 + 9x - 22$

2. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड कीजिए–

   (a) $x^2 - 6x - 135$ (b) $8\,(x + y)^3 - 50\,(x + y)$

   (c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 1$ (d) $75 - x^2 + 10x$

   (e) $12a^2 - 27$ (f) $ax^2 - bx^2 + by^2 - ay^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्डन कीजिए–

   (a) $16x^4 - 81y^4$ (b) $x^4 - 1$ (c) $x^4 - (x - y)^4$

   (d) $9x^2 - 4y^2 - 3x + 2y$ (e) $(x + y)^3 + 4\,(x + y)^2 + 4x + 4y$

14.8 बीजीय व्यंजकों का विभाजन (Division of Algebraic Expression)

अभी तक हमने बीजीय व्यंजकों की संक्रियाओं में जोड़ना, घटाना, गुणा करना एवं गुणनखंडन समझा। यहाँ हम बीजीय व्यंजकों को भाग करना समझेंगे।

आपने सीखा है कि भाग, गुणन की विपरीत क्रिया है।

यदि $2 \times 3 = 6$ तो $6 \div 2 = 3$

या $6 \div 3 = 2$

इसे ऐसे भी समझिए

$$\frac{6x^2}{2x} = \frac{\cancel{2}\times 3\times \cancel{x}\times x}{\cancel{2}\times \cancel{x}} = 3x$$

इस गुणधर्म का उपयोग हम बीजीय व्यंजकों के भागों में भी करते हैं, जैसे–

यदि $2x \times 3x = 6x^2$ तो $6x^2 \div 2x = 3x$

या $6x^2 \div 3x = 2x$

बीजीय व्यंजकों के भाग को समझने के लिए एकपदी का एकपदी से विभाजन पर विचार करते हैं।

14.8.1 एकपदी का एक अन्य एकपदी से भाग

$6x^2y$ को $2x$ से भाग कीजिए

हमें $6x^2y \div 2x$ ज्ञात करना है, अर्थात् $\dfrac{6x^2y}{2x}$ ज्ञात करना है।

हम $6x^2y$ एवं $2x$ का अखण्डनीय गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$6x^2y \quad = 2 \times 3 \times x \times x \times y$ एवं

$2x \quad = 2 \times x$

अतः $$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2\times3\times x\times x\times y}{2\times x} = \frac{(2\times x)(3\times x\times y)}{2\times x}$$

हम पाते हैं कि अंश एवं हर में सार्व गुणनखण्ड $(2 \times x)$ है जिसे उसी विधि से हटा देते हैं जैसे हम संख्याओं के विभाजन में करते हैं।

अतः $$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{(2\times x)(3\times x\times y)}{(2\times x)} = 3\times x\times y = 3xy$$

इसे हम निम्न तरीके से भी हल करते हैं–

$$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2\times3\times x\times x\times y}{2\times x} = 3\times x\times y = 3xy$$

(घातांक के नियम से $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$)

उदाहरण–2.

निम्नलिखित को हल कीजिए–

$-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2)$

हल : $-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2) = \dfrac{-12a^4b^5}{-3a^2b^2}$

$$= \frac{-2\times2\times3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b}{-3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times2\times3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b}{-1\times3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times2\times a\times a\times b\times b\times b}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{(-1)}$$

(अंश एवं हर में (–1) से गुणा करने से) $= \frac{-4a^2b^3}{(-1)} \times \frac{(-1)}{(-1)}$

$$= \frac{4a^2b^3}{1} = 4a^2b^3$$

स्वयं करके देखिए

भाग दीजिए–

(i) $18a^2b^2 \div 18$ (ii) $9x^2y \div x^2y$

(iii) $-8xy \div 2y$ (iv) $2ab \div 3$

14.8.2 एक बहुपद का एकपदी से भाग

एक त्रिपद $4x^3 - 6x^2 + 2x$ में एकपदी $2x$ से भाग करते हैं।

दिया गया है

$4x^3 - 6x^2 + 2x \div 2x$ $= \frac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{2x}$

सभी पदों का गुणनखण्डन करने पर $\frac{2\times2\times x\times x\times x - 2\times3\times x\times x + 2\times x}{2\times x}$

$$= \frac{(2\times x)\times(2\times x\times x) - (2\times x)(3\times x) + (2\times x)\times1}{2\times x}$$

$$= \frac{(2\times x)\{(2\times x\times x)-(3\times x)+1\}}{(2\times x)} = \frac{2x\left(2x^2-3x+1\right)}{2x}$$

अंश एवं हर से सार्व गुणनखण्ड हटाने पर

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = 2x^2-3x+1$$

(अभीष्ट भागफल)

आइए, एक अन्य विधि से इसे करें–

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = \frac{4x^3}{2x}-\frac{6x^2}{2x}+\frac{2x}{2x}$$

व्यंजक के प्रत्येक पद में भाजक से भाग देने पर

$$= 2x^2 - 3x + 1$$

(अभीष्ट भागफल)

इस प्रकार हमने पाया कि किसी बहुपद में भाग करने के लिए उसका गुणनखण्डन कर एक पदीय बनाते हैं, फिर भाज्य बहुपद एवं भाजक के सार्वगुणनखण्ड को उचित विधि से हटाकर भाग की क्रिया पूरी करते हैं। हमने यह भी पाया कि बहुपद में एक पदी से भाग करना उस बहुपद के प्रत्येक पद में उस एक पदी से भाग करने के बराबर होता है।

अब ज़रा सोचिए यदि उपर्युक्त उदाहरण में व्यंजक का एक पद 3 होता तो क्या हम $2x$ से उस बहुपद में पूरा–पूरा भाग कर पाते?

एक अन्य उदाहरण द्वारा इसे समझते हैं–

$(3x^3 - 5x^2 + 12x) \div 6x$

$$\frac{3x^3-5x^2+12x}{6x} = \frac{3x\times x^2-3x\times\frac{5x}{3}+3x\times 4}{3x\times 2}$$

$$= \frac{3x\left(x^2-\frac{5x}{3}+4\right)}{3x\times 2}$$

$$= \frac{x^2-\frac{5x}{3}+4}{2}$$

क्या $5x^2$ को $3x\times\frac{5x}{3}$ के रूप में रखने पर कोई अंतर पड़ा?

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \div 2 + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \times \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

दूसरी विधि से,

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 12x}{6x} = \frac{3x^3}{6x} - \frac{5x^2}{6x} + \frac{12x}{6x}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

स्वयं करके देखिए

भाग दीजिए–

(i) $24(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 9abc$

(ii) $(4x^2 - 12xy + 6y^2) \div 2xy$

(iii) $(x^2 - 2x - 1) \div 2$

14.8.3 बहुपद का बहुपद से भाग

हमने ऊपर देखा है कि भाग करते समय बहुपद को एकपदीय बनाकर एकपदी से भाग करते हैं या एकपदी से बहुपद के प्रत्येक पद में भाग करते हैं। बहुपद से बहुपद में भाग करते समय भी हम इस तथ्य का ध्यान रखते हैं। यहाँ ध्यान देनेवाली बात यह है कि एक से अधिक पदवाले व्यंजकों को भी एक पद के रूप में लिखा जा सकता है। गुणनखण्डन करने पर वे एकपदी व्यंजक बन जाते हैं। आइए इस तथ्य का प्रयोग कर बहुपद से बहुपद का भाग करें।

जैसे $x^2 + 2x$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल : दिया गया है,

$$(x^2 + 2x) \div (x + 2) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+2)}$$

अंश व हर में सार्व गुणनखण्ड $x+2$ है। हम जानते हैं कि किसी भी संख्या में उसी संख्या का भाग देने पर भागफल 1 होता है अतः $\frac{(x+2)}{(x+2)} = 1$

$$= x \times 1$$

$$= x$$

उदाहरण–3. $4x^2 - 12xy + 9y^2 \div (4x^2 - 9y^2)$

हल : दिया गया है,

$$\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2 - 9y^2} = \frac{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2}{(2x)^2 - (3y)^2}$$

$$= \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$ (सर्वसमिका $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ के प्रयोग से)

$$= \frac{(2x-3y)(2x-3y)}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$= \frac{2x-3y}{2x+3y}$$ (सार्वगुणनखण्ड को काटने से)

प्रश्नावली – 14.3

1. निम्नलिखित का भाग कीजिए–

(a) $-2x^2yz$ का $4xyz$ से

(b) $-\frac{1}{2}xy$ का $\frac{x}{2}$ से

(c) $(3x^2)^5$ का $(9x^2)^3$ से

(d) $(7x^5)^2 \times (3y^5)^5$ का $27y^3$ से

(e) $8x^6y^6$ का $-4x^4y^6$ से

2. **दिए गए बहुपद को एकपदी से भाग कीजिए–**

(a) $(5m^3 - 30m^2) \div 5m$ (b) $(12x^4 - 6x^2) \div (-3x^2)$

(c) $(5x^2 - 15x) \div (x - 3)$ (d) $(6x^4 + 9x^3 - 12x^2) \div 3x^2$

3. **भाग कीजिए–**

(a) $(a^2 + 8a + 16) \div (a + 4)$ (b) $\{(a + b)^2 - 4ab\} \div (a - b)^2$

(c) $(a^4 - b^4) \div (a^2 - ab)$ (d) $(x^4 - 81) \div (x^2 + 9)$

(e) $(121x^2 + 16y^2 - 88xy) \div (4y - 11x)$

(f) $(x^2 - x - 30) \div (x - 6)$ (g) $\{p^2 - p + \frac{1}{4}\} \div \{p - \frac{1}{2}\}$

(h) $(x^2 - 5xy + 6y^2) \div (x - 2y)$ (i) $(27x^3 + 3x^2 - 2x + 8) \div (3x - 2)$

14.9 बीजीय प्रश्नों के हल में की जानेवाली सामान्य त्रुटियाँ

बीजीय प्रश्नों जैसे– बहुपदों के जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग में कुछ त्रुटियाँ सामान्यतः हो जाती है, आइए इन्हें जानकर दूर करें।

त्रुटि–1 कक्षा में एक छात्र ने 2 में x जोड़कर योगफल $2x$ प्राप्त किया तथा दूसरे ने $2+x$ प्राप्त किया। किसका उत्तर सही है?

हमें पता है कि असमान पद को आपस में नहीं जोड़ा जाता।

समान पदों को छाँटिए 2x, y, 5z, 31x, 5y ....

$2x + 31x = ?$ $2 + x = ?$

इसलिए इनका योगफल $2x$ नहीं होगा। उसका सही हल होगा $2 + x$ या $x+2$

त्रुटि–2 रुबी को $2x + x + 7x$ का हल $9x$ प्राप्त हुआ। क्या यह सही है?

क्या आप रुबी के हल में की गई गलती बता सकते हैं? ....

सामान्य परिस्थिति में x का गुणांक 1 होने पर उसे नहीं लिखा जाता है यदि आप $2x + 1x + 7x$ को जोड़ें तो उसका सही हल क्या होगा?

त्रुटि–3 सोनम ने $x = -5$ के लिए बहुपद $7x$ का मान निम्न प्रक्रिया से प्राप्त किया।

$7x = 7 - 5 = 2$

क्या यह प्रक्रिया सही है?

$7x$ का अर्थ है $7 \times x$ यहाँ x के मान में 7 से गुणा किया जाना चाहिए किन्तु कोष्ठक का प्रयोग नहीं होने से यह घटाने का निर्देश देता है, यदि हम घटाव चिह्न के साथ कोष्ठक का प्रयोग करें सोनम का सही हल $7 \times (-5) = ?$

त्रुटि–4 यास्मीन एवं जूली ने बीजीय व्यंजकों का गुणा निम्नलिखित प्रकारों से किया।

	यास्मीन	**जूली**
(i)	$2\,(x-1) = 2x - 1$	$2(x-1) = 2x-2$

ऊपर $2\,(x-1)$ के हल में से किसका हल सही है? कारण सहित बताइए।

____

____

हाँ, आपने सही सोचा जूली का हल सही है।

	यास्मीन	**जूली**
(ii)	$(3x)^2 = 9x^2$	$(3x)^2 = 3x^2$

ऊपर दिए गए हलों में किसका तरीका सही है। और क्यों?

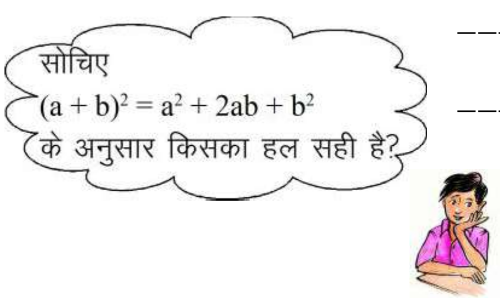
____

जूली ने कोष्ठक के सभी चर एवं अचर का वर्ग नहीं किया है अतः हल गलत है।

	यास्मीन	**जूली**
(iii)	$(3x - 2)\ (x + 1) = 3x^2 - 2$	$(3x - 2)\ (x + 1) = 3x^2 + x - 2$

यास्मीन ने पहले व्यंजक के प्रत्येक पद से दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद में गुणा नहीं किया है अतः यास्मीन का हल गलत है।

(iv)	$(2x + 3)^2 = (4x + 9)$	$(2x + 3)^2 = (4x^2 + 12x + 9)$



____

____

त्रुटि–5 संतोष एवं अमरकांत ने व्यंजकों का भाग निम्नलिखित प्रकार से किया।

संतोष

$$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$$

अमरकांत

$$\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+5$$

आप जानते हैं भाग में $\frac{8}{2}=4$ जब हम $\frac{8}{2}=4\,;\,8=8$ वज्र गुणन करते हैं, तब हमें बराबर के दोनों ओर समान मान प्राप्त होता है।

अतः

$\frac{2x+5}{5} = \ 2x+1$ में $2x + 5 = 5\ (2x + 1)$ को हल कीजिए।

इसी प्रकार

$\frac{2x+5}{5} = \ \frac{2x}{5}+1$ में

$2x + 5 = 5\left(\frac{2x}{5}+5\right)$ को हल कीजिए।

त्रुटि–6 रिंकू ने x में x से गुणा करके $2x$ प्राप्त किया, क्या उसका गुणनफल सही है?

व्याख्या– रिंकू का गुणनफल गलत है यहाँ घातांक का नियम कार्य करेगा और समान चरों के बीच गुणा होने पर उनके घातांक बदलेंगे। अतः

$x \times x = x^1 \times x^1 = x^{1+1} = x^2$

त्रुटि–7 पदों के गुणन में समान्यतः गुणनफल के चिह्नों से ध्यान हट जाता है जिससे कई अशुद्धियाँ हो जाती हैं?

व्याख्या– पदों के गुणन में चिह्न निर्धारण हेतु निम्न नियम का उपयोग कीजिए।

(i) (+ पद) × (+ पद) = + पद

(ii) (+ पद) × (– पद) = – पद

(iii) (– पद) × (+ पद) = – पद

(iv) (– पद) × (– पद) = + पद