त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
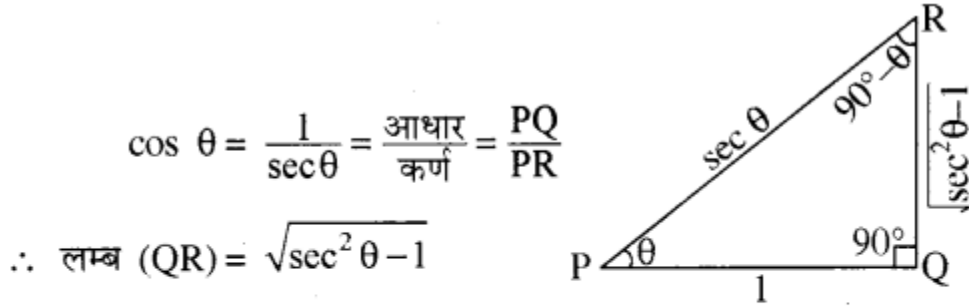
Ex 7.1

प्रश्न 1. ∠θ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec θ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\therefore \text{ लम्ब } (QR) = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

$$\text{तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

$$\text{अतः} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}, \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},$$

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}, \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

$$\text{तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2. त्रिकोणमितीय अनुपातों sin θ, sec θ, tan θ को cot θ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि $\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta} = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{BC}{AB}$
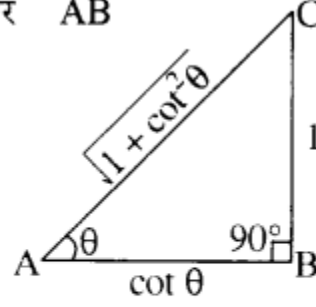
$\therefore$ कर्ण $(AC) = \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$

$\therefore \quad \sin \theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$

तथा $\quad \sec \theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$

अत: $\quad \sin \theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$, $\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta}$

तथा $\quad \sec \theta = \dfrac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$ उत्तर

निम्नलिखित को सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध कीजिए

प्रश्न 3. $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \cot^2\theta = \cot^2\theta$

हल: L.H.S. $= \cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \cot^2\theta$
$= \cos^2\theta6(1 + \cot^2\theta)$
$= \cos^2\theta \cdot \csc^2\theta$ [$\because 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$]
$= \cos^2 \theta \cdot \dfrac{1}{\sin^2 \theta}$ $\left[\because \csc \theta = \dfrac{1}{\sin \theta} \right]$
$= \dfrac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$ = R.H.S
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4. $\sec \theta(1 - \sin \theta) (\sec \theta + \tan \theta) = 1$

हल: L.H.S = sec θ(1 − sin θ) (sec θ + tan θ)

$$= \frac{1}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\left[\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)}{\cos\theta}\left[\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \qquad [\because\ 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 = \text{R.H.S.}$$

∴　　L.H.S. = R.H.S.　(इतिसिद्धम्).

प्रश्न 5. $\cosec^2\theta + \sec^2\theta = \cosec^2\theta\ \sec\theta$

हल: L.H.S. = $\cosec^2\theta + \sec^2\theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta} \qquad [\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \cosec^2\theta\ .\ \sec^2\theta = \text{R.H.S.}$$

∴　　L.H.S. = R.H.S.　(इतिसिद्धम्)

प्रश्न 6. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

अंश तथा हर को $\sqrt{1-\sin\theta}$ से गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \sec\theta - \tan\theta = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 7. $\sqrt{\sec^2\theta + \csc^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}}$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

अंश व हर का वर्गमूल लेने पर

$$= \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 8. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta} = \tan\alpha\,\tan\beta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\dfrac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{(\cos\alpha.\sin\beta+\sin\alpha.\cos\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}}$$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \times \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{(\cos\alpha.\sin\beta+\sin\alpha.\cos\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$= \tan\alpha\,.\,\tan\beta = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 9. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2 + (1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\times(\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + 1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

$$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 + 2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$$= \frac{2 + 2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta} \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= \frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$$

$$= \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta = \text{R.H.S.} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \;\; \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 10. $\dfrac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = 1$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}$$

$$[\because a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)]$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 11. $\cot \theta - \tan \theta = \dfrac{1 - 2\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cot \theta - \tan \theta$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta . \cos \theta}$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta}{\sin \theta . \cos \theta} \quad [\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 12. $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = 1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ (माध्य शिक्षा बोर्ड मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$$

$2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ जोड़ने व घटाने पर

$$= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta) - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= (1)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 13. (sec θ – cos θ) (cot θ + tan θ) = tan θ sec θ

हल:

$$\text{L.H.S.} = (\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right) \times \left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$[\because\ 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta\ \text{तथा}\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta \,.\, \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore\quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}\qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 14. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha - 1} = \tan^2\alpha$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{1}} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} \times \frac{\sin^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore\quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}\qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 15. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$(1 + \cos\theta)$ का अंश व हर में गुणा करने पर

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} \qquad [\because \ 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore \quad$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 16. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

हल: L.H.S $= \sin^6\theta + \cos^6\theta$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)[(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$=(1)\ [\sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= [(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= [(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta]$

$= (1)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = \text{R.H.S}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 17. $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$ (माध्य शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta \times \sin\theta}{\cos\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta \times \cos\theta}{\sin\theta \times (\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta \times \sin^2\theta - \cos\theta \times \cos^2\theta}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta) \times (\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)]$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta \times \sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1$$

$$= \tan\theta + \cot\theta + 1$$

= 1 + tan θ + cot θ = R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 18. $\sin\theta\,(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$

हल: L.H.S. = sin θ(1 + tan θ) + cos θ(1 + cot θ)

$$= \sin\theta\left[\frac{1}{1} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right] + \cos\theta\left[\frac{1}{1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \sin\theta\left[\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}\right] + \cos\theta\left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}\right]$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \sec\theta + \text{cosec }\theta$$

$$= \text{cosec }\theta + \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

∴   L.H.S. = R.H.S.   (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 19. $\sin^2\theta \cos\theta + \tan\theta \sin\theta + \cos^3\theta = \sec\theta$

हल: L.H.S. = $\sin^2\theta \cos\theta + \tan\theta \sin\theta + \cos^{23}\theta$

$= \sin^2\theta \cos\theta + \cos^3\theta + \tan\theta. \sin\theta$

$= \cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}. \sin\theta$

$$\left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$= \cos\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ $\qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 20. $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\ \text{cosec}\ \theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta \times \sin\theta}{\cos\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta \times \cos\theta}{\sin\theta \times (\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta \times \sin^2\theta - \cos\theta \times \cos^2\theta}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta) \times (\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta \times \sin\theta \times (\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$[\because\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)]$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta \times \sin\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} \qquad \because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} + 1$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= 1 + \sec\theta \, \text{cosec} \, \theta = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 21. (sin A + cosec A)² + (cos A + sec A)² = 7 + tan²A + cot²A

हल: L.H.S. = (sin A + cosec A)² + (cos A + sec A)²
= {sin² A + cosec² A + 2 sin A × cosec A}

$$= \left[\sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A}\right] +$$

$$\left[\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \times \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \text{cosec}\, A = \dfrac{1}{\sin A} \\ \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \end{array}\right]$$

= {sin² A + cosec² A + 2}
                              + {cos² A + sec² A + 2}
= 2 + 2 + (sin² A + cos² A) + sec² A + cosec² A
= 2 + 2 + 1 + 1 + tan² A + 1 + cot² A

$$\left[\begin{array}{l} \because \sec^2 A = \tan^2 A + 1, \\ \text{cosec}^2 A = \cot^2 A + 1 \end{array}\right]$$

= 7 + tan² A + cot² A = R.H.S.

∴   L.H.S. = R.H.S. **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 22. sin⁸θ – cos⁸θ = (sin²θ – cos²θ) (1 – 2sin²θ cos²θ)

हल: L.H.S. = sin⁸θ – cos⁸θ
= (sin⁴θ)² – (cos⁴θ)²
= (sin⁴θ – cos⁴θ) (sin⁴θ + cos⁴θ)
= [(sin²θ)² – (cos²θ)]² (sin⁴θ + cos⁴θ)
= (sin²θ – cos²θ) (sin²θ + cos²θ) (sin⁴θ + cos⁴θ)

= (sin²θ − cos²θ) (sin⁴θ + cos⁴θ] [:: sin²θ+ cos²θ = 1]

= (sin²θ − cos²θ) [(sin²θ)² + (cos²θ)² + 2sin²θcos²θ− 2sin²θ cos²θ]

(2 sin²θ cos²θ उपर्युक्त मे जोड़ने व घटाने पर)

= (sin²θ − cos²θ) [(sin²θ + cos²θ)² − 2 sin²θ cos²θ]

= (sin²θ − cos²θ) (1 − 2 sin²θ cos²θ)

= R.H.S.

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 23. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$ = cot θ + cosec θ (माध्य शिक्षा बोर्ड मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$$

$\sqrt{(\sec\theta+1)}$ का अंश व हर में गुणा करने पर

$$= \sqrt{\dfrac{(\sec\theta+1)(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{(\sec\theta+1)^2}{\sec^2\theta-1}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{(\sec\theta+1)^2}{\tan^2\theta}} \qquad [\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$$

वर्गमूल लेने पर

$$= \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta}$$

$$= \dfrac{1}{\cos\theta} \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta}$$

$$= \dfrac{\cdot 1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$$

$$= \cot\theta + \text{cosec}\,\theta = \text{R.H.S.}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 24.

$$\dfrac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\csc^3\theta} = \sin^2\theta\cos^2\theta$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{(1 + \cot\theta + \tan\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\sec^3\theta - \text{cosec}^3\theta}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{1}{1} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right](\sin\theta - \cos\theta)}{\dfrac{1}{\cos^3\theta} - \dfrac{1}{\sin^3\theta}}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right](\sin\theta - \cos\theta)}{\dfrac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{1 + \sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right](\sin\theta - \cos\theta)}{\dfrac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\sin^3\theta.\cos^3\theta}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\ \text{तथा} \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab) \end{array}\right]$$

$$= \frac{(1 + \sin\theta\cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \times$$

$$\frac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta.\cos\theta)}$$

$$= \frac{(1 + \sin\theta\cos\theta).\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1 + \sin\theta\cos\theta)}$$

$$[\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \sin^2\theta\ \cos^2\theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\therefore\quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 25.

$$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{2}{1 - 2\cos^2\theta} = \frac{2}{2\sin^2\theta - 1}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2}{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \\ \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\end{array}}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{2 \times 1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$[\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \qquad \qquad \dots(i)$$

(i) में $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ रखने पर क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{2}{1 - 2\cos^2\theta} = \text{मध्य पद}$$

तथा पुन: (i) में $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ रखने पर क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S.} = \frac{2}{\sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta} = \frac{2}{2\sin^2\theta - 1} = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 26.

$$\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A \text{ (माध्य शिक्षा बोर्ड, 2018)}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A}$$

$$= \frac{\cos A}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1 - \dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{1} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin A}{1} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} - \frac{\cos^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{(\sin A - \cos A)} = \frac{(\sin A - \cos A)(\sin A + \cos A)}{(\sin A - \cos A)}$$

$$= \sin A + \cos A = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 27. $(\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

हल:

$$\text{L.H.S.} = (\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \sin A \cdot \cos A \qquad \qquad .....(i)$$

तथा $\text{R.H.S.} = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{1} \times \frac{\sin A . \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$[\because \ \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{\sin A . \cos A}{1}$$

$$= \sin A \cdot \cos A \qquad \qquad .....(ii)$$

$\because$ (i) व (ii) बराबर हैं अत: L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 28. $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ = 1 + sin θ cos θ

हल:

L.H.S. $= \dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{1} \times \dfrac{\cos\theta}{(\cos\theta-\sin\theta)} + \dfrac{\sin^3\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)}$

$= \dfrac{\cos^3\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta} - \dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)}$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta$

$= 1 + \sin\theta\cos\theta \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$=$ R.H.S.

∴ L.H.S. = R.H.S.   (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 29. यदि sec θ + tan θ = P हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{P^2-1}{P^2+1} = \sin\theta$

हल:

$$\because \quad P = \sec\theta + \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad P^2 = (\sec\theta + \tan\theta)^2$$

$$= \sec^2\theta + \tan^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad P^2 - 1 = (\sec^2\theta - 1) + \tan^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta$$

(दोनों पक्षों में से 1 घटाने पर)

$$\Rightarrow \quad P^2 - 1 = \tan^2\theta + \tan^2\theta + 2\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$[\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$$

$$= 2\tan^2\theta + 2\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$P^2 - 1 = 2\tan\theta(\tan\theta + \sec\theta) \qquad .....(i)$$

पुनः $$P^2 - 1 = 2(\sec^2\theta - 1) + 2\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$P^2 - 1 = 2\sec^2\theta - 2 + 2\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$P^2 - 1 + 2 = 2\sec^2\theta + 2\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$P^2 + 1 = 2\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) \qquad .....(ii)$$

(i) में (ii) का भाग देने पर

$$\frac{P^2 - 1}{P^2 + 1} = \frac{2\tan\theta(\tan\theta + \sec\theta)}{2\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1} = \sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{P^2 - 1}{P^2 + 1} = \sin\theta \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 30. यदि $\frac{\cos A}{\cos B} = m$ तथा $\frac{\cos A}{\sin B} = n$ हो, तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2)\cos^2 B = n^2$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\because \quad \frac{\cos A}{\cos B} = m \qquad\qquad \therefore \quad m^2 = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B}$$

तथा $\dfrac{\cos A}{\sin B} = n$ $\quad$ $\therefore$ $\quad n^2 = \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 B}$

$\therefore$ L.H.S. $= (m^2 + n^2)\cos^2 B$

m^2 व n^2 का मान रखने पर

$$= \left[\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 B} + \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 B}\right]\cos^2 B$$

$$= \left[\dfrac{\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B}{\sin^2 B \cdot \cos^2 B}\right]\cos^2 B$$

$$= \dfrac{(\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B)}{\sin^2 B}$$

$$= \dfrac{\cos^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)}{\sin^2 B}$$

$$= \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 B} \times 1 \qquad [\because \sin^2 B + \cos^2 B = 1]$$

$$= \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 B} = n^2$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$\therefore \qquad$ L.H.S. = R.H.S. $\qquad$ (इतिसिद्धम्)

Ex 7.2

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो-

प्रश्न 1.

(i) $\dfrac{\cos 37°}{\sin 53°}$ $\qquad$ (ii) $\dfrac{\operatorname{cosec} 32°}{\sec 58°}$

(iii) $\dfrac{\tan 10°}{\cot 80°}$ $\qquad$ (iv) $\dfrac{\cos 19°}{\sin 71°}$

हल:

(i) $\dfrac{\cos 37°}{\sin 53°} = \dfrac{\cos(90° - 53°)}{\sin 53°}$ $\quad [\because \cos(90° - \theta) = \sin \theta]$

$\qquad = \dfrac{\sin 53°}{\sin 53°} = 1$ उत्तर

(ii) $\dfrac{\operatorname{cosec} 32°}{\sec 58°} = \dfrac{\operatorname{cosec}(90° - 58°)}{\sec 58°}$

$\qquad\qquad\qquad [\because \operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec \theta]$

$\qquad = \dfrac{\sec 58°}{\sec 58°} = 1$ उत्तर

(iii) $\quad \dfrac{\tan 10°}{\cot 80°} = \dfrac{\tan(90° - 80°)}{\cot 80°}$ $\quad [\because \tan(90° - \theta) = \cot \theta]$

$\qquad\qquad = \dfrac{\cot 80°}{\cot 80°} = 1$ उत्तर

(iv) $\quad \dfrac{\cos 19°}{\sin 71°} = \dfrac{\cos(90° - 71°)}{\sin 71°}$ $\quad [\because \cos(90° - \theta) = \sin \theta]$

$\qquad\qquad = \dfrac{\sin 71°}{\sin 71°} = 1$ उत्तर

प्रश्न 2. (i) cosec 25° – sec 65°

(ii) cot 34° – tan 56°

(iii) $\dfrac{\sin 36°}{\cos 54°} - \dfrac{\sin 54°}{\cos 36°}$

(iv) sin θ cos(90° – θ) + cos θ sin(90° – θ)

हल: (i) cosec 25° – sec 65°

= cosec(90° – 65°) – sec 65° [∵ cosec(90° – θ) = sec θ]

= sec 65° – sec 65°

= 0 उत्तर

(ii) cot 34° – tan 56° .

= cot (90° – 56°) – tan 56° [∵ cot(90° – θ) = tan θ]

= tan 56° – tan 56°

= 0 उत्तर

(iii) $\dfrac{\sin 36°}{\cos 54°} - \dfrac{\sin 54°}{\cos 36°}$

$\qquad = \dfrac{\sin(90° - 54°)}{\cos 54°} - \dfrac{\sin(90° - 36°)}{\cos 36°}$

$\qquad\qquad\qquad [\because \sin(90° - \theta) = \cos \theta]$

$\qquad = \dfrac{\cos 54°}{\cos 54°} - \dfrac{\cos 36°}{\cos 36°}$

$\qquad = 1 - 1 = 0$ उत्तर

(iv) sin θ cos(90° – θ) + cos θ sin(90° – θ) [∵ cos(90° – θ) = sin θ sin(90° – θ) = cos θ]

= sin θ . sin θ + cos θ . cos θ

= $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ [∵ $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta = 1$]

= 1 उत्तर

प्रश्न 3.

(i) sin 70° sec 20° – cos 20° cosec 70°

(ii) $\dfrac{2\cos 67°}{\sin 23°} - \dfrac{\tan 40°}{\cot 50°} - \cos 60°$

हल: (i) sin 70° sec 20° – cos 20° cosec 70°

= sin 70° . sec (90° – 70°) – cos 20° . cosec(90° – 20°) [∵ sec(90° – θ) = cosec θ और cosec(90° – θ0) = sec θ]

= sin 70° cosec 70° – cos 20° sec 20°

= 1 – 1 उत्तर

(ii) $\dfrac{2\cos 67°}{\sin 23°} - \dfrac{\tan 40°}{\cot 50°} - \cos 60°$

$$= \dfrac{2\cos(90° - 23°)}{\sin 23°} - \dfrac{\tan(90° - 50°)}{\cot 50°} - \cos 60°$$

∵ cos(90° – θ) = sin θ
tan(90° – θ) = cot θ

$$= \dfrac{2\sin 23°}{\sin 23°} - \dfrac{\cot 50°}{\cot 50°} - \cos 60°$$

$$= 2 \times 1 - 1 - \dfrac{1}{2}$$

$$= 2 - 1 - \dfrac{1}{2}$$

$$= 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 4.

(i) $\left(\dfrac{\sin 35°}{\cos 55°}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 55°}{\sin 35°}\right)^2 - 2\cos 60°$

(ii) $\left(\dfrac{\sin 27°}{\cos 63°}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 63°}{\sin 27°}\right)^2$

हल:

(i) $\left(\dfrac{\sin 35°}{\cos 55°}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 55°}{\sin 35°}\right)^2 - 2\cos 60°$

$$= \left[\dfrac{\sin(90° - 55°)}{\cos 55°}\right]^2 + \left[\dfrac{\cos(90° - 35°)}{\sin 35°}\right]^2 - 2\cos 60°$$

[∵ sin(90° – θ) = cos θ
cos(90° – θ) = sin θ]

$$= \left(\dfrac{\cos 55°}{\cos 55°}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 35°}{\sin 35°}\right)^2 - 2 \times \dfrac{1}{2}$$

$$= (1)^2 + (1)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$
$$= 1 + 1 - 1 = 1 \quad \text{उत्तर}$$

(ii) $\left(\dfrac{\sin 27°}{\cos 63°}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 63°}{\sin 27°}\right)^2$

$$= \left[\dfrac{\sin(90° - 63°)}{\cos 63°}\right]^2 + \left[\dfrac{\cos(90° - 27°)}{\sin 27°}\right]^2$$

$$[\because \ \sin(90° - \theta) = \cos \theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin \theta]$$

$$= \left(\dfrac{\cos 63°}{\cos 63°}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 27°}{\sin 27°}\right)^2$$
$$= (1)^2 + (1)^2$$
$$= 1 + 1 = 2 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 5. (i) cot 12° cot 38° cot 52° cot 60° cot 78°
(ii) tan 5° tan 25° tan 30° tan 65° tan 85°

हल: (i) cot 12° cot 38° cot 52° cot 60° cot 78°
= cot 12° cot 78° cot 38° cot 52° cot 60°
= cot (90° – 78°). cot 78° . cot (90° – 52°) . cot 52° . cot 60° $\because$ cot(90° – θ) = tan θ
= tan 78°. cot 78° . tan 52°. cot 52°. $\frac{1}{\sqrt 3}$
= tan 78° . tan 78° . tan 52° . $\frac{1}{\tan 52°}$. $\frac{1}{\sqrt 3}$
$1 . 1 . \frac{1}{\sqrt 3} = \frac{1}{\sqrt 3}$ उत्तर

(ii) tan 5° tan 25° tan 30° tan 65° tan 85°
= tan 5° . tan 25° . tan 65°. tan 85° . tan 30°
= tan 5° tan 85° . tan 25° tan 65o° . tan 30°
= tan(90° – 85°) tan 85° , tan (90° – 65°) tan 65°. $\frac{1}{\sqrt 3}$
$\because$ tan(90° – θ) = cot θ
= cot 85° tan 85°. cot 65o tan 65° . $\frac{1}{\sqrt 3}$

$1 . 1 . \frac{1}{\sqrt 3} = \frac{1}{\sqrt 3}$ उत्तर

प्रश्न 6. निम्न को 0° से 45° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए

(i) sin 81° + sin 71°

(ii) tan 68° + sec 68°

हल: (i) sin 81° + sin 71°

∵ 81°= 90° − 9°

∴ sin 81°= sin (90° − 9°).

∵ sin(90° − θ) = Cos θ

तथा = cos 9° .....(i)

71°= 90° − 19°

sin 71°= sin (90° − 19°)

∵ sin(90° − θ) = cos θ sin 71°

= cos 19° .....(ii)

(i) व (ii) से मान दिए गए व्यंजक में रखने पर

= sin 81° + sin 71°

= cos 9° + cos 19° उत्तर

(ii) tan 68° + sec 68°

68°= 90° − 22°

tan 68° = tan(90° − 22°)

∵ tan(90° − θ) = cot θ

∴ tan 68°= cot 22° .....(i)

पुन: 68°= 90° − 22°

sec 68° = sec (90° − 22°)

sec(90° − θ) = cotθ

या sec 68° = cosec 22° .....(ii)

(i) व (ii) से मान दिए गए व्यंजक में रखने पर

tan 68° + sec 68° = cot 22° + cosec 22° उत्तर

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 7. sin 65° + c0s 25° = 2 cos 25°

हल: L.H.S. = sin 65° + cos 25°

∵ 65°= 90° − 25°

∴ sin 65°= sin (90° − 25°) [∵ sin(90° − θ) = cos θ]

या

sin 65° = cos 25°

मान व्यंजक में रखने पर

= sin 65° + cos 25°

= cos 25° + cos 25°

= 2 cos 25° = R.H.S.

∴ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 8. sin 35° sin 55° − cos 35° cos 55° = 0

हल: L.H.S. = sin 35° sin 55° − cos 35° cos 55°

= sin 35° sin (90°-35°) − cos 35° . cos (90°-35°)

[∵ sin(90° − θ) = cos θ

cos(90° − θ) = sin θ]

= sin 35°. cos 35° − cos 35°. sin 35°

= sin 35° (cos 35° − cos 35°)

= sin 35°. 0 = 0 = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

∴ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 9. $\dfrac{\cos 70°}{\sin 20°} + \dfrac{\cos 59°}{\sin 31°} - 8\sin^2 30° = 0$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 70°}{\sin 20°} + \frac{\cos 59°}{\sin 31°} - 8\sin^2 30°$$

$$= \frac{\cos(90° - 20°)}{\sin 20°} + \frac{\cos(90° - 31°)}{\sin 31°} - 8\sin^2 30°$$

$$\cos(90° - θ) = \sin θ$$

$$= \frac{\sin 20°}{\sin 20°} + \frac{\sin 31°}{\sin 31°} - 8\sin^2 30°$$

$$= 1 + 1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2 - 8 . \frac{1}{4} = 2 - 2 = 0 = \text{R.H.S.}$$

∴   L.H.S. = R.H.S.   (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. sin (90° − θ) cos (90° − θ) = $\dfrac{\tan θ}{1+\tan^2 θ}$

हल: L.H.S. = $\sin(90° - \theta) \cos(90° - \theta)$

$= \cos\theta \cdot \sin\theta = \sin\theta\cos\theta$ .....(1)

$$\text{R.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{1}$$

$$= \sin\theta \cdot \cos\theta \qquad\qquad .....(ii)$$

(i) व (ii) से L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 11. $\dfrac{\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\tan\theta} + \cos^2(90° - \theta) = 1$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\tan\theta} + \cos^2(90° - \theta)$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \sin^2\theta \quad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{1} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 12. $\dfrac{\tan(90°-\theta)\cot\theta}{\cosec^2\theta} - \cos^2\theta = 0$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan(90° - \theta)\cot\theta}{\cosec^2\theta} - \cos^2\theta$$

$$\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta$$

$$= \frac{\cot\theta.\cot\theta}{\cosec^2\theta} - \cos^2\theta$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} - \cos^2\theta$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{1} - \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - \cos^2\theta = 0 = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad\qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 13. $\dfrac{\cos(90°-\theta)\sin(90°-\theta)}{\tan(90°-\theta)} = \sin^2\theta$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos(90° - \theta).\sin(90° - \theta)}{\tan(90° - \theta)}$$

$$[\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sin^2\theta = \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad\qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

$$\frac{\sin\theta\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\sec(90°-\theta)} + \frac{\cos\theta\sin(90°-\theta)\sin\theta}{\text{cosec}(90-\theta)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

प्रश्न 14.

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta.\cos(90°-\theta).\cos\theta}{\sec(90°-\theta)} + \frac{\cos\theta\sin(90°-\theta)\sin\theta}{\text{cosec}(90-\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta.\sin\theta.\cos\theta}{\text{cosec}\theta} + \frac{\cos\theta.\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta}$$

$$\begin{bmatrix} \because \cos(90°-\theta) = \sin\theta \\ \sin(90°-\theta) = \cos\theta \\ \sec(90°-\theta) = \text{cosec}\theta \\ \text{तथा } \text{cosec}(90°-\theta) = \sec\theta \end{bmatrix}$$

$$= \sin^2\theta . \cos\theta . \sin\theta + \cos^2\theta . \sin\theta . \cos\theta$$

$$= \sin\theta . \cos\theta (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \sin\theta . \cos\theta(1)$$

$$= \sin\theta. \cos\theta = \text{R.H.S.}$$

∴   L.H.S. = R.H.S.   (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. यदि sin 3θ = cos (θ – 6°) यहाँ 3θ और (θ – 6°) न्यूनकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दिया हुआ है की sin 3θ = cos (θ – 6°) ...(i)
∵ sin 3θ = cos(90° – 3θ)
∴ समीकरण (i) को इस रूप में लिख सकते हैं-
cos(90° – 3θ) = cos(θ – 6°)
क्योंकि 90° – 3θ और θ – 6° दोनों ही न्यूनकोण हैं, इसलिए
90° – 3θ = θ – 6°
या -3θ – θ = – 6° – 90°
या -4θ = – 96°
जिससे $\theta = \frac{-96°}{-4} = 24°$
अतः θ का मान 24° होगा। उत्तर

प्रश्न 16. यदि sec 5θ = cosec (θ – 36°) यहाँ 58 एक न्यूनकोण है। तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार दिया गया है कि sec 5θ = cosec (θ – 36°) .....(i)

∵ sec 5θ = cosec (90° – 5θ)

∴ समीकरण (i) को इस रूप में भी लिखा जा सकता है

cosec(90° – 5θ) = cosec(θ – 36°)

क्योंकि 90° – 5θ और θ – 36° दोनों ही न्यूनकोण हैं,

∴ 90° – 5θ = θ – 36°

या – 5θ – θ = – 36° – 90°

या – 6θ = – 126°

∴ $\theta = \frac{-126}{-6} = 21°$

अतः 8 का मान 21° होगा। उत्तर

प्रश्न 17. यदि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्त:कोण हों तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

हल: A, B और C त्रिभुज के अन्त:कोण हैं।

∴ A + B + C = 180° [त्रिभुज के तीनों कोणों का जोड़ 180° होता है]

$$\text{या} \qquad B + C = 180° - A$$

$$\text{या} \qquad \frac{B+C}{2} = \frac{180° - A}{2}$$

$$\text{या} \qquad \frac{B+C}{2} = \left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

दोनों ओर tan लेने पर,

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cot\frac{A}{2}$$

[∵ tan (90° – θ) = cot] इतिसिद्धम्।

प्रश्न 18. यदि cos 2θ = sin 4θ हो और 2θ व 4θ न्यूनकोण हो तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार दिया गया है कि cos 2θ = sin 4θ .....(i)

∵ cos 2θ8 = sin(90° – 2θ)

∴ समीकरण (i) को इस रूप में भी लिखा जा सकता है-

sin(90° – 2θ) = sin 4θ

क्योंकि 90° – 2θ और 4θ दोनों ही न्यूनकोण हैं।

∴ 90° – 2θ = 4θ

या – 2θ – 4θ = – 90°

या – 6θ = – 90°

$$\therefore \theta = \frac{-90°}{-6} = 15°$$

अतः θ का मान 15° होगा। उत्तर

Additional Questions
अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. $\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ बराबर है

(A) cos θ   (B) sin θ   (C) sec θ   (D) cot θ

प्रश्न 2. $\dfrac{\sqrt{cosec^2\theta-1}}{cosec\theta}$ बराबर है

(A) cos θ   (B) sec θ   (C) sin θ   (D) cosec θ

प्रश्न 3. sin θ cosec θ + cos θ sec θ बराबर है

(A) 2   (B) 1   (C) $\frac{1}{2}$ (D) – 1

प्रश्न 4. दिया गया है कि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ **और** $\cos\beta = \frac{1}{2}$ **तब (α +β) का मान है—**

(A) 0°   (B) 30°   (C) 60°   (D) 90°

प्रश्न 5. $\dfrac{3sec51°}{cosec39°}$ **का मान है-**

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 0

प्रश्न 6. यदि $\cos(90° - \theta) = \frac{1}{2}$ **हो तो 6 का मान होगा**

(A) 90°   (B) 60°   (C) 45°   (D) 30°

प्रश्न 7. $\sin^2 50° + \cos^2 50° + 1$ का मान बराबर है

(A) 2   (B) 1   (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

प्रश्न 8. $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ बराबर होगा

(A) $\frac{1}{\sin\theta}$ (B) $\frac{1}{\cos\theta}$ (C) $\frac{1}{1-\sin\theta}$ (D) $\frac{1}{1+\sin\theta}$

प्रश्न 9. $\text{cosec}^2\theta - 1$ बराबर है

(A) $\tan^2\theta$ (B) $\cot^2\theta$ (C) $-\tan^2\theta$ (D) $-\cot^2\theta$

प्रश्न 10. $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ का मान है-

(A) 2   (B) 1   (C) 3   (D) 2

उत्तर-तालिका 1. (B) 2. (A) 3. (A) 4. (D) 5. (C) 6. (D) 7. (A) 8. (B) 9. (B) 10. (B)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1. यदि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ हो, जहाँ 3A एक न्यून कोण है। तो A का मान ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया है-
$\sin 3A = \cos (A - 26°)$
∵ $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$
∴ $\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$
क्योंकि 90° – 3A और A- 26° दोनों ही न्यूनतम कोण हैं,
∴ $90° - 3A = A - 26°$
या $4A = 90° + 26° = 116°$
$A = \frac{116°}{4} = 29°$ उत्तर

प्रश्न 2. cot 85° + cos 75° को (0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिये ।

हल: cot 85° + cos 75° = cot (90° – 5°) + cos (90° – 15°)

∵ cot(90° – θ) = tan θ

cos(90° – θ) = sinθ

= tan 5° + sin 15° उत्तर

प्रश्न 3. sin 25° . cos 65° + cos 25° . sin 65° + sin² 25° + sin 65° का मान ज्ञात कीजिये ।

हल: sin 25° . cos 65° + cos 25° . sin 65° + sin 25° + sin² 65°

= sin(90° – 65°) . cos 65° + cos(90° – 65°) . sin 65° + sin (90° – 65°) + sin 65°

= cos 65° . cos 65° + sin 65° . sin 65° + cos² 65° + sin² 65°

= cos² 65° + sin² 65° + cos² 65° + sin² 65°

∵ sin² θ + cos² θ

= 1 = 1 + 1 = 2 उत्तर

प्रश्न 4. यदि sin θ = cos θ तो θ का मान ज्ञात कीजिये।

हल: ∵ sin θ = cos θ

⇒ sin θ = sin (90° – θ)

⇒ θ = 90° – θ

⇒ 2 θ = 90°

⇒ $\theta = \frac{90°}{2} = 45°$ उत्तर

प्रश्न 5. 4 sin 18 sec 72° का मान लिखिए।

हल: 4 sin 18 sec 72° = 4 sin 18 sec (90° – 18°)

= 4 sin 18° . cosec 18°

= $4 \sin 18° \times \frac{1}{\sin 18°} = 4$ उत्तर

प्रश्न 6. cos² 50° + cos² 40° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: cos² 50° + cos² (90° – 50°)

= cos² 50° + sin² 50°

= 1 उत्तर

प्रश्न 7. $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 40°}}{\cos 40°}$ **का सरलतम मान लिखिए।**

हल: $\dfrac{\sqrt{\cos^2 40°}}{\cos 40°} = \dfrac{\cos 40°}{\cos 40°} = 1$ उत्तर

प्रश्न 8. sin θ . cosec θ – cos θ sec θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin θ . cosec θ – cos θ . sec θ
$= \sin\theta \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} - \cos\theta \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} = 1 - 1 = 0$ उत्तर

प्रश्न 9. (1 – sin² θ) sec² θ का मान लिखिए।

हल: (1 – sin² θ) sec θ
$= \cos^2\theta \cdot \sec^2\theta$
$= \cos^2\theta \cdot \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1$ उत्तर

प्रश्न 10. $\dfrac{1}{\sqrt{cosec^2\theta - 1}}$ का मान लिखिए।

हल: उत्तर

प्रश्न 11. $\dfrac{\tan 49°}{\cot 41°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: tan 49° = cot(90° – 49°) = cot 41°
{tan θ = cot(90 – θ)}
$\therefore \dfrac{\tan 49°}{\cot 41°} = \dfrac{\cot 41°}{\cot 41°} = 1$

प्रश्न 12. sin²50° + sin²40° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: 40° = 90° – 50°
∴ sin 40° = sin(90° – 50°) = cos 50°
अतः sin²50° + sin²40° = sin²50° + cos²50° = 1 (∵ sin²θ + cos²θ = 1)

प्रश्न 13. tan 39° – cot 51° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: tan 39° = tan(90° – 51°) = cot 51°
अतः tan 39° – cot 51° = cot 51° – cot 51° = 0

प्रश्न 14. sec 50° sin 40° + cos 40° cosec 50° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sec 50° sin 40° + cos 40° cosec 50°
= sec(90° – 40°) sin 40° + cos 40° cosec (90° – 40°)
= cosec 40° sin 40° + cos 40° sec 40°
$= \frac{1}{\sin 40°} \cdot \sin 40° + \cos 40° \cdot \frac{1}{\cos 40°}$ 1 + 1 = 2

प्रश्न 15. यदि tan 2A = cot (A – 18°) हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल: tan 2A = tan [90 – (A – 18°)]
tan 2A = tan(108 – A)
∴ 2A = 108° – A
3A = 108° ⇒ A = 36°

प्रश्न 16. tan 52° tan 38° का मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: tan 52° tan 38°
= tan 52° tan (90° – 52°)
= tan 52° cot 52° ∵ tan (90° – θ) = cot θ
= 1 उत्तर ∵ tan θ. cot θ = 1

प्रश्न 17. cos 50° . cosec 40° का मान लिखिये। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: cos 50° . cosec 40°
⇒ cos(90° – 40°) . cosec 40°
⇒ sin 40° . cosec 40° ∵ cos(90° – θ) = sin θ
= 1 उत्तर ∵ sin θ × cosec θ = 1

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. sec² 65° – cot² 25° – 2 sin 30° cos 60° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sec² 65° – cot² 25° – 2 sin 30° cos 60°
यहाँ 25° = 90° – 65° करने पर-
cot (25°) = cot (90° – 65°)
cot 25° = tan 65° [∵ cot (90° – θ) = tan θ]
अब व्यंजक इस प्रकार हो जाएगा-

(sec² 65° – tan² 65°) – 2 sin 30° cos 60°

$= 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ [∵ sec² θ – tan² θ = 1]

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ उत्तर

प्रश्न 2. का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin 17° = sin (90° — 73°)

या sin 17° = cos 73° .... (i)

cos 67° = cos (90° – 23°)

या cos 67° = sin 23° .... (ii)

sin 15° = sin (90° – 75°)

या sin 15° = cos 75° .... (iii)

समीकरण (i), (ii) व (iii) से sin 17°, cos 67° व sin 15° के मान मूल व्यंजके में रखने पर

= 5 (1) + 2 (1) – 6 (1) = 5 + 2 – 6

= 7 – 6 = 1 उत्तर

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिये कि

sec A (1 – sin A) (sec A + tan A) = 1

हल:

$$L.H.S. = \sec A \ (1 - \sin A) \ (\sec A + \tan A)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right) (1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = R.H.S. \ (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 4. $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$

हम जानते हैं कि cot A = tan (90° – A)

अतः cot 25° = tan (90° – 25°) = tan 65°

अर्थात् $\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°}$
= 1 उत्तर

प्रश्न 5. sin 35° cos 55° + cos 35° sin 55° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: sin 35° cos 55° + cos 35° sin 55°
= sin 35° × cos (90° – 35°) + cos 35° × sin (90° – 35°) [∵ cos (90°- θ) = sinθ sin (90°- θ) = cosθ]
= sin 35° × sin 35° + cos 35° × cos 35°
= sin 35° + cos² 35° (∵sin² θ + cos² θ = 1, θ के प्रत्येक मान के लिये) = 1 उत्तर

प्रश्न 6. cos 12° + cos 78° का मान ज्ञात कीजिए।

हल: cos 12° + cos 78°
= cos- 12° + {cos (90° – 12°)}²
= cos² 12° + sin° 12° [∵ cos (90° – θ) = sin θ]
= 1 उत्तर

प्रश्न 7. दिखाइए कि tan 36° tan 17° tan 54° tan 73° = 1

हल: tan 36° tan 17° tan 54° tan 73°
= tan 36° tan 17° tan (90° – 36°) . tan (90° – 17°)
= tan 36° . tan 17° cot 36° cot 17°
= tan 36° . cot 36° . tan 17° . cot 17°
= 1.1
= 1 उत्तर

प्रश्न 8. दिखाइए कि sin 28° cos 62° + cos 28° sin 62° = 1.

हल: sin 28° cos 62° + cos 28° sin 62°
= sin 28° × cos (90° – 28°) + cos 28° × sin (90° – 28°)
[∵ cos (90° – θ) = sin θ तथा sin (90° – θ) = cos θ]
= sin 28° . sin 28° + cos 28° . cos 28°
= sin² 28° + cos² 28°
(∵ sin² θ + cose² θ = 1, θ के प्रत्येक मान के लिये)
= 1 उत्तर

प्रश्न 9. $\dfrac{\tan 67°}{\cot 23°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\dfrac{\tan 67°}{\cot 23°}$

हम जानते हैं कि cot A = tan (90° − A)

अतः cot 23° = tan (90° − 23°) = tan 67°

अर्थात् $\dfrac{\tan 67°}{\cot 23°} = \dfrac{\tan 67°}{\tan 67°} = 1$ उत्तर

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि $\left[\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \tan^2 A$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \left[\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2$$

$$= \left[\dfrac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\dfrac{\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\dfrac{-(\sin A - \cos A)}{\cos A} \times \dfrac{\sin A}{(\sin A - \cos A)}\right]^2$$

$$= \left[-\dfrac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$\therefore \qquad\qquad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \qquad\qquad\qquad (\text{इतिसिद्धम्})$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि cot θ + tan θ = cosec θ sec θ

हल:

LHS (वाम पक्ष) = cot θ + tan θ

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$[\because \ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \text{cosec}\ \theta \ . \ \sec\theta = \text{RHS दक्षिण पक्ष}$$

$$(\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि (1 + tan²θ)(1 + sin θ) (1 − sin θ) = 1

हल: LHS (वाम पक्ष)= (1 + tan²θ)(1 + sin θ)(1 − sin θ)
= (1 + tan²θ) (1 − sin² θ)
= sec² θ cos²θ
$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta$
= 1 = RHS (दक्षिण पक्ष) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta + 1 + \sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= 2\sec^2\theta = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

$$(\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए tan 15° tan 20° tan 70° tan 75° = 1

हल: वाम पक्ष (LHS) = tan 15° tan 20° tan 70° tan 75°
= tan 15° tan 20° tan (90° − 20°) tan (90° − 15°)

= tan 15° tan 20° . cot 20° . cot 15°

= tan 15° tan 20° $\frac{1}{\tan 20° \tan 15°} = 1$ (RHS) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta[\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta]}{\cos\theta[2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)]}$$

$$(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{\sin\theta[\cos^2\theta - \sin^2\theta]}{\cos\theta[\cos^2\theta - \sin^2\theta]} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) = $\cos^4\theta - \sin^4\theta$
= $(\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2$
= $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
∵ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
= $1.(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ ∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
= $1.(1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$
= RHS (दक्षिण पक्ष) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 17. यदि $\sin\theta + \cos\theta = p$ और $\sec\theta + \text{cosec}\,\theta = q$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $q(p^2 - 1) = 2p$ (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: LHS (वाम पक्ष) = $q(p^2 - 1)$ p
p व q का मान रखने पर = $(\sec\theta + \text{cosec}\,\theta)[(\sin\theta + \cos\theta) - 1]$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1\right]$$

$$= \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)\left[1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1\right]$$

$$= \left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta.\cos\theta}\right] \times (2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 2[\sin\theta + \cos\theta] = 2p = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

निबन्धात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1. यदि θ = 30° तो अग्रलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

$$\frac{3\cot(90°-\theta) - \tan^3\theta}{1 - 3\cot^2(90°-\theta)}$$

हल: θ = 30° रखने पर व्यंजक होगा-

$$= \frac{3\cot(90° - 30°) - \tan^3 30°}{1 - 3\cot^2(90° - 30°)}$$

$$= \frac{3\tan 30° - \tan^3 30°}{1 - 3\tan^2 30°} \qquad [\because \cot(90° - \theta) = \tan\theta]$$

$$= \frac{3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1 - 3.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1 - 3.\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1 - 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{0} = \frac{\frac{9-1}{3\sqrt{3}}}{0} = \frac{8}{0} = \infty \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए-

tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84° = 1

हल: L.H.S. = tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84°

∵ 6° = 90° – 84°

∴ tan 6° = tan (90° – 84°)

tan 6° = cot 84° [∵ tan (90° – 8) = cot 8] ....(i)

तथा 26° = 90° – 64°

tan 26° = tan (90° – 64°)

tan 26° = cot 64° ....(ii)

समीकरण (i) वे (ii) से दिए गए व्यंजक में मान रखने पर

= tan 6° . tan 26° tan 64° . tan 84°

= cot 84° . tan 84° . cot 64° . tan 64° ∵ tan θ . cot θ = 1

= 1 . 1 = 1 = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 3. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए-

cosec (90° – θ) + x cos o cot (90° – θ) = sin (90° – θ)

हल: cosec (90° – θ) + x cos θ cot (90° – θ) = sin (90° – θ)

$\Rightarrow$ sec θ + x cos θ tan θ = cos θ

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} + \frac{x\cos\theta \times \sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} + x\sin\theta = \cos\theta$$

$$\Rightarrow x\sin\theta = \cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow x\sin\theta = \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta}$$

$$x\sin\theta = \frac{-\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad [\because 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$x = \frac{-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 4. निम्न का मान ज्ञात कीजिये – (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ – cosec θ)

हल: $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec }0)$

$$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (1)^2}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$= 2$ **उत्तर**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिये-

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\cos^2 B - \sin^2 A}{\cos^2 B\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \tan^2 A - \tan^2 B$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 A)\cos^2 B - \cos^2 A(1 - \cos^2 B)}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 B - \cos^2 A\cos^2 B - \cos^2 A + \cos^2 A\cos^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B} = \text{मध्य पद} \qquad (\text{इतिसिद्धम्})$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A)}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \text{R.H.S. } (\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 6. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिये-

$$\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} = \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2}{(\sin A - \cos A)(\sin A + \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 2\sin A \cos A + \cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A \cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A + 2\cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \frac{2(\sin^2 A + \cos^2 A)}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2 \times 1}{\sin^2 A - \cos^2 A} \qquad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore \quad$ L.H.S. = R.H.S. (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिये कि-

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\csc A - 1}{\csc A + 1}$$

हल:

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$\frac{\dfrac{\cos A - \cos A \sin A}{\sin A}}{\dfrac{\cos A + \cos A \sin A}{\sin A}} = \frac{\cos A(1 - \sin A)}{\cos A(1 + \sin A)} = \frac{(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)}$$

अंश तथा हर में $\sin A$ से भाग देने पर

$$\frac{\dfrac{(1 - \sin A)}{\sin A}}{\dfrac{(1 + \sin A)}{\sin A}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\cosec A - 1}{\cosec A + 1} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore \qquad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$

प्रश्न 8. सर्वसमिका $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

हल: क्योंकि हमें $\sec\theta$ और $\tan\theta$ से सम्बन्धित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए सबसे पहले सर्वसमिका के वाम पक्ष के अंश और हर को $\cos\theta$ से भाग देकर वाम पक्ष को $\sec\theta$ और $\tan\theta$ के पदों में रूपान्तरित करने पर

वाम पक्ष $= \dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \dfrac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$

$= \dfrac{(\tan\theta+\sec\theta)-1}{(\tan\theta-\sec\theta)+1} = \dfrac{\{(\tan\theta+\sec\theta)-1\}(\tan\theta-\sec\theta)}{\{(\tan\theta-\sec\theta)+1\}(\tan\theta-\sec\theta)}$

अंश तथा हर में $(\tan\theta-\sec\theta)$ से गुणा करने पर

$= \dfrac{(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\tan\theta-\sec\theta)}{\{(\tan\theta-\sec\theta)+1\}(\tan\theta-\sec\theta)}$

$= \dfrac{-1-\tan\theta+\sec\theta}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$

$[\because \sec^2\theta-\tan^2\theta=1]$

$= \dfrac{-(1+\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$

$= \dfrac{-1}{\tan\theta-\sec\theta} = \dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि

$\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ = cosec θ + cot θ (मध्य. शिक्षा बोर्ड , 2018)

हल:

L.H.S. $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

वर्गमूल के अंदर अंश व हर में $1+\cos\theta$ का गुणा करने पर

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$

$[\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta]$

$= \sqrt{\left(\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=$ cosec θ + cot θ

$=$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.   (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. (i) यदि cos 3A = sin(A – 34°) हो, जहाँ 3A एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।

$$\frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A} = \left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2$$

हल: (i) यहाँ यह दिया हुआ है कि

cos 3A = sin(A – 34°) ....(1)

cos 3A = sin(90° – 3A)

इसलिए समीकरण (1) को इस रूप में लिख सकते हैं।

sin(90° – 3A) = sin(A – 34°)

क्योंकि 90° – 3A और A – 34° दोनों ही न्यून कोण हैं, इसलिए

90° – 3A = A – 34°

या -3A – A = -34° – 90°

या -4A = -124°

जिससे $A = \dfrac{-124}{-4} = 31°$ प्राप्त होता है।

अत: A का मान 31° होगा। **उत्तर**

(ii)   L.H.S. $= \dfrac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \dfrac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A}$ $\left| \begin{array}{l} \because \ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \\ \text{और } 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \end{array} \right.$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 A}}{\dfrac{1}{\cos^2 A}} = \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$

R.H.S. $\left(\dfrac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2 = \left(\dfrac{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}\right)^2$

$= \left(\dfrac{\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A}}{\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A}}\right)^2 = \left(\dfrac{(\sin A - \cos A) \times \cos A}{-(\sin A - \cos A) \times \sin A}\right)^2$

$$= \left(\frac{\cos A}{-\sin A}\right)^2 = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S. इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

$$(\text{इतिसिद्धम्})$$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि $\frac{sin\theta}{1+cos\theta} + \frac{1+cos\theta}{sin\theta} = 2cosec\theta$

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = \frac{\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = 2 \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= 2\ \text{cosec}\ \theta = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

हल:

LHS (वाम पक्ष) $= \dfrac{1+\sec A}{\sec A}$

$= \dfrac{1+\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A}} = \dfrac{\dfrac{\cos A+1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A}} = \dfrac{\cos A+1}{\cos A} \times \dfrac{\cos A}{1}$

$= \dfrac{1+\cos A}{1}$

$= \dfrac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$

　　　{अंश व हर में $(1-\cos A)$ से गुणा करने पर}

$= \dfrac{(1)^2-(\cos A)^2}{1-\cos A} = \dfrac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$= \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A} =$ RHS (दक्षिण पक्ष)　　　(इतिसिद्धम्)

　　　　　　　　$(\because\ 1-\cos^2 A = \sin^2 A)$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{cos A + cosec A - 1}{cot A - cosec A + 1} = \dfrac{1+cos A}{sin A}$

हल:

LHS (वाम पक्ष) $= \dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \dfrac{(\cot A + \operatorname{cosec} A) - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

　　　　　　　$(\because\ \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1)$

$= \dfrac{(\operatorname{cosec} A + \cot A) - \left[(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)\right]}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \dfrac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)\left[1 - (\operatorname{cosec} A - \cot A)\right]}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \dfrac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)[\cot A - \operatorname{cosec} A + 1]}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)}$

$= \operatorname{cosec} A + \cot A$

$= \dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A} =$ RHS (दक्षिण पक्ष)

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ $[0 \le A < 45°]$ (माध्य. शिक्षा बोर्‍ड मॉडल पेपर, 2017-18)

हल:

$$\text{LHS (वाम पक्ष)} = \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$$

$$= \left[\frac{\sec A}{\text{cosec} A}\right]^2 = \left[\frac{1/\cos A}{1/\sin A}\right]^2 = \left[\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

$$\text{अब, मध्य पद} = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \left[\frac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\cos A-\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right]^2$$

$$= \left[-\frac{(\sin A-\cos A)}{\cos A} \times \frac{\sin A}{(\sin A-\cos A)}\right]^2$$

$$= \left[-\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [-\tan A]^2$$

$$= \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

अत: L.H.S. = मध्य पद = R.H.S. (इतिसिद्धम्)